

2025 学年度第一学期八年级数学学科期末考试试卷

(共 4 页 时间: 90 分钟)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每个小题只有一个正确选项)

1. 下列数中, $\frac{4}{13}$ 、 $\frac{\pi}{3}$ 、0.10100100010000、 $\sqrt[3]{-16}$ 、 $-\sqrt{25}$, 无理数的个数为 ()
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查无理数的识别, 解题的关键是掌握无理数的定义: 无限不循环小数. 据此逐个判断每个数即可. 也考查了有理数及算术平方根.

【详解】 解: $\frac{4}{13}$ 是分数, 属于有理数;

$\frac{\pi}{3}$ 是无理数;

0.10100100010000 是有限小数, 是有理数;

$\sqrt[3]{-16}$ 是无理数;

$-\sqrt{25} = -5$ 是整数, 属于有理数;

$\therefore$ 无理数有 2 个.

故选: B.

2. 下列各组二次根式中, 不是同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 与 $\sqrt{18}$

B. $\sqrt{7}$ 与 $\sqrt{28}$

C. $\frac{3}{\sqrt{3}}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{27}}$

D. $2\sqrt{\frac{1}{3}}$ 与 $\sqrt{\frac{2}{3}}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查同类二次根式的定义, 二次根式的化简, 判断二次根式是否为同类, 需化简为最简二次根式后比较被开方数是否相同, 据此判断各选项即可.

【详解】 解: 选项 A: $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, 被开方数均为 2, 是同类二次根式;

选项 B: $\sqrt{7}$ 已是最简根式, $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$, 被开方数均为 7, 是同类二次根式;

选项 C: $\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$, 被开方数均为 3, 是同类二次根式;

选项 D: $2\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 被开方数为 3; $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 被开方数为 6, 不是同类二次根式;

故选 D.

3. 下列关于 x 的方程中一定有实数解的是 ().

A. $x^2 - x + 1 = 0$

B. $\sqrt{2}x^2 - 2x + 1 = 0$

C. $x^2 - mx - 1 = 0$

D. $x^2 - x - m = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程根的情况, 熟记根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 是关键.

通过计算一元二次方程的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 判断是否有实数解, 若 $\Delta \geq 0$ 则有实数解.

【详解】解: $x^2 - x + 1 = 0$, $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$, $\therefore$ 该方程无实数解, 故 A 选项不符合题意;

$\sqrt{2}x^2 - 2x + 1 = 0$, $\Delta = (-2)^2 - 4 \times \sqrt{2} \times 1 = 4 - 4\sqrt{2}$, $\because \sqrt{2} > 1$, $\therefore 4 - 4\sqrt{2} < 0$, $\therefore$ 该方程无实数解, 故 B 选项不符合题意;

$x^2 - mx - 1 = 0$, $\Delta = m^2 - 4 \times 1 \times (-1) = m^2 + 4$, $\because m^2 \geq 0$, $\therefore m^2 + 4 \geq 4$, $\therefore$ 该方程有实数解, 故 C 选项符合题意;

$x^2 - x - m = 0$, $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 1 + 4m$, $\therefore 1 + 4m$ 的值随 m 变化, 可能小于 0, $\therefore$ 该方程不一定有实数解, 故 D 选项不符合题意;

故选 C.

4. 如果关于 x 的一元二次方程 $(a-c)x^2 - 2bx + (a+c) = 0$ 有两个相等的实数根, 其中 a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三边长, 那么 $\triangle ABC$ 的形状是 ()

A. 直角三角形

B. 等腰三角形

C. 等边三角形

D. 等腰直角三角形

【答案】A

【解析】

【详解】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(a-c)x^2-2bx+(a+c)=0$ 有两个相等的实数根,

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ a-c \neq 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} (-2b)^2 - 4(a-c)(a+c) = 0 \\ a \neq c \end{cases},$$

解得: $a^2=b^2+c^2$ 且 $a \neq c$.

又 $\because a, b, c$ 是 $\triangle ABC$ 的三边长,

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

故选 A.

