

2025 学年第一学期期末学习反馈八年级数学学科

满分：150 分，时间：100 分钟

(请将所有解答写在答题纸上相应区域)

一、选择题 (每题有且仅有一个正确答案，每题 4 分，共 24 分)

1. 点 $P(-2,6)$ 在平面直角坐标系中的 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查了判断点所在的象限，坐标系中每个象限内点的符号特点如下：第一象限 $(+,+)$ ，第二象限 $(-,+)$ ，第三象限 $(-,-)$ ，第四象限 $(+,-)$ ，据此即可求解

【详解】 解： $\because$ 点 P 的横坐标 $-2 < 0$ ，纵坐标 $6 > 0$ ，

$\therefore$ 点 $P(-2,6)$ 在第二象限

故选： B.

2. 下列各组数中，是勾股数的是 ()

- A. 13, 14, 15 B. 1, 1, $\sqrt{3}$
C. 0.3, 0.4, 0.5 D. 3, 4, 5

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了勾股数，勾股数是满足勾股定理的一组正整数. 根据勾股数的定义解答即可.

【详解】 解： A、 $13^2 + 14^2 \neq 15^2$ ，13, 14, 15 不是勾股数，本选项不符合题意；

B、 $\sqrt{3}$ 不是正整数，1, 1, $\sqrt{3}$ 不是勾股数，本选项不符合题意；

C、 0.3, 0.4, 0.5 都不是正整数，不是勾股数，本选项不符合题意；

D、 $3^2 + 4^2 = 5^2$ ，3, 4, 5 是勾股数，本选项符合题意；

故选： D.

3. 下列说法正确的是 ()

- A. $\sqrt{16}$ 的平方根是 ± 4 B. 负数没有立方根

C. 64 的立方根是 ± 4 ;

D. $(-5)^2$ 的算术平方根是 5

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查平方根、立方根、算术平方根的概念，解题的关键是准确理解这些概念的定义. 分别对每个选项根据平方根、立方根、算术平方根的定义进行分析判断.

【详解】解：A、先计算 $\sqrt{16} = 4$, 4 的平方根是 ± 2 ，不是 ± 4 ，该选项错误；

B、负数有立方根，例如 -8 的立方根是 -2 ，该选项错误；

C、64 的立方根是 4，不是 ± 4 ，该选项错误；

D、先计算 $(-5)^2 = 25$, 25 的算术平方根是 5，该选项正确.

故选：D.

4. 已知方程 $x^2 + bx - c = 0$ 的解是 $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ ，则另一个方程 $(x+3)^2 + b(x+3) - c = 0$ 的解是 ()

A. $x_1 = 2$, $x_2 = 6$

B. $x_1 = -2$, $x_2 = -6$

C. $x_1 = -1$, $x_2 = 3$

D. $x_1 = 1$, $x_2 = -3$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了换元法解一元二次方程，令 $t = x + 3$ ，则方程 $(x+3)^2 + b(x+3) - c = 0$ 即为方程 $t^2 + bt - c = 0$ ，根据题意可得方程 $t^2 + bt - c = 0$ 的解是 $t_1 = 1$, $t_2 = -3$ ，则 $x+3=1$ 或 $x+3=-3$ ，据此求解即可.

【详解】解：令 $t = x + 3$ ，则方程 $(x+3)^2 + b(x+3) - c = 0$ 即为方程 $t^2 + bt - c = 0$ ，

$\because$ 方程 $x^2 + bx - c = 0$ 的解是 $x_1 = 1$, $x_2 = -3$,

$\therefore$ 方程 $t^2 + bt - c = 0$ 的解是 $t_1 = 1$, $t_2 = -3$,

$\therefore x+3=1$ 或 $x+3=-3$,

解得 $x_1 = -2$, $x_2 = -6$,

$\therefore$ 程 $(x+3)^2 + b(x+3) - c = 0$ 的解是 $x_1 = -2$, $x_2 = -6$,

故选：B.

5. 已知 ABC 的三边分别长为 a , b , c ，且满足 $(a-17)^2 + |b-15| + c^2 - 16c + 64 = 0$ ，则 ABC 是

()

A. 以 a 为斜边的直角三角形

B. 以 b 为斜边的直角三角形

C. 以 c 为斜边的直角三角形

D. 不是直角三角形

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理的逆定理、绝对值和偶次方的非负性质；熟练掌握绝对值和偶次方的非负性质，由勾股定理的逆定理得出结论是关键。

通过方程的非负性求出 a , b , c 的值，再应用勾股定理逆定理判断三角形形状即可。

【详解】 解： $\because (a-17)^2 + |b-15| + c^2 - 16c + 64 = 0$,

$$\therefore (a-17)^2 + |b-15| + (c-8)^2 = 0,$$

$$\therefore a-17=0, b-15=0, c-8=0,$$

$$\therefore a=17, b=15, c=8,$$

$$\therefore b^2 + c^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289, a^2 = 17^2 = 289,$$

$$\therefore b^2 + c^2 = a^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是以 a 为斜边的直角三角形。

故选： A.

6. 已知在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上（点 D 不与点 A 、点 B 重合），连接 CD 。

①如果 $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 是边 AB 上的中线，那么 $AB = 2CD$ 。

②如果 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 2CD$ ，那么 CD 是边 AB 上的中线。

③如果 CD 是边 AB 上的中线， $AB = 2CD$ ，那么 $\angle ACB = 90^\circ$ 。

下列说法正确的是 ()

A. ①②是真命题，③是假命题；

B. ①③是真命题，②是假命题；

C. ②③是真命题，①是假命题；

D. ①②③都是真命题。

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了命题与定理的知识，解题的关键是了解直角三角形的性质及判定方法，难度不大。根

据直角三角形的性质和判定方法分别判断即可确定正确的选项.

