

## 2025 学年第一学期八年级期终测试数学试卷（样卷）

（试卷说明：本卷分两个部分，第一部分为必做题，满分 100 分；第二部分为选做题，满分 20 分。本卷总测试时间为 100 分钟。）

### 第一部分：必做题

#### 一、选择题（本大题共 10 题，每题 3 分，满分 30 分）

1. 下列说法中，正确的是（ ）

- A. 任何实数都有倒数
- B. 任何实数不是有理数就是无理数
- C. 任何实数都有平方根
- D. 任何实数不是正实数就是负实数

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了实数的定义性质，根据实数的定义和性质，判断各选项的正确性即可。

【详解】解：A、0 没有倒数，故 A 错误；

B、实数由有理数和无理数组成，故 B 正确；

C、负数没有平方根，故 C 错误；

D、0 既不是正实数也不是负实数，故 D 错误，

故选：B.

2. 下列二次根式中，是最简二次根式的是（ ）

A.  $\sqrt{\frac{a}{3}}$

B.  $\sqrt{21a}$

C.  $\sqrt{12a^3}$

D.  $\sqrt{a^2 + 2a + 1}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了最简二次根式，最简二次根式需满足被开方数不含分母、不含能开得尽方的因数或因式，选项 A 被开方数含分母，选项 C 可化简，选项 D 可化为完全平方形式，均不是最简；选项 B 被开方数无平方因子且不含分母，故为最简。

【详解】解：A、 $\sqrt{\frac{a}{3}}$ ，被开方数含分母，不是最简二次根式；

B、 $\sqrt{21a}$ ，被开方数  $21a$  中 21 不是完全平方数， $a$  为变量，无平方因子，故为最简二次根式；

C、 $\sqrt{12a^3} = \sqrt{4 \times 3 \times a^2 \times a} = 2a\sqrt{3a}$ ，可化简，不是最简二次根式；

D、 $\sqrt{a^2 + 2a + 1} = \sqrt{(a+1)^2} = |a+1|$ ，可化简，不是最简二次根式。

故选：B.

3. 下列方程中，是一元二次方程的是（ ）

A.  $x^2 = \sqrt{3}x$

B.  $xy = 1$

C.  $x + \frac{1}{x} = 1$

D.  $x^2 + \frac{1}{2x^2} = 0$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的定义，只含有一个未知数，并且含未知数的项的最高次数是2的整式方程叫一元二次方程；熟练掌握定义是解题关键。

根据一元二次方程的定义判断即可。

【详解】解：∵一元二次方程需满足：①一个未知数；②最高次数为2；③整式方程；

A、 $x^2 = \sqrt{3}x$ 可化为 $x^2 - \sqrt{3}x = 0$ ，满足定义，符合题意；

B、 $xy = 1$ 含有两个未知数，不满足①，不是一元二次方程，不符合题意；

C、 $x + \frac{1}{x} = 1$ 分母含未知数，不是整式方程，不满足③，不是一元二次方程，不符合题意；

D、 $x^2 + \frac{1}{2x^2} = 0$ 分母含未知数，不是整式方程，不满足③，不是一元二次方程，不符合题意；

故选：A.

4. 如果 $x_1$ 和 $x_2$ 是一元二次方程 $2x^2 - 8x - \sqrt{15} = 0$ 的两个实数根，那么以下结论正确的是（ ）

A.  $x_1 + x_2 = 8$

B.  $x_1 + x_2 = -4$

C.  $x_1 \cdot x_2 = -\frac{\sqrt{15}}{2}$

D.  $x_1 \cdot x_2 = \frac{\sqrt{15}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查一元二次方程根与系数的关系，解题的关键是掌握如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$

的两根为 $x_1$ ， $x_2$ ，则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ 。

利用一元二次方程根与系数的关系直接计算根的和与积即可。

【详解】解：∵方程  $2x^2 - 8x - \sqrt{15} = 0$  中， $a = 2$ ， $b = -8$ ， $c = -\sqrt{15}$ ，

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-8}{2} = 4, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-\sqrt{15}}{2} = -\frac{\sqrt{15}}{2},$$

∴选项 C 正确，

故选：C.

5. 下列关于  $x$  的一元二次方程中，没有实数根的方程是（ ）

A.  $x^2 - \sqrt{3}x - 2 = 0$

B.  $x^2 - 3x - 2 = 0$

C.  $x^2 - \sqrt{3}x + 2 = 0$

D.  $x^2 + 3x + 2 = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查通过判别式判断根的情况，计算每个一元二次方程的判别式，判断是否有实数根，若  $\Delta < 0$  则无实数根.