5. 下列说法中, 正确的是 ()

A. 有理数与无理数的积是无理数

B. $-a$ 没有平方根

C. 数轴上的每个点都有一个有理数与之对应

D. 一个数的立方根与平方根相等, 那么这个数只能是 0

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查平方根, 立方根的性质, 数轴, 有理数与无理数的积, 根据相关知识逐一判断即可.

【详解】解: 选项 A, 有理数 0 与无理数的积为 0, 是有理数, 不符合题意;

选项 B, 若 $a < 0$, 则 $-a > 0$, 有平方根, 不符合题意;

选项 C, 数轴上存在无理数点, 不与有理数对应, 不符合题意;

选项 D, 若 $x > 0$, 平方根有两个值, 立方根只有一个值, 不可能相等; 若 $x < 0$, 平方根不存在, 立方根存在; 只有 $x = 0$ 时, 平方根和立方根均为 0, 符合题意;

故选 D.

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=10, AC=2\sqrt{10}, BC$ 边上的高 $AD=6$, 那么另一边 BC 的长为多少 ()

A. 10

B. 8

C. 6 或 10

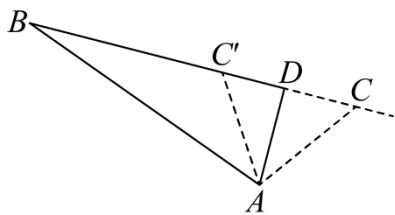
D. 8 或 10

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查勾股定理, 根据勾股定理, 在 $Rt\triangle ABD$ 和 $Rt\triangle ADC$ 中分别求出 BD 和 CD 的长度, 然后根据垂足 D 的位置分类讨论, 求解即可.

【详解】解: 如图,



$\because AD$ 是 BC 边上的高, $AD = 6$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AB = 10$, $AD = 6$,

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $AC = 2\sqrt{10}$, $AD = 6$,

$$\therefore CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{40 - 36} = \sqrt{4} = 2$$

情况 1: 当垂足 D 在线段 BC 上时,

$$BC = BD + DC = 8 + 2 = 10,$$

情况 2: 当垂足 D 在 BC 延长线上时,

$$BC = BD - DC = 8 - 2 = 6,$$

$\therefore BC$ 的长为 10 或 6.

故选 C.

二、填空题 (本大题共 12 小题)

7. $\sqrt{16}$ 的平方根是_____.

【答案】 ± 2

【解析】

【详解】解: $\because \sqrt{16} = 4$

$\therefore \sqrt{16}$ 的平方根是 ± 2 .

故答案为 ± 2 .

8. 比较大小: $-3\sqrt{2}$ _____ $-2\sqrt{3}$ (填“ $>$ ”或“ $<$ ”或“ $=$ ”).

【答案】 $<$

【解析】

【详解】解: $\because -3\sqrt{2} = -\sqrt{18}$, $-2\sqrt{3} = -\sqrt{12}$, 且 $18 > 12$,

$\therefore \sqrt{18} > \sqrt{12}$,

$$\therefore -\sqrt{18} < -\sqrt{12},$$

$$\therefore -3\sqrt{2} < -2\sqrt{3}.$$

故答案为：<

9. 某种细菌的直径是 0.00000078m，用科学记数法表示为：_____.

【答案】 7.8×10^{-7} m

【解析】

【分析】 利用科学记数法将数表示为 $a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10$) 即可.

【详解】 解： $0.00000078 = 7.8 \times 10^{-7}$.

故答案为： 7.8×10^{-7} m.

【点睛】 本题主要考查了科学记数法表示较小的数，熟练掌握科学记数法表示较小的数的方法进行求解是解决本题关键.

10. 当 x _____ 时， $\sqrt{x-2}$ 有意义.

【答案】 ≥ 2

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式有意义的条件，直接利用二次根式有意义的条件列不等式求解即可.

【详解】 解： $\because \sqrt{x-2}$ 有意义，

$$\therefore x-2 \geq 0,$$

解得， $x \geq 2$,

故答案为： ≥ 2 .