【详解】解: 根据直角三角形的性质: 斜边上的中线等于斜边的一半可以判断①正确;

故①正确, 是真命题;

如果 $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 2CD$, 那么 CD 是边 AB 上的中线,

当 $45^\circ < \angle B < 60^\circ$ 时, 以 C 为圆心, 以 AB 的一半为半径的圆与斜边会有两个交点

故②错误, 假真命题;

根据一边上的中线等于这条边的一半的三角形是直角三角形可以判定③正确,

故③是真命题.

综上分析可知, ①③都是真命题.

故选: B.

二、填空题 (每题 4 分, 共 48 分)

7. 如果 $\sqrt{2-x}$ 有意义, 那么 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \leq 2$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件, 解题的关键在于掌握二次根式中的被开方数是非负数.

根据二次根式有意义的条件可得 $2-x \geq 0$, 进而求出 x 的取值范围即可.

【详解】 解: 由题意可得: $2-x \geq 0$,

$\therefore x \leq 2$.

故答案为: $x \leq 2$.

8. 写出 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 的一个有理化因式是_____.

【答案】 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

【解析】

【分析】 充分利用平方差公式, 得出有理化因子即可.

【详解】 解: $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$,

故答案为: $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

【点睛】 本题考查了分子有理化, 解题的关键是熟练掌握平方差公式进行求解.

9. 若点 $A(m+1, 8)$ 在 y 轴上, 则点 $B(3-m, m-2)$ 在第_____象限.

【答案】 四

【解析】

【分析】 本题考查了平面直角坐标系中的点的坐标特征，解题的关键是掌握数形结合的思想.

根据 y 轴上点的横坐标为 0，求出 m 的值，再代入点 B 的坐标，判断其所在象限即可.

【详解】 $\because$ 点 A 在 y 轴上，

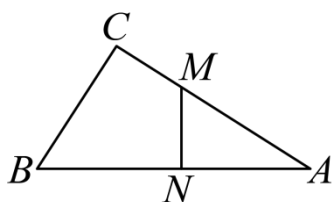
$$\therefore m+1=0, \text{ 解得 } m=-1,$$

$$\therefore B(4, -3), \text{ 故点 } B \text{ 在第四象限.}$$

故答案为：四.

10. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， MN 是 AB 的中垂线， $\angle A = 30^\circ$ ， $AM = 12\text{cm}$ ，则

$$CM = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}.$$



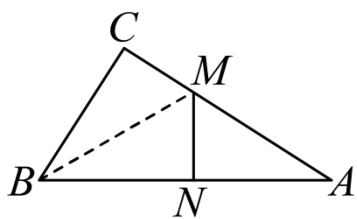
【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了垂直平分线的性质，含 30° 度角的直角三角形的性质，掌握垂直平分线的性质是解题的关键.

连接 BM ，根据垂直平分线的性质可得 $MB = MA$ ，进而根据含 30° 度角的直角三角形的性质即可求得 CM 的长.

【详解】 解：如图，连接 BM ，



$\because MN$ 是 AB 的中垂线， $\angle A = 30^\circ$ ， $AM = 12\text{cm}$ ，

$$\therefore MB = MA = 12,$$

$$\therefore \angle MBA = \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CMB = \angle MBA + \angle A = 60^\circ,$$

$\because \angle C = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle CBM = 30^\circ,$$

$$\therefore CM = \frac{1}{2}BM = 6.$$

故答案为：6.

11. 已知 x 、 y 为实数，且 $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 1) = 20$ ，则 $x^2 + y^2$ 的值是_____.

【答案】4

【解析】

【分析】本题考查了换元法，解一元二次方程，注意解的取值范围是解题关键.

设 $t = x^2 + y^2$ ，则原方程化为 $t(t+1) = 20$ ，解二次方程并根据 $t \geq 0$ 确定值.

【详解】解：设 $t = x^2 + y^2$ ，则 $t \geq 0$ ，

原方程化为 $t(t+1) = 20$ ，

即 $t^2 + t - 20 = 0$ ，

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-20) = 81$ ，

$$\therefore t = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-1 \pm 9}{2},$$

解得 $t = 4$ 或 $t = -5$ ，

由于 $t \geq 0$ ，故 $t = 4$ ，

即 $x^2 + y^2 = 4$.

故答案为：4.

12. 已知 $y = mx^{m^2-3}$ 是关于 x 的正比例函数，且图象在第一、三象限，则 m 的值为_____.

【答案】2

【解析】

【分析】本题主要考查正比例函数的概念、图象与性质，熟练掌握正比例函数的性质是解题关键.

根据正比例函数的形式为 $y = kx (k \neq 0)$ ，且当 $k > 0$ 时，图象经过第一、三象限，则函数中 x 的指数必须为 1，且比例系数 $m > 0$.

【详解】解：由正比例函数的定义，得 $m^2 - 3 = 1$ ，即 $m^2 = 4$ ，

解得 $m = \pm 2$ ，

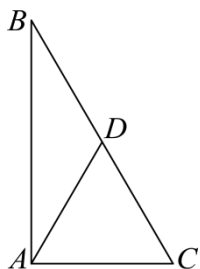
又因图象在第一、三象限，

故比例系数 $m > 0$ ，

因此 $m = 2$.