【详解】解：选项 A:  $\Delta = (-\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 3 + 8 = 11 > 0$ ，有实数根；

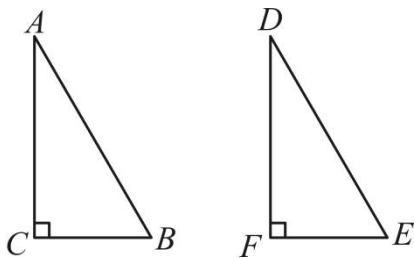
选项 B:  $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 + 8 = 17 > 0$ ，有实数根；

选项 C:  $\Delta = (-\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 2 = 3 - 8 = -5 < 0$ ，没有实数根；

选项 D:  $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$ ，有实数根；

故选 C.

6. 如图，在  $\text{Rt}\triangle ABC$  和  $\text{Rt}\triangle DEF$  中，已知  $\angle ACB = \angle DFE = 90^\circ$ ，且  $AC = DF$ ．如果只能运用“直角三角形全等的判定定理”判定  $\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle DEF$ ，那么需要补充的条件是（ ）



A.  $\angle A = \angle D$

B.  $AB = DE$

C.  $\angle B = \angle E$

D.  $BC = EF$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查直角三角形全等的判定定理的应用，根据已知结合图形及判定方法 HL 判断各选项即可.

根据直角三角形全等的判定定理“HL”，应添加斜边对应相等，即  $AB = DE$ ，  
故选 B.

7. 以下用科学记数法表示的小数中，转化为小数形式后，小数点与左起第一个非零数字之间恰有三个 0 的是（ ）

- A.  $1.703 \times 10^{-2}$                       B.  $9.0007 \times 10^2$   
C.  $-5.0003 \times 10^{-3}$                 D.  $-6.2181 \times 10^{-4}$

【解析】

【分析】本题考查科学记数法，将每个选项的科学记数法转化为小数形式，检查小数点与左起第一个非零数字之间零的个数，恰有三个 0 的选项符合要求.

故选: D.

8. 在数轴上, 如果实数 3 对应的点为  $A$ , 4 对应的点为  $B$ ,  $\sqrt{13}$  对应的点为  $C$ , 那么以下表述正确的是 ( )

- A. 点  $C$  位于点  $B$  的右侧
- B. 点  $C$  位于点  $A$  的左侧
- C. 点  $C$  位于  $A$ 、 $B$  两点之间且更靠近点  $A$
- D. 点  $C$  位于  $A$ 、 $B$  两点之间且更靠近点  $B$

【解析】

【分析】本题考查了实数与数轴，无理数的估算，二次根式的加减运算，解题的关键是熟练掌握无理数的估算方法，二次根式的加减运算法则.

先根据无理数的估算方法确定点  $C$  在点  $A$  和点  $B$  之间, 然后得到  $BC = 4 - \sqrt{13}$ ,  $AC = \sqrt{13} - 3$ , 再比较  $BC$

与  $AC$  的大小即可.

【详解】解:  $\because \sqrt{9} = 3, \sqrt{16} = 4$

$$\therefore 3 < \sqrt{13} < 4,$$

$\therefore$  点  $C$  在点  $A$  和点  $B$  之间;

$$\therefore BC = 4 - \sqrt{13}, AC = \sqrt{13} - 3,$$

$$\therefore BC - AC = 4 - \sqrt{13} - (\sqrt{13} - 3) = 7 - 2\sqrt{13}$$

$$\therefore 2\sqrt{13} = \sqrt{52} > \sqrt{49} = 7,$$

$$\therefore BC - AC = 7 - 2\sqrt{13} < 0,$$

$$\therefore BC < AC$$

因此点  $C$  更靠近点  $B$ ,

综上, 点  $C$  位于  $A$ 、 $B$  两点之间且更靠近点  $B$ ,

故选: D.

9. 某省举办的城市业余足球联赛采用主客场双循环赛制, 每支球队与其他球队需进行两场比赛 (主场和客场各一次). 本赛季该联赛共完成比赛 156 场. 设参加联赛的球队有  $x$  支, 根据题意, 为求解  $x$ , 以下列出的方程正确的是 ( )

A.  $\frac{1}{2}x(x-1) = 156$

B.  $x(x-1) = 156$

C.  $2x(x-1) = 156$

D.  $\frac{1}{2}x(x+1) = 156$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查根据实际问题列方程, 根据双循环赛制中, 每两支球队之间进行两场比赛, 总比赛场数为球队数  $x$  与  $x-1$  的乘积列方程即可.

【详解】解: 设有  $x$  支球队, 则每支球队与其他  $x-1$  支球队各进行两场比赛, 总比赛场数为  $x(x-1)$ ,

由题意得:  $x(x-1) = 156$ ,

故选 B.