11. 在实数范围内因式分解： $2x^2 - 4x - 1 =$ _____.

【答案】 $2 \left(x - \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right) \left(x - \frac{2-\sqrt{6}}{2}\right)$

【解析】

【分析】 令原式为 0 求出 x 的值，即可确定出因式分解的结果.

【详解】 解： 令 $2x^2 - 4x - 1 = 0$,

这里 $a=2$, $b=-4$, $c=-1$,

$$\therefore \Delta = 16+8 = 24,$$

$$\therefore x = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2},$$

$$\text{则原式} = 2 \left(x - \frac{2 + \sqrt{6}}{2} \right) \left(x - \frac{2 - \sqrt{6}}{2} \right).$$

$$\text{故答案为 } 2 \left(x - \frac{2 + \sqrt{6}}{2} \right) \left(x - \frac{2 - \sqrt{6}}{2} \right).$$

【点睛】此题考查了实数范围内分解因式，熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键.

12. 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 3mx + x + 2m - 1 = 0$ 的根的判别式的值为 1，那么 m 的值为_____.

【答案】2

【解析】

【分析】本题考查了根的判别式、一元二次方程的定义以及因式分解法解一元二次方程，利用二次项系数非零及根的判别式为 1，找出 m 的值是解题的关键. 由二次项系数非零可得出 $m \neq 0$ ，由根的判别式 $\Delta = 1$ 可得出关于 m 的方程，解之即可得出 m 的值.

【详解】解：∵ 方程 $mx^2 - 3mx + x + 2m - 1 = 0$ 为一元二次方程，

$$\therefore m \neq 0$$

∵ 方程 $mx^2 - 3mx + x + 2m - 1 = 0$ 的根的判别式的值为 1，

$$\therefore \Delta = (-3m + 1)^2 - 4 \times m \times (2m - 1) = 1,$$

$$\therefore 9m^2 - 6m + 1 - 8m^2 + 4m = 1,$$

$$\therefore m^2 - 2m = 0,$$

解得： $m_1 = 0$ (不合题意，舍去)， $m_2 = 2$.

故答案为：2.

13. 快过元旦了，全班同学每两人互发一条祝福短信，共发了 380 条，设全班有 x 名同学，则可列方程为_____.

【答案】 $x(x-1) = 380$

【解析】

【分析】因为每两人互发一条祝福短信，则每个人都要发 $(x-1)$ 条，据此列出方程即可.

【详解】解：设全班有 x 名同学，

$$\text{由题意得 } x(x-1) = 380,$$

故答案为: $x(x-1)=380$.

【点睛】 本题主要考查了从实际问题中抽象出一元二次方程, 正确理解题意找到等量关系进而列出方程是解题的关键.

14. 实数 m 、 n 分别满足 $m^2 - 3m - 2 = 0$, $n^2 - 3n - 2 = 0$ 且 $m \neq n$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的值是_____.

【答案】 $-\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程根与系数的关系, 由题意得 m 和 n 是方程 $x^2 - 3x - 2 = 0$ 的两个不相等的实数根, 根据根与系数的关系, 求出 $m+n$ 和 mn 的值, 再代入 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的表达式求解即可.

【详解】 解: $\because m$ 和 n 满足方程 $m^2 - 3m - 2 = 0$ 和 $n^2 - 3n - 2 = 0$, 且 $m \neq n$,

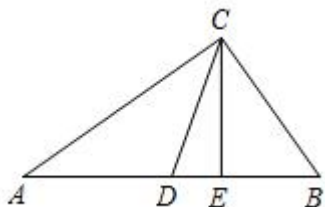
$\therefore m$ 和 n 是方程 $x^2 - 3x - 2 = 0$ 的两个实数根,

根据根与系数的关系, 得 $m+n=3$, $mn=-2$,

$$\therefore \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{mn} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2},$$

故答案为: $-\frac{3}{2}$.

15. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $\angle A=35^\circ$, D 为 AB 边上的中点, $CE \perp AB$, 那么 $\angle DCE=$ _____.