故答案为: 2.

13. 如图在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, AD 是 BC 边上的中线, 且 $BC + AD = 12$, 则 BC 的长为_____.



【答案】 8

【解析】

【分析】 本题主要考查了直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 熟练掌握其性质是解题的关键. 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 可得 $AD = \frac{1}{2}BC$, 再根据已知条件即可解答.

【详解】 解: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, AD 是 BC 边上的中线,

$$\therefore AD = \frac{1}{2}BC.$$

$$\because BC + AD = 12,$$

$$\therefore BC + \frac{1}{2}BC = 12,$$

$$\therefore BC = 8,$$

故答案为: 8.

14. 若 a , β 是方程 $x^2 - 2x - 5 = 0$ 的两个实数根, 则 $a + \beta - a\beta$ 的值为_____.

【答案】 7

【解析】

【分析】 本题考查了代数式求值, 一元二次方程根与系数的关系, 准确的计算是解决本题的关键. 利用一元二次方程根与系数的关系, 求出两根之和与两根之积, 再代入表达式计算即可.

【详解】 解: $\because a$, β 是方程 $x^2 - 2x - 5 = 0$ 的两个实数根,

$$\therefore a + \beta = -\frac{-2}{1} = 2, \quad a\beta = \frac{-5}{1} = -5,$$

$$\therefore a + \beta - a\beta$$

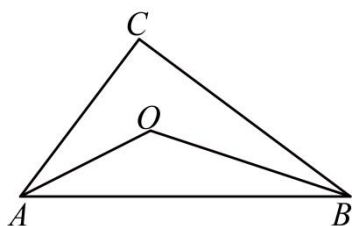
$$= 2 - (-5)$$

$$= 2 + 5$$

=7.

故答案为：7.

15. ABC 中, O 是两内角平分线的交点, $AC = 3, BC = 4, AB = 5$; O 到 AB 的距离是_____.

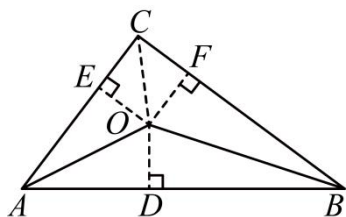


【答案】1

【解析】

【分析】本题考查角平分线的性质及勾股定理的逆定理, 正确得出 $\angle ACB = 90^\circ$, 熟练掌握角平分线的性质是解题关键. 过点 O 作 $OD \perp AB$ 于 D , $OE \perp AC$ 于 E , $OF \perp BC$ 于 F , 连接 OC , 根据角平分线的性质得出 $OD = OE = OF$, 根据勾股定理的逆定理得出 $\angle ACB = 90^\circ$, 利用等积法求出 OD 的值即可得答案.

【详解】解: 如图, 过点 O 作 $OD \perp AB$ 于 D , $OE \perp AC$ 于 E , $OF \perp BC$ 于 F , 连接 OC ,



$\because O$ 是两内角平分线的交点,

$\therefore OC$ 平分 $\angle ACB$,

$\therefore OD = OE = OF$,

$\because AC = 3, BC = 4, AB = 5$, $3^2 + 4^2 = 5^2$,

$\therefore ABC$ 是直角三角形, 且 $\angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OBC}$,

$\therefore \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot OD + \frac{1}{2} AC \cdot OE + \frac{1}{2} BC \cdot OF = \frac{1}{2} OD (AB + AC + BC)$,

$\therefore 3 \times 4 = (5 + 3 + 4) OD$,

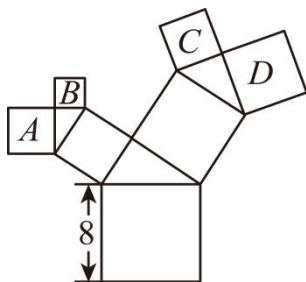
解得: $OD = 1$,

$\therefore O$ 到 AB 的距离是1.

故答案为: 1

16. 如图, 所有的四边形都是正方形, 所有的三角形都是直角三角形, 其中最大的正方形的边长为8, 则正

方形 A 、 B 、 C 、 D 的面积之和为_____.

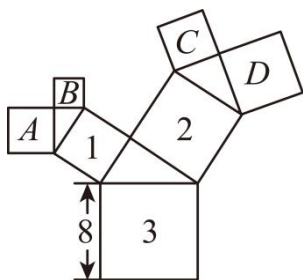


【答案】 64

【解析】

【分析】 本题考查勾股定理，解题关键在于勾股定理结合正方形面积的运用．根据勾股定理有 $S_{\text{正方形}A} + S_{\text{正方形}B} = S_{\text{正方形}1}$ ， $S_{\text{正方形}C} + S_{\text{正方形}D} = S_{\text{正方形}2}$ ， $S_{\text{正方形}1} + S_{\text{正方形}2} = S_{\text{正方形}3}$ ，等量代换即可求四个小正方形的面积之和．

【详解】 解：如图，



根据勾股定理知：

$$S_{\text{正方形}A} + S_{\text{正方形}B} = S_{\text{正方形}1}, \quad S_{\text{正方形}C} + S_{\text{正方形}D} = S_{\text{正方形}2}, \quad S_{\text{正方形}1} + S_{\text{正方形}2} = S_{\text{正方形}3},$$

$$\therefore S_{\text{正方形}A} + S_{\text{正方形}B} + S_{\text{正方形}C} + S_{\text{正方形}D} = S_{\text{正方形}1} + S_{\text{正方形}2} = S_{\text{正方形}3} = 8^2 = 64.$$