10. 学习《理财小课堂》后, 请从收益率的角度分析以下两个项目, 哪个更值得投资. 以下观点中, 你最认同的是 ( )

| 项目 | 投入 (万元) | 一年后返回 (万元) | 二年后返回 (万元) |
|----|---------|------------|------------|
| 甲  | 100     | 60         | 50         |
| 乙  | 80      | 50         | 38         |

- A. 因为甲、乙两个项目的收益率都是10%，所以投资这两个项目是一样的
- B. 因为甲项目的总收益为10万元，高于乙项目的总收益8万元，所以投资甲项目更优
- C. 虽然甲、乙两个项目的收益率都是10%，但因为一年后甲项目先返回60%，乙项目先返回62.5%，乙先返回的更多，所以投资乙项目更优
- D. 虽然甲、乙两个项目的收益率都是10%，但因为甲、乙两个项目的初始投入不一样，所以无法判断投资哪个项目更优

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查百分数的意义，收益率的计算；从收益率角度分析，甲和乙的总收益率均为10%，但乙项目一年后返回的金额占初始投入的比例更高（ $62.5\% > 60\%$ ），意味着资金返回更快，有利于再投资，因此乙项目更优.

【详解】解：∵甲项目投入100万元，一年后返回60万元，二年后返回50万元，  
∴甲的总收益 $110 - 100 = 10$ 万元，甲的收益率 $10 \div 100 = 10\%$ ，  
∵乙项目投入80万元，一年后返回50万元，二年后返回38万元，  
∴乙的总收益 $88 - 80 = 8$ 万元，乙的收益率 $8 \div 80 = 10\%$ ，  
∴甲和乙总收益率相同，  
∵一年后返回比例：甲 $60 \div 100 = 60\%$ ，乙 $50 \div 80 = 62.5\%$ ，乙更高，  
∴从资金返回速度考虑，乙资金返回更快，有利于再投资，  
∴乙项目更值得投资.

故选：C.

## 二、填空题（本大题共10题，每题2分，满分20分）

11. 64的立方根是\_\_\_\_\_.

【答案】4

【解析】

【分析】根据立方根的定义即可求解.

【详解】解：  $\because 4^3=64$ ,

$\therefore 64$  的立方根是 4,

故答案为：4.

【点睛】此题主要考查立方根的定义，解题的关键是熟知立方根的定义.

12. 计算：  $\sqrt{32}-3\sqrt{2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式加减，先将  $\sqrt{32}$  化简为  $4\sqrt{2}$ ，再与  $3\sqrt{2}$  进行合并同类项即可.

【详解】解：  $\sqrt{32}-3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}-3\sqrt{2} = (4-3)\sqrt{2} = \sqrt{2}$ .

故答案为  $\sqrt{2}$ .

13. 若式子  $\frac{\sqrt{m-1}}{m+2}$  在实数范围内有意义，则  $m$  的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $m \geq 1$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件，分式有意义的条件，掌握二次根式有意义则被开方数非负，分式有意义则分母不为 0 是解题的关键.

根据二次根式有意义的条件，分式有意义的条件得到  $\begin{cases} m-1 \geq 0 \\ m+2 \neq 0 \end{cases}$ ，再求解即可.

【详解】解：  $\because$  式子  $\frac{\sqrt{m-1}}{m+2}$  在实数范围内有意义，

$$\therefore \begin{cases} m-1 \geq 0 \\ m+2 \neq 0 \end{cases},$$

解得：  $m \geq 1$ ,

$\therefore m$  的取值范围是  $m \geq 1$ ,

故答案为：  $m \geq 1$ .

14. 化简：  $\sqrt{(\pi-4)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $4-\pi$  ##  $-\pi+4$

【解析】

【分析】 本题考查了利用二次根式的性质化简，解题的关键是熟练掌握  $\sqrt{a^2} = |a|$  .

先确定  $\pi - 4 < 0$  , 然后根据  $\sqrt{a^2} = |a|$  化简代数式，再化简绝对值即可.

【详解】 解:  $\pi - 4 < 0$

$$\therefore \sqrt{(\pi - 4)^2} = |\pi - 4| = 4 - \pi ,$$

故答案为:  $4 - \pi$  .

15. 用配方法解一元二次方程时，往往先将原方程转化为  $(x + a)^2 = b$  的形式. 现如果用配方法解一元二次方程  $x^2 - 4x - 2025 = 0$  , 那么此时  $a + b$  的值是\_\_\_\_\_.

【答案】 2027

【解析】

【分析】 本题考查配方法解一元二次方程，解题的关键是掌握配方法的一般步骤：①把常数项移到等号的右边；②把二次项的系数化为1；③等式两边同时加上一次项系数一半的平方；④再直接开平方求解.

通过配方法将方程转化为完全平方形式，比较系数求  $a$  和  $b$  的值，再代入求值即可.