【答案】 20°

【解析】

【分析】 根据直角三角形的性质得 $CD = \frac{1}{2}AB = AD$, 则 $\angle ACD = \angle A = 35^\circ$, 从而根据外角的性质可得 $\angle CDE = \angle ACD + \angle A = 70^\circ$, 在 $Rt\triangle CDE$ 中, $\angle DCE = 90^\circ - \angle CDE$ 求解即可.

【详解】 $\because$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D 为 AB 边上的中点

$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = AD$ (直角三角形中, 斜边上的中线等于斜边的一半)

$\therefore \angle ACD = \angle A = 35^\circ$ (等边对等角)

$\therefore \angle CDE = \angle ACD + \angle A = 70^\circ$

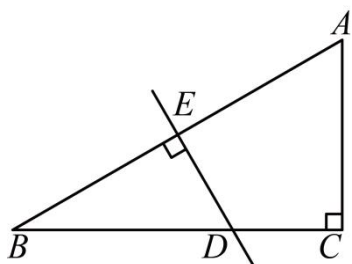
又 $\because CE \perp AB$

$\therefore \triangle CDE$ 是直角三角形

$\therefore \angle DCE = 90^\circ - \angle CDE = 20^\circ$.

【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质、直角三角形的性质.直角三角形的性质主要有：(1) 在直角三角形中，两锐角互余；(2) 直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半；(3) 直角三角形中， 30° 所对的直角边等于斜边的一半；(4) 勾股定理；这些性质都是常考点，需熟记.

16. 已知：如下图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， AB 的垂直平分线交 BC 于 D ，垂足为 E ， $BD = 4\text{cm}$ ，则 $DC =$ _____ cm .



【答案】 2；

【解析】

【分析】 根据线段垂直平分线性质的 $\angle B = \angle DAE = 30^\circ$ ，根据直角三角形性质得 $DC = \frac{1}{2} AD$.

【详解】 连接 AD ,

因为 AB 的垂直平分 BC

所以 $BD = AD = 4\text{cm}$

所以 $\angle B = \angle DAE = 30^\circ$

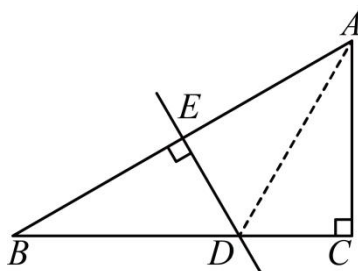
因为 $\angle C = 90^\circ$

所以 $\angle BAC = 60^\circ$

所以 $\angle DAC = \angle BAC - \angle DAE = 30^\circ$

所以 $DC = \frac{1}{2} AD = 2$

故答案为： 2



【点睛】 此题主要考查线段的垂直平分线的性质等几何知识. 线段的垂直平

分线上的点到线段的两个端点的距离相等.

17. 有一个边长为1的大正方形, 经过1次“生长”后, 在它的左右肩上生出两个小正方形, 其中三个正方形围成的三角形是直角三角形, 再经过1次“生长”后, 形成的图形如图(1)所示. 如果继续“生长”下去, 它将变得“枝繁叶茂”, 如图(2)所示. 若“生长”了2026次后, 形成的图形中所有的正方形的面积之和是_____.

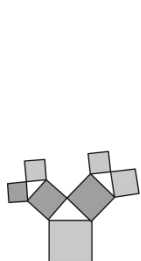


图1

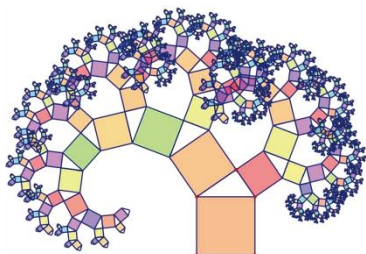


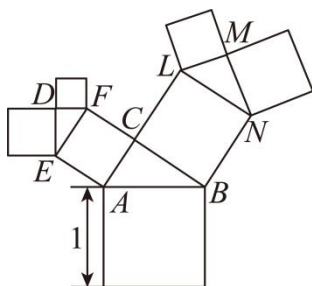
图2

【答案】 2027

【解析】

【分析】 本题考查规律型: 图形的变化类, 勾股定理, 根据勾股定理得出规律经过 n 次“生长”后形成的图形中所有正方形的面积和是 $n+1$, 即可得解. 正确得出规律是解题的关键.