故答案为：64．

17. 定义：关于 x 的一元二次方程： $a_1(x-m)^2 + n = 0$ (a_1, m, n 是常数， $a_1 \neq 0$ 与 $a_2(x-m)^2 + n = 0$ (a_2, m, n 是常数， $a_2 \neq 0$ ，称为“同族二次方程”．例如： $2(x-3)^2 + 4 = 0$ 与 $3(x-3)^2 + 4 = 0$ 是“同族二次方程”．如果关于 x 的一元二次方程： $2(x-1)^2 + 1 = 0$ 与 $ax^2 + bx + 5 = 0$ (a, b 是常数， $a \neq 0$) 是“同族二次方程”．那么代数式 $ax^2 - bx + 2030$ 的最小值是_____.

【答案】 2026

【解析】

【分析】 此题考查了配方法的应用，非负数的性质，以及一元二次方程的定义，弄清题中的新定义是解本题的关键．

根据“同族二次方程”的定义，两个方程具有相同的 m 和 n 值，通过比较系数求出 a 和 b 的值，再将代数式配方即可得到最小值.

【详解】解：由“同族二次方程”定义，方程 $ax^2 + bx + 5 = 0$ 可写为 $a(x-1)^2 + 1 = 0$,

展开得 $ax^2 - 2ax + a + 1 = 0$ ，与 $ax^2 + bx + 5 = 0$ 比较系数，

$$\text{得} \begin{cases} -2a = b \\ a + 1 = 5 \end{cases}, \text{解得 } a = 4, \quad b = -8.$$

$$\therefore ax^2 - bx + 2030 = 4x^2 + 8x + 2030 = 4(x+1)^2 + 2026,$$

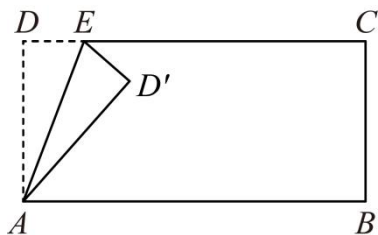
$$\because (x+1)^2 \geq 0,$$

$\therefore$ 最小值为 2026.

故答案为：2026.

18. 如图，长方形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ ， $AD = BC = 8$ ， $AB = CD = 17$. 点 E 为射线 DC 上的一个动点， $\triangle ADE$ 与 $\triangle AD'E$ 关于直线 AE 对称，当 $\triangle AD'B$ 为直角三角形时， DE 的长为

_____.



【答案】2 或 32

【解析】

【分析】分两种情况：点 D' 在线段 BE 上，点 D' 在 EB 延长线上，然后分别根据折叠的性质和勾股定理得出答案即可.

【详解】解：如图 1，当点 D' 在线段 BE 上时，

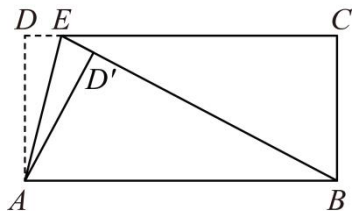


图1

$\because$ 折叠，

$$\therefore \triangle AD'E \cong \triangle ADE,$$

$$\therefore \angle AD'E = \angle D = 90^\circ, \quad \angle AED = \angle AED', \quad AD' = AD = BC = 8$$

$$\therefore \angle AD'B = 90^\circ,$$

$\therefore B、D'、E$ 三点共线,

$$\therefore DC \parallel AB$$

$$\therefore \angle DEA = \angle EAB$$

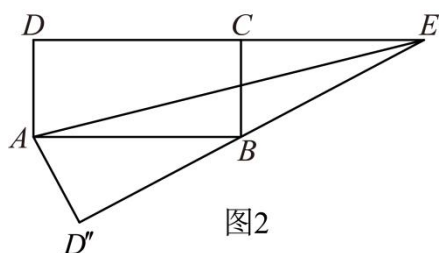
$$\therefore \angle AEB = \angle EAB$$

$$\therefore BE = AB = 17,$$

$$\therefore BD' = \sqrt{AB^2 - AD'^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15,$$

$$\therefore DE = D'E = 17 - 15 = 2;$$

如图 2, 当点 D' 在 EB 延长线上时,



$\therefore$ 折叠,

$$\therefore \triangle AD''E \cong \triangle ADE,$$

$$\therefore \angle AD''E = \angle D = 90^\circ, \quad \angle AED = \angle AED'', \quad AD'' = AD = BC = 8$$

$$\therefore \angle AD''B = 90^\circ,$$

$\therefore B、D''、E$ 三点共线,

$$\therefore DC \parallel AB$$

$$\therefore \angle DEA = \angle EAB$$

$$\therefore \angle AEB = \angle EAB$$

$$\therefore BE = AB = 17,$$

$$\therefore BD'' = \sqrt{AB^2 - AD''^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15,$$

$$\therefore DE = D''E = 17 + 15 = 32.$$

综上所述, DE 的长为 2 或 32

故答案为: 2 或 32.

【点睛】此题考查翻折的性质, 三角形全等的性质, 勾股定理, 掌握翻折的性质, 分类探讨的思想方法是解决问题的关键.