【详解】 解:  $x^2 - 4x - 2025 = 0$

移项得  $x^2 - 4x = 2025$  ,

配方得  $x^2 - 4x + 4 = 2025 + 4$  , 即  $(x - 2)^2 = 2029$  ,

与  $(x + a)^2 = b$  对比，得  $a = -2$  ,  $b = 2029$  ,

所以  $a + b = -2 + 2029 = 2027$  .

故答案为: 2027.

16. 在实数范围内因式分解:  $2x^2 + 2x - 3 =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $2\left(x + \frac{1 - \sqrt{7}}{2}\right)\left(x + \frac{1 + \sqrt{7}}{2}\right)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了实数范围内分解因式，解一元二次方程，令  $2x^2 + 2x - 3 = 0$  , 利用求根公式求出方程的两个根即可得到答案.

【详解】 解: 解方程  $2x^2 + 2x - 3 = 0$  ,

使用求根公式  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , 其中  $a = 2$ ,  $b = 2$ ,  $c = -3$ ,

判别式  $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 4 + 24 = 28$ ,

所以  $x = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$ ,

根为  $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{2}$ ,

因此  $2x^2 + 2x - 3 = 2\left(x - \frac{-1 + \sqrt{7}}{2}\right)\left(x - \frac{-1 - \sqrt{7}}{2}\right) = 2\left(x + \frac{1 - \sqrt{7}}{2}\right)\left(x + \frac{1 + \sqrt{7}}{2}\right)$ .

故答案为:  $2\left(x + \frac{1 - \sqrt{7}}{2}\right)\left(x + \frac{1 + \sqrt{7}}{2}\right)$ .

17. 已知等腰直角三角形斜边上的高的长度恰好是方程  $x^2 - x - 12 = 0$  的根, 那么这个直角三角形斜边的长是\_\_\_\_\_.

【答案】8

【解析】

【分析】 本题考查用因式分解法解一元二次方程, 得到高的长度, 再利用等腰直角三角形斜边上的高等于斜边的一半的性质求解即可.

【详解】 解: 由  $x^2 - x - 12 = 0$ , 因式分解得  $(x - 4)(x + 3) = 0$ ,

解得  $x = 4$  或  $x = -3$  (舍去负根),

$\therefore$  斜边上的高为 4,

在等腰直角三角形中, 斜边上的高也是斜边上的中线, 且等于斜边的一半,

$\therefore$  斜边长为  $4 \times 2 = 8$ ,

故答案为 8.

18. 不等式  $-\sqrt{3}x \geq 3(\sqrt{3} + x)$  的解集是\_\_\_\_\_.

【答案】  $x \leq \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次不等式, 分母有理化, 解题的关键是熟练掌握解一元一次不等式的步骤.

首先展开不等式右边, 然后移项合并同类项, 注意到系数为负, 除以负数时不等式方向反转, 最后再分母

有理化即可.

【详解】解:  $-\sqrt{3}x \geq 3(\sqrt{3}+x)$

$$-\sqrt{3}x \geq 3\sqrt{3} + 3x$$

$$-\sqrt{3}x - 3x \geq 3\sqrt{3}$$

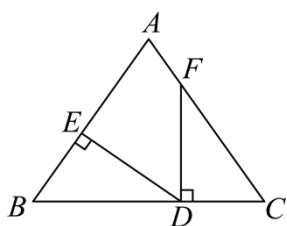
$$(-\sqrt{3}-3)x \geq 3\sqrt{3}$$

$$x \leq \frac{3\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-3} = \frac{3\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{-(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{9\sqrt{3}-9}{-(9-3)} = \frac{9-9\sqrt{3}}{6} = \frac{3-3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \text{原不等式的解集为 } x \leq \frac{3-3\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{故答案为: } x \leq \frac{3-3\sqrt{3}}{2}.$$

19. 如图, 已知点  $D$  在  $BC$  上,  $DE \perp AB$  于点  $E$ ,  $DF \perp AC$  于点  $F$ ,  $BD = CF$ ,  $BE = CD$ , 若  $\angle AFD = 140^\circ$ , 则  $\angle EDF =$  \_\_\_\_\_ 度.



【答案】 50

【解析】

【分析】 本题主要考查了全等三角形的性质与判定, 三角形外角的性质, 证明  $\text{Rt}\triangle BED \cong \text{Rt}\triangle CDF$  得到  $\angle B = \angle C$ ,  $\angle BDE = \angle CFD$  是解题的关键. 利用 HL 证明  $\text{Rt}\triangle BED \cong \text{Rt}\triangle CDF$  得到  $\angle B = \angle C$ , 利用三角形外角的性质求出  $\angle C$  的度数, 再利用三角形的外角的性质即可得到答案.