【详解】 解: 根据题意, 边长为1的大正方形经过2次“生长”后, 形成图形如图,



“生长”1次, “生长”出的两个正方形, 三个正方形围成 $\text{Rt}\triangle ABC$, 三个正方形面积和为:

$$AC^2 + BC^2 + AB^2 = AB^2 + AB^2 = 2AB^2 = 2 \times 1^2 = 2;$$

“生长”2次, 又“生长”出四个正方形, 所有的正方形围成的直角三角形有 $\text{Rt}\triangle ABC$ 、 $\text{Rt}\triangle DEF$ 、 $\text{Rt}\triangle LMN$, 则这四个正方形面积和等于第一次“生长”出的两个正方形的面积, 即

$$DE^2 + DF^2 + EF^2 = EF^2 + EF^2 = 2EF^2 = 2AC^2, LM^2 + MN^2 + LN^2 = LN^2 + LN^2 = 2LN^2 = 2BC^2,$$

$\therefore$ 所有正方形的面积之和为:

$$DE^2 + DF^2 + EF^2 + LM^2 + MN^2 + LN^2 + AB^2 = 2(AC^2 + BC^2) + AB^2 = 3 \times 1^2 = 3; \quad \text{“生长”3次,}$$

“生长”出的四个正方形面积和等于第二次“生长”出的两个正方形的面积, 所有正方形的面积之和为:

$$3 + 1 = 4;$$

.....

经过 n 次“生长”后形成的图形中所有正方形的面积和是 $n+1$,

$\therefore$ “生长”了 2026 次后形成的图形中所有正方形的面积之和为: $2026+1=2027$.

故答案为: 2027.

18. 已知, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=\sqrt{3}$, $\angle C=22.5^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 翻折使得点 A 与点 C 重合, 折痕与边 BC 交于点 D, 如 $DC=2$, 那么 BD 的长为_____.

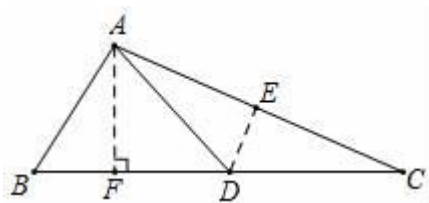
【答案】 $\sqrt{2}+1$ 或 $\sqrt{2}-1$.

【解析】

【分析】过 A 作 $AF \perp BC$ 于 F, 构造直角三角形, 分两种情况讨论, 利用勾股定理以及等腰直角三角形的性质, 即可得到 BD 的长.

【详解】分两种情况:

①当 $\angle B$ 为锐角时, 如图所示, 过 A 作 $AF \perp BC$ 于 F,



由折叠可得, 折痕 DE 垂直平分 AC,

$$\therefore AD=CD=2,$$

$$\therefore \angle ADB=2\angle C=45^\circ,$$

$\therefore \triangle ADF$ 是等腰直角三角形,

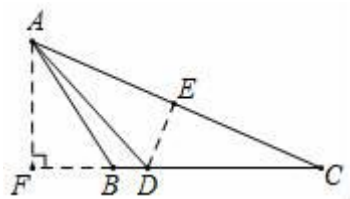
$$\therefore AF=DF=\sqrt{2},$$

$$\text{又} \because AB=\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABF \text{ 中, } BF=\sqrt{AB^2-AF^2}=1,$$

$$\therefore BD=BF+DF=1+\sqrt{2};$$

②当 $\angle ABC$ 为钝角时, 如图所示, 过 A 作 $AF \perp BC$ 于 F,



同理可得, $\triangle ADF$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AF=DF=\sqrt{2},$$

$$\text{又} \because AB=\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABF \text{ 中, } BF