三、解答题

19. 计算

$$(1) \left(3\sqrt{12} - 2\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{48} \right) \div 2\sqrt{3}$$

$$(2) \frac{12}{5-\sqrt{13}} - \frac{3}{\sqrt{13}-\sqrt{10}} - \frac{6}{4+\sqrt{10}}$$

【答案】 (1) $\frac{14}{3}$

(2) 1

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算及分母有理化的混合运算，熟练掌握相应的运算法则、性质及公式是解题的关键.

(1) 先算括号里面的，再算二次根式的除法即可；

(2) 先分母有理化，再加减运算即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \left(3 \times 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 4\sqrt{3} \right) \div 2\sqrt{3} \\ &= \frac{28}{3}\sqrt{3} \div 2\sqrt{3} \\ &= \frac{14}{3}; \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \frac{12 \times (5 + \sqrt{13})}{(5 - \sqrt{13}) \times (5 + \sqrt{13})} - \frac{3 \times (\sqrt{13} + \sqrt{10})}{(\sqrt{13} - \sqrt{10}) \times (\sqrt{13} + \sqrt{10})} - \frac{6 \times (4 - \sqrt{10})}{(4 + \sqrt{10}) \times (4 - \sqrt{10})} \\ &= \frac{12 \times (5 + \sqrt{13})}{25 - 13} - \frac{3 \times (\sqrt{13} + \sqrt{10})}{13 - 10} - \frac{6 \times (4 - \sqrt{10})}{16 - 10} \\ &= (5 + \sqrt{13}) - (\sqrt{13} + \sqrt{10}) - (4 - \sqrt{10}) \\ &= 5 + \sqrt{13} - \sqrt{13} - \sqrt{10} - 4 + \sqrt{10} \\ &= 1. \end{aligned}$$

20. 解方程

$$(1) 2(x-1)^2 = 3 - 3x.$$

$$(2) \frac{2x}{x+3} - \frac{18}{x^2+3x} = 1.$$

【答案】(1) $x_1 = -\frac{1}{2}$ 或 $x_2 = 1$

$$(2) x = 6$$

【解析】

【分析】本题考查解一元二次方程及分式方程，掌握一元二次方程和分式方程的解法和步骤是解题关键.

(1) 去括号、移项，再利用因式分解法解方程即可；

(2) 将原分式方程化为整式方程，再根据因式分解法解一元二次方程，最后检验即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } 2(x-1)^2 = 3-3x,$$

$$\text{去括号, 得 } 2x^2 - 4x + 2 = 3 - 3x,$$

$$\text{移项, 得 } 2x^2 - 4x + 2 - 3 + 3x = 0,$$

$$\text{合并同类项, 得 } 2x^2 - x - 1 = 0,$$

$$\text{因式分解, 得 } (2x+1)(x-1) = 0,$$

$$\therefore 2x+1=0 \text{ 或 } x-1=0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -\frac{1}{2} \text{ 或 } x_2 = 1;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: 去分母, 两边同乘以 } x(x+3),$$

$$\text{得 } 2x^2 - 18 = x^2 + 3x,$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0,$$

$$(x+3)(x-6) = 0,$$

$$\therefore x+3=0 \text{ 或 } x-6=0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -3 \text{ 或 } x_2 = 6,$$

经检验: $x_1 = -3$ 是原方程的增根, 故 $x_1 = -3$ 舍去;

$x_2 = 6$ 是原方程的解;

所以原方程的解是 $x = 6$.

21. 已知 $x = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$, 求下列代数式的值.

(1) $x^2 + xy + y^2$

(2) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$

【答案】 (1) 35 (2) $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分母有理化、完全平方公式、代数式求值以及二次根式运算, 熟练掌握相关知识是解题关键.

(1) 首先计算 x, y 的值, 进而得到 $x+y, xy$ 的值, 然后根据 $x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - xy$ 代入计算即可;

(2) 根据平方 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{xy} + y = 8$, 结合 $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$, 再开算术平方根即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } x = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = \frac{3-2\sqrt{2}}{9-8} = 3-2\sqrt{2},$$

$$y = \frac{1}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = \frac{3+2\sqrt{2}}{9-8} = 3+2\sqrt{2},$$

$$\text{故 } x+y = 3-2\sqrt{2} + 3+2\sqrt{2} = 6,$$

$$xy = (3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = 9-8 = 1,$$

$$\therefore x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - xy = 6^2 - 1 = 35;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{xy} + y = x + y + 2\sqrt{xy} = 6 + 2 = 8,$$

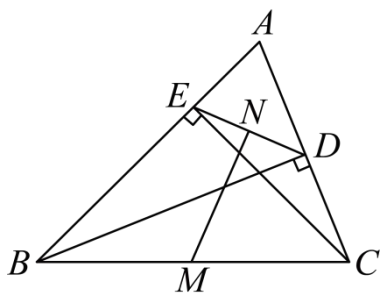
$$\text{且 } \sqrt{x} + \sqrt{y} > 0,$$

$$\therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{2}.$$

22. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $BD \perp AC$ 于 D , $CE \perp AB$ 于 E , M, N 分别是 BC, DE 的中点.

(1) 求证: $MN \perp DE$;

(2) 若 $BC=10$, $DE=6$, 求 $\triangle MDE$ 的面积.