【详解】解:  $\because DF \perp BC$ ,  $DE \perp AB$ ,

$$\therefore \angle BED = \angle CDF,$$

在  $\text{Rt}\triangle BED$  和  $\text{Rt}\triangle CDF$  中,

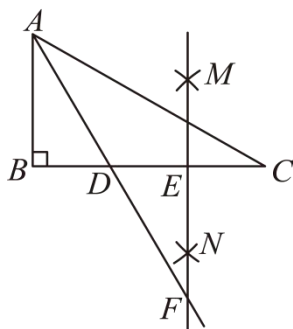
$$\begin{cases} BD = CF \\ BE = CD \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BED \cong \text{Rt}\triangle CDF (\text{HL}),$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle B = \angle C, \quad \angle BDE = \angle CDF, \\
&\therefore \angle AFD = 140^\circ = \angle C + \angle CDF, \\
&\therefore \angle C = \angle AFD - \angle CDF = 50^\circ, \\
&\therefore \angle B = \angle C = 50^\circ, \\
&\therefore \angle BDE + \angle EDF = \angle FDB = \angle C + \angle DFC, \\
&\therefore \angle EDF = \angle C = 50^\circ.
\end{aligned}$$

故答案为：50.

20. 如图，在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle ACB = 30^\circ$ ， $\angle BAC$  的平分线  $AD$  交  $BC$  于点  $D$ 。分别以点  $C$ 、 $D$  为圆心，以大于  $\frac{1}{2}CD$  的长为半径作弧，两弧相交于点  $M$ 、 $N$ ，作直线  $MN$  交  $BC$  于点  $E$ ，交  $AD$  的延长线于点  $F$ 。如果  $BD = 3$ ，那么  $DF = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】6

【解析】

【分析】本题考查了三角形的外角性质，垂直平分线的作法和性质，勾股定理，全等三角形的判定和性质，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题。

求得  $\angle BAD = 30^\circ$ ， $AB = 3\sqrt{3}$ ， $AC = 6\sqrt{3}$ ， $BC = 9$ ， $CD = 6$  由作图知  $MN$  是线段  $CD$  的垂直平分线，求得  $DE = CE = \frac{1}{2}CD$ ，再证明  $\triangle ABD \cong \triangle FED$ ，据此求解即可。

【详解】解： $\because \text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle ACB = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ$$

$\therefore AD$  是  $\angle BAC$  的平分线，

$$\therefore \angle BAD = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore BD = 3,$$

$$\therefore AD = 2BD = 2 \times 3 = 6, \quad AB = \sqrt{AD^2 - BD^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}, \quad AC = 2AB = 2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3},$$

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{3})^2} = 9,$$

$$\therefore CD = BC - BD = 9 - 3 = 6,$$

$\therefore$  由作图知  $MN$  是线段  $CD$  的垂直平分线,

$$\therefore DE = CE = \frac{1}{2}CD = 3, \quad \angle DEF = 90^\circ,$$

在  $\triangle ABD$  和  $\triangle FED$  中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle DEF = 90^\circ \\ BD = ED \\ \angle ADB = \angle FDE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle FED (\text{ASA}),$$

$$\therefore DF = AD = 6,$$

故答案为: 6.

### 三、解答题 (本大题共 6 题, 满分 50 分)

21. 计算:  $2\sqrt{3} \times \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 + 2\sqrt{2} \right) \div \frac{1}{\sqrt{3}}.$

**【答案】**  $15\sqrt{2} - 18$

**【解析】**

**【分析】** 本题考查二次根式的混合运算. 先计算括号内的表达式, 合并同类二次根式, 然后利用乘除法则进行化简.

**【详解】** 解:  $2\sqrt{3} \times \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 + 2\sqrt{2} \right) \div \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$= 2\sqrt{3} \times \left( \frac{5\sqrt{2}}{2} - 3 \right) \times \sqrt{3}$$

$$= 6 \times \left( \frac{5\sqrt{2}}{2} - 3 \right)$$

$$= 6 \times \frac{5\sqrt{2}}{2} - 6 \times 3$$

$$= 15\sqrt{2} - 18.$$

22. 某同学在解方程  $x^2 - 5x = 6$  时, 给出了以下解答过程:

|      |      |
|------|------|
| 解答过程 | 步骤序号 |
|------|------|

|                                             |    |
|---------------------------------------------|----|
| 解: 将方程的左边因式分解, 得<br>$x(x-5)=6$ ,            | …① |
| 当 $x=6$ 且 $x-5=1$ 时满足以上等式, 可得<br>$x=6$ ;    | …② |
| 当 $x=-1$ 且<br>$x-5=-6$ 时满足以上等式, 可得 $x=-1$ . | …③ |
| 综上, 原方程的解为<br>$x_1=6, x_2=-1$ .             | …④ |