【答案】(1) 见解析；(2) 12

【解析】

【分析】(1) 由直角三角形，线段中点的条件和定理“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”得到辅助线作法，连接 ME 、 MD ，进而得到等腰三角形，再根据定理“三线合一”即可证明 $MN \perp DE$ 。

(2) 根据“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”可得等腰 $\triangle MDE$ 的腰长，且知道底 ED 的长度，那么再根据勾股定理求出高 MN 的长度即可求得 $\triangle MDE$ 的面积。

【详解】解：(1) 证明：

连接 ME 、 MD ，

$\because BD \perp AC$ ，

$\therefore \angle BDC = 90^\circ$ ，

$\because M$ 是 BC 的中点，

$$\therefore DM = \frac{1}{2}BC$$

同理可得 $EM = \frac{1}{2}BC$ ，

$$\therefore DM = EM$$

$\because N$ 是 DE 的中点，

$$\therefore MN \perp DE；$$

(2) 解：

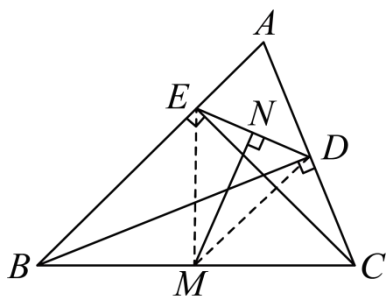
$$\because BC = 10, ED = 6,$$

$$\therefore DM = \frac{1}{2}BC = 5, DN = \frac{1}{2}DE = 3$$

由(1)可知 $\angle MND = 90^\circ$

$$\therefore MN = \sqrt{MD^2 - DN^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$\therefore S_{\triangle MDE} = \frac{1}{2} DE \cdot MN = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$



【点睛】本题综合考查了直角三角形斜边上的中线定理，等腰三角形的性质以及勾股定理等知识，观察图形，理解题意并作出辅助线，合理应用各个性质定理是解答关键.

23. 【综合与探究】已知 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 的两个实数根.

(1) 若 $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 7$ ，求 m 的值；

(2) 已知等腰 ABC 的一边长为 7，若 x_1, x_2 恰好是 ABC 的另外两边长，求这个三角形的周长.

【答案】(1) 3 (2) 17

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根的判别式，根与系数的关系，等腰三角形的定义，三角形三边关系等知识点，熟练掌握知识点的应用是解题的关键.

(1) 根据一元二次方程根的判别式，得到解 $m \geq 2$ ，根据已知等式可得 $x_1 x_2 - (x_1 + x_2) = 6$ ，再结合一元二次方程根与系数的关系求解即可；

(2) 根据题意，分 7 是方程的一个根和 $x_1 = x_2$ 两种情况进行讨论，结合三角形三边关系进行判断即可.

【小问 1 详解】

解： $\because x_1, x_2$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 的两个实数根，

$$\therefore \Delta = [-2(m+1)]^2 - 4(m^2 + 5) = 4m^2 + 8m + 4 - 4m^2 - 20 = 8m - 16 \geq 0,$$

解得 $m \geq 2$ ，

$$\because (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 7,$$

$$\therefore x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1 = x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = 7,$$

$$\therefore x_1 x_2 - (x_1 + x_2) = 6,$$

$$\because x_1 + x_2 = 2(m+1), \quad x_1 x_2 = m^2 + 5,$$

$$\therefore m^2 + 5 - 2(m+1) = 6,$$

$$\text{整理得: } m^2 - 2m - 3 = 0,$$

$$\text{解得: } m_1 = 3, \quad m_2 = -1,$$

$$\because m \geq 2,$$

$$\therefore m = 3;$$

【小问 2 详解】

解: $\because$ 等腰 ABC 的一边长为 7, x_1, x_2 恰好是 ABC 的另外两边长,

$$\therefore \textcircled{1} x_1 = 7 \text{ 或 } x_2 = 7, \text{ 即 } 7 \text{ 是方程的一个根,}$$

$$\text{将 } x = 7 \text{ 代入得: } 49 - 14(m+1) + m^2 + 5 = 0,$$

$$\text{解得: } m = 4 \text{ 或 } m = 10,$$

$$\text{当 } m = 4 \text{ 时, 得 } x^2 - 10x + 21 = 0, \text{ 方程的另一个根为 } 3,$$

此时三角形三边分别为 7、7、3, 周长为 17;

$$\text{当 } m = 10 \text{ 时, 得 } x^2 - 22x + 105 = 0, \text{ 方程的另一个根为 } 15,$$

三角形三边分别为 7、7、15,

$$\because 7 + 7 < 15,$$

$\therefore$ 此时不能构成三角形;

$$\textcircled{2} x_1 = x_2, \quad \Delta = 8m - 16 = 0, \text{ 解得 } m = 2,$$

$$\text{此时方程为 } x^2 - 6x + 9 = 0, \text{ 解得 } x_1 = x_2 = 3,$$

三角形三边分别为 7、3、3,

$$\because 3 + 3 < 7,$$

$\therefore$ 此时不能构成三角形;

综上, 三角形的周长为 17.

24. 今年新型“和谐号”高速列车正式投入沪宁线运行, 已知上海到南京全程约为 300 公里, 如果新型“和谐号”高速列车行驶的平均速度比原来“和谐号”动车行驶的平均速度每分钟快 2 公里, 那么从上海到南京比原来“和谐号”动车少用 40 分钟, 问新型“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要多少分钟?

【答案】60 分钟

【解析】

【分析】本题主要考查了分式方程的实际应用，设新型“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要 x 分钟，根据已知上海到南京全程约 300 公里，如果新型“和谐号”高速列车行驶的平均速度比原来的“和谐号”动车行驶的平均速度每分钟快 2 公里，那么从上海到南京比原来“和谐号”动车少用 40 分钟，可列方程求解。

【详解】解：设新型“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要 x 分钟，则原来“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要 $(x+40)$ 分钟，

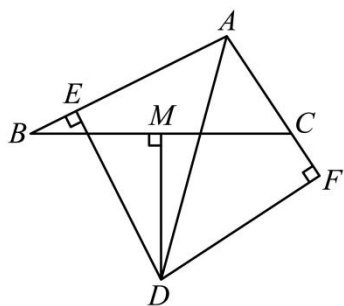
由题意得，
$$\frac{300}{x} - \frac{300}{x+40} = 2,$$

解得 $x = 60$ 或 $x = -100$ (舍去)，

经检验， $x = 60$ 是原方程的解，且符合题意，

答：新型“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要 60 分钟。

25. 如图， $\angle BAC$ 的平分线与 BC 的垂直平分线交于点 D ， $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，垂足分别是 E ， F 。



(1) 求证： $BE = CF$ ；

(2) 若在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 8$ ， $AC = 4$ ，求 BE 的长。

【答案】(1) 证明见解析

(2) 2

【解析】

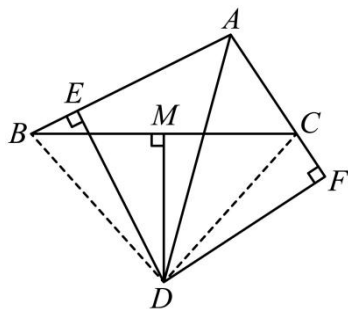
【分析】本题考查了全等三角形的性质与判定，熟练掌握全等三角形的性质与判定是解题的关键。

(1) 连接 CD ， BD ，根据 $\angle BAC$ 的平分线与 BC 的垂直平分线交于点 D ，得到 $BD = CD$ 和 $DE = DF$ ，进而得到 $Rt\triangle BDE$ 和 $Rt\triangle CDF$ 是全等三角形，根据全等三角形的性质，证得 $BE = CF$ 即可；

(2) 由题意证得 $Rt\triangle ADE$ 和 $Rt\triangle ADF$ 是全等三角形，根据全等三角形的性质，证得 $AE = AF$ ，进而证得 $BE = CF$ ，计算求解 BE 的值即可。

【小问 1 详解】

证明：如图，连接 CD ， BD ，



$\because$ 点 D 在 BC 的垂直平分线上

$$\therefore BD = CD$$

$\because DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ， AD 平分 $\angle BAC$

$$\therefore DE = DF, \angle BED = \angle DFC = 90^\circ$$

在 $Rt\triangle BDE$ 和 $Rt\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} BD = CD \\ DE = DE \end{cases}$$

$$\therefore Rt\triangle BDE \cong Rt\triangle CDF$$

$$\therefore BE = CF;$$

【小问 2 详解】

解：在 $Rt\triangle ADE$ 和 $Rt\triangle ADF$ 中，

$$\begin{cases} AD = AD \\ DE = DF \end{cases}$$

$$\therefore Rt\triangle ADE \cong Rt\triangle ADF$$

$$\therefore AE = AF$$

$$\therefore AB - BE = AC + CF$$

$$\therefore BE + CF = AB - AC = 8 - 4 = 4$$

$$\because BE = CF$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2} \times 4 = 2.$$

答： BE 的长为 2.

26. 【概念建构】

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，直线 MN 经过点 A ， $BD \perp MN$ 于点 D ， $CE \perp MN$ 于点 E 。如图 1，当直线 MN 在 $\triangle ABC$ 外部时，称 $Rt\triangle ABD$ 和 $Rt\triangle CAE$ 是 $Rt\triangle ABC$ 的“双外弦三角形”，如图 2，当直线 MN 在 $\triangle ABC$ 内部时，称 $Rt\triangle ABD$ 和 $Rt\triangle CAE$ 是 $Rt\triangle ABC$ 的“双内弦三角形”，依据全等的判

定定理，我们可以得到“双外弦三角形”和“双内弦三角形”都是全等三角形，即 $\text{Rt} \triangle ABD \cong \text{Rt} \triangle CAE$ 。

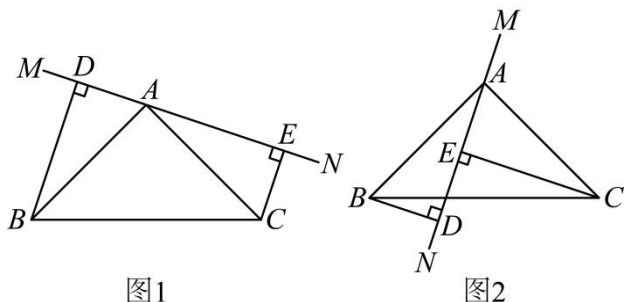


图1

图2

【概念应用】

(1) 如图3, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AM \perp BC$ 于点 M , $AM = BM = CM$, E 是 BC 边上的点, $AE = DE$, $AE \perp DE$, 连接 AD , BD , 若 $AE = 2\sqrt{5}$, $AM = 4$, 求 BD 的长.