(1) 该同学的解答过程是否正确? (请根据你的判断勾选以下选项之一; 勾选后, 根据相应的选项完成对应的问题 (2) 和问题 (3))

|                                                 |                                                      |
|-------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> A. 该解答过程不正确            | <input type="checkbox"/> B. 该解答过程正确                  |
| (2A) 如果你认为该解答不正确, 那么它是从第_____步开始出错的, 请说明其错误的原因: | (2B) 如果你认为该解答正确, 那么请再出一个一元二次方程, 并用上述方法求解, 说明此解法的合理性; |
| (3A) 对于原题所给的方程, 请写出你认为正确的解答过程.                  | (3B) 对于原题所给的方程, 请另外给出一种你认为正确的解法, 写出解答过程.             |

【答案】 A; (2A) 从第②步开始出错, 理由见详解; (3A) 解答过程见详解

【解析】

【分析】 本题考查用因式分解法解方程的错解改正问题，熟练掌握解方程的方法是解题的关键；根据题意可判断解答过程不正确，

(2A) 因式分解法解一元二次方程的原理是“若  $ab=0$ ，则  $a=0$  或  $b=0$ ”，据此答题即可；

(3A) 按因式分解法解方程即可.

【详解】 解： A. 该解答过程不正确，

(2A) 从第②步开始出错

错误的原因：因式分解法解一元二次方程的原理是若  $ab=0$ ，则  $a=0$  或  $b=0$ ，该解法错误地将等式右边为 6 的情况类比为 0 的情况进行求解，其推理过程不成立；

(3A) 正确的解答过程：

$$x^2 - 5x = 6,$$

$$\text{移项得 } x^2 - 5x - 6 = 0,$$

$$\text{因式分解得 } (x-6)(x+1) = 0,$$

$$\text{所以 } x-6=0 \text{ 或 } x+1=0,$$

$$\text{解得 } x=6 \text{ 或 } x=-1.$$

$$23. \text{ 已知关于 } x \text{ 的一元二次方程 } x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2 = 0.$$

(1) 如果这个方程有两个不相等的实数根，求  $m$  的取值范围；

(2) 如果这个方程的两个实数根的平方和是 13，求  $m$  的值.

$$\text{【答案】 (1) } m > \frac{7}{4}$$

$$(2) m = 2$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系及根的判别式、解一元二次方程，熟知一元二次方程根与系数的关系及根的判别式是解题的关键.

(1) 根据所给一元二次方程有两个不相等的实数根，得出关于  $m$  的不等式，据此可解决问题.

(2) 利用一元二次方程根与系数的关系，结合完全平方公式列方程，然后解方程即可解决问题.

【小问 1 详解】

解：  $\because$  一元二次方程  $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2 = 0$  有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = [-(2m+1)]^2 - 4 \times 1 \times (m^2 + 2) > 0$$

$$\therefore 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 8 > 0,$$

$$\text{解得 } m > \frac{7}{4},$$

$$\text{故 } m \text{ 的取值范围 } m > \frac{7}{4}.$$

【小问 2 详解】

解：设  $x_1, x_2$  是方程  $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2 = 0$  的两个实数根，

$$\text{则 } x_1 + x_2 = 2m+1, \quad x_1 x_2 = m^2 + 2, \quad \text{且 } \Delta = b^2 - 4ac = [-(2m+1)]^2 - 4 \times 1 \times (m^2 + 2) \geq 0,$$

$$\text{解得 } m \geq \frac{7}{4};$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = 13,$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 13,$$

$$\therefore (2m+1)^2 - 2(m^2 + 2) = 13,$$

$$\therefore 4m^2 + 4m + 1 - 2m^2 - 4 = 13,$$

$$\therefore m^2 + 2m - 8 = 0,$$

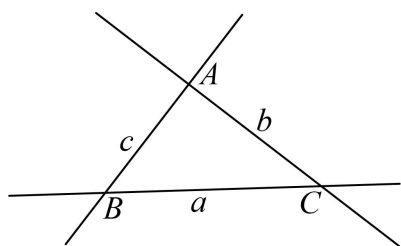
$$\text{解得 } m_1 = 2, m_2 = -4,$$

$$\therefore m \geq \frac{7}{4},$$

$$\therefore m = -4 \text{ 舍去},$$

$$\text{故 } m = 2.$$

24. 如图，有三条公路  $a$ 、 $b$ 、 $c$  两两相交于  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点．现要建设一个商场  $P$ ，使得它到三条公路的距离相等．



(1) 小海同学发现，符合条件的商场  $P$  的位置一共有 4 个，其中有一个在  $ABC$  的内部．请用尺规作出在  $ABC$  外部的另外 3 个符合要求的点  $P$  (保留作图痕迹，不必写作法，可将作出的三个点分别标记为  $P_1$ 、 $P_2$  和  $P_3$ )；

(2) 猜想：请你写出根据 (1) 的要求作出的三个点所围成的三角形所具有的一个特征：三角形

$P_1P_2P_3$ \_\_\_\_\_.