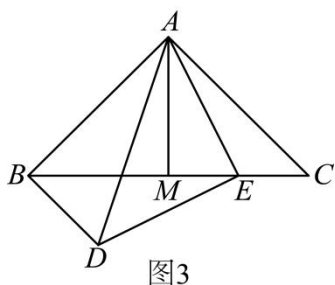


图3

小亮受到【概念建构】的启发, 想到解决方法: 过 D 点作 $DN \perp BC$ 于点 N 构造出如图4所示的“双内弦三角形”, 并应用“双内弦三角形”是全等三角形的结论求出了 BD . 请你依照小亮的解题思路, 写出解答过程.

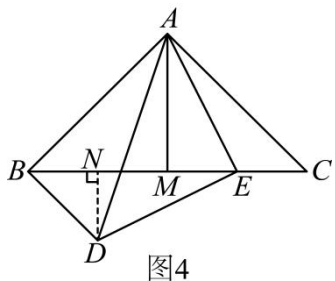


图4

(2) 如图5, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, D 是 AB 边上一点, $DE = DC$, $DE \perp DC$, DE 交 BC 于点 N , 延长 EB , CD 交于点 F , 直接写出 DE , DF , CN 之间的数量关系.

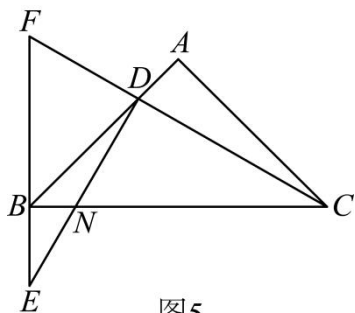


图5

【拓展延伸】

(3) 如图6, $AD \parallel BC$, $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 是等腰直角三角形, $\angle EAB = \angle FDC = 90^\circ$, $AD = 2$, $BC = 5$,

直接写出 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ADF$ 的面积和.

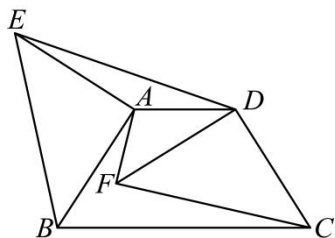


图6

【答案】(1) $2\sqrt{2}$; (2) $CN^2 = DF^2 + DE^2$; (3) 3

【解析】

【分析】本题主要考查全等三角形的性质和应用，勾股定理，熟练掌握全等三角形的判定和性质是解题的关键.

(1) 根据题意证明 $\triangle NDE \cong \triangle MEA$ (AAS)，根据全等三角形的性质得到 $AM = BM = CM = EN = 4$ ，再根据勾股定理进行计算即可；

(2) 连接 CE ，过点 E 作 $EQ \perp AB$ 交 AB 的延长线于点 Q ，证明 $\triangle FDE \cong \triangle NDC$ (AAS)，得到 $FE = NC$ ，再根据勾股定理即可得到结论；

(3) 过点 E 作 $EQ \perp AD$ 交 DA 的延长线于点 Q ，过点 F 作 $FG \perp AG$ 于点 G ，过点 A 作 $AK \perp BC$ 于点 K ，过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H ，求出 $BK + CH = 5 - 2 = 3$ ，证明 $\triangle AQE \cong \triangle AKB$ (AAS) 和

$\triangle DFG \cong \triangle DCH$ (AAS)，再由 $\frac{1}{2}AD \cdot EQ + \frac{1}{2}AD \cdot FG = \frac{1}{2}AD(BK + CH)$ 即可得到答案.

【详解】解：(1) 过 D 点作 $DN \perp BC$ 于点 N ， $AM \perp BC$ 于点 M ，

$$\therefore \angle AME = \angle DNE = 90^\circ,$$

$$\because AE \perp DE,$$

$$\therefore \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEN + \angle NDE = 90^\circ = \angle DEN + \angle AEM,$$

$$\therefore \angle NDE = \angle AEM,$$

$$\because AE = DE,$$

$$\therefore \triangle NDE \cong \triangle MEA \text{ (AAS)},$$

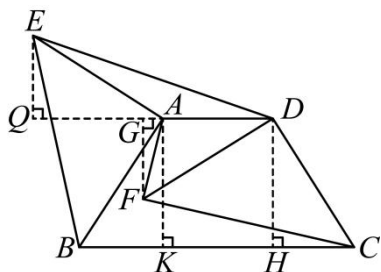
$$\therefore NE = AM, ND = ME,$$

$$\because AM = 4, AM = BM = CM,$$

$$\therefore AM = BM = CM = EN = 4,$$

$$\therefore CN^2 = DF^2 + DE^2;$$

(3) 过点 E 作 $EQ \perp AD$ 交 DA 的延长线于点 Q ，过点 F 作 $FG \perp AD$ 于点 G ，过点 A 作 $AK \perp BC$ 于点 K ，过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H ，



则 $AK \parallel DH$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore$ 由平行线间的距离处处相等可得： $KH = AD = 2$ ，

$\because BC = 5$ ，

$\therefore BK + CH = 5 - 2 = 3$ ，

$\because \triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 是等腰直角三角形， $\angle EAB = \angle FDC = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle AQE \cong \triangle AKB$ (AAS)，

$\therefore \triangle DFG \cong \triangle DCH$ (AAS)，

$\therefore EQ = BK, FG = CH$ ，

$\therefore \triangle ADE$ 和 $\triangle ADF$ 的面积和为： $\frac{1}{2} AD \cdot EQ + \frac{1}{2} AD \cdot FG = \frac{1}{2} AD (BK + CH) = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$ 。