【答案】(1) 见详解 (2) 是锐角三角形

【解析】

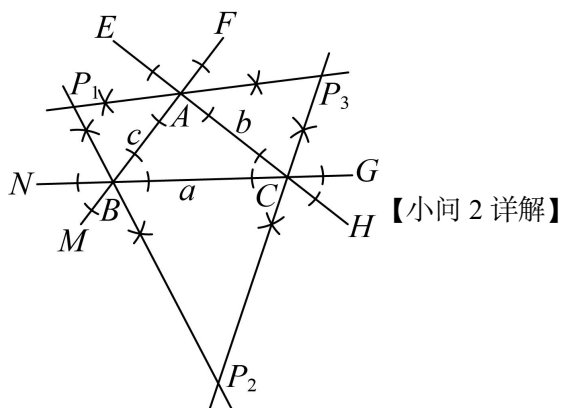
【分析】本题考查了作角平分线，角平分线的性质，三角形的分类，正确掌握相关性质内容是解题的关键.

(1) 根据角平分线上的点到角的两边距离相等，故分别作出  $\angle EAB, \angle ABN, \angle MBC, \angle BCH, \angle GCA, \angle FAC$  的角平分线，它们的交点分别记为  $P_1, P_2$  和  $P_3$ ，即可作答.

(2) 观察 (1) 的图，得出三角形  $P_1P_2P_3$  是锐角三角形，即可作答.

【小问 1 详解】

解:  $P_1, P_2$  和  $P_3$  如图所示:



【小问 2 详解】

解: 根据 (1) 的要求作出的三个点所围成的三角形所具有的一个特征: 三角形  $P_1P_2P_3$  是锐角三角形.

25. 我们知道，如果正整数  $a, b, c$  满足  $a^2 + b^2 = c^2$ ，那么  $a, b, c$  称为一组勾股数（或称勾股数组），可表示为  $\{a, b, c\}$  ( $c > a, c > b$ )。以勾股数组中的三个数为三边长的三角形一定是直角三角形.

(1) 对于勾股数组  $\{a, b, c\}$ ，求证:  $\frac{b+c}{a} = \frac{a}{c-b}$ ;

(2) 已知一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的系数  $a, b, c$  均为正整数，如果正有理数  $p$  满足:  $\frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right)$  为

该方程的两根之和， $\frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right)$  为该方程的两根之积，求证: 此时的系数  $a, b, c$  一定是一组勾股数.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查的是勾股数，掌握勾股数的定义、平方差公式是解题的关键.

(1) 先根据勾股数的定义得  $a^2 + b^2 = c^2$ ，再变形利用平方差公式得  $(c-b)(c+b) = a^2$ ，再利用分式的性质变形可得结论；

(2) 设方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的两根之和为  $S = -\frac{b}{a}$ ，两根之积为  $P = \frac{c}{a}$ ，根据题意， $S = \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right)$ ， $P = \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right)$ ，则  $S + P = p = \frac{c-b}{a}$ ， $S - P = -\frac{1}{p}$ ， $\frac{1}{p} = \frac{c+b}{a}$ ，再根据  $p \times \frac{1}{p} = 1$  即  $\frac{c-b}{a} \times \frac{c+b}{a} = 1$ ，变形可得结论。

#### 【小问 1 详解】

证明： $\because a^2 + b^2 = c^2$ ，

$$\therefore c^2 - b^2 = a^2, \text{ 即 } (c-b)(c+b) = a^2,$$

$$\therefore \frac{a^2}{c-b} = c+b,$$

$$\therefore \frac{c+b}{a} = \frac{a}{c-b}, \text{ 即 } \frac{b+c}{a} = \frac{a}{c-b};$$

#### 【小问 2 详解】

证明：设方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的两根之和为  $S = -\frac{b}{a}$ ，两根之积为  $P = \frac{c}{a}$ ，

$$\text{根据题意， } S = \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right), \quad P = \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right),$$

$$\therefore S + P = \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right) = p, \quad S - P = \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right) = -\frac{1}{p},$$

$$\therefore p = S + P = -\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{c-b}{a}, \quad \frac{1}{p} = -(S - P) = P - S = \frac{c}{a} - \left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{c+b}{a},$$

$$\therefore p \times \frac{1}{p} = 1,$$

$$\therefore \frac{c-b}{a} \times \frac{c+b}{a} = 1, \text{ 即 } \frac{c^2 - b^2}{a^2} = 1,$$

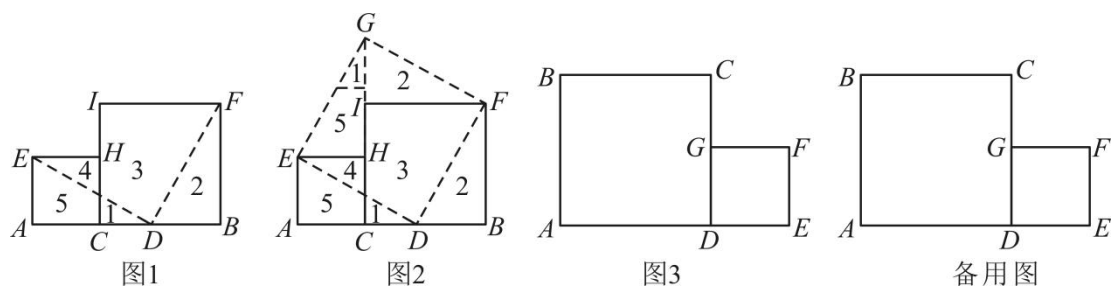
$$\therefore c^2 - b^2 = a^2, \text{ 即 } a^2 + b^2 = c^2,$$

$\therefore a, b, c$  是一组勾股数.

26. 在课本综合与实践活动《“勾股定理”证明中的中国智慧》中，介绍了我国数学家刘徽用“出入相补原

理”证明勾股定理的图形割补方法（如图1和图2）.

活动1：刘徽（约225—约295）的证明



交流学习体会时，小明同学认为：此方法的难点在于确定图2中的点D的位置. 根据图中的示意，只要点D的位置确定，就相应确定了切割两个小正方形的方法，即确定了裁切线ED和FD.

现给定两个边长分别为  $a$  和  $b$  的正方形  $ABCD$  和  $DEFG$  ( $a > b$ )，其中正方形的边  $AD$  和  $DE$  共线（如图3）. 根据刘徽的方法，请用尺规在线段  $AE$  上作出点  $P$  的位置（用于确定裁切线  $BP$  和  $FP$ ），再写出你的作法并证明（即证明这两个正方形按此方法分割并重新拼接后能构成一个边长为  $\sqrt{a^2 + b^2}$  的大正方形）.

【答案】见解析

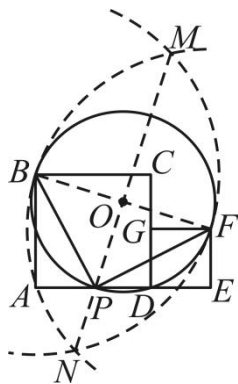
【解析】

【分析】. 本题考查作垂直平分线，圆的基本知识，直径所对的圆周角是直角，勾股定理，三角形全等的判定和性质，正方形的性质；

作图：先连接  $BF$ ，作  $BF$  的垂直平分线  $MN$  交  $BF$  于  $O$ ，再以  $O$  为圆心， $OB$  为半径画圆，交  $AE$  于点  $P$  即可；

证明：由作图可知  $\angle BOP = \angle FOP = 90^\circ$ ， $OB = OP = OF$ ， $\angle BPF = 90^\circ$ ，证  $\triangle ABP \cong \triangle EPF$  (AAS)，得  $EP = a$ ， $AP = b$ ， $BP = \sqrt{a^2 + b^2}$ ，即可解答.

【详解】解：如图，点  $P$  即为所求，



作法：1、连接  $BF$ ，作  $BF$  的垂直平分线  $MN$  交  $BF$  于  $O$ ，

2、以  $O$  为圆心， $OB$  为半径画圆，交  $AE$  于点  $P$ ；

证明：由作图可知  $MN$  是  $BF$  的垂直平分线，

$$\therefore \angle BOP = \angle FOP = 90^\circ, \quad OB = OP = OF,$$

$$\therefore BP = PF,$$

$\therefore BF$  为  $\odot O$  的直径,

$$\therefore \angle BPF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APB + \angle EPF = 90^\circ,$$

$\therefore ABCD$  和  $DEFG$  都是正方形,

$$\therefore \angle A = \angle E = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABP + \angle APB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABP = \angle EPF,$$

$$\therefore \triangle ABP \cong \triangle EPF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AB = EP = a,$$

$$\therefore AE = AD + DE = a + b,$$

$$\therefore AP = AE - EP = a + b - a = b,$$

$$\therefore BP = \sqrt{AB^2 + AP^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\therefore \angle BPF = 90^\circ,$$

$\therefore$  这两个正方形按此方法分割并重新拼接后能构成一个边长为  $\sqrt{a^2 + b^2}$  的大正方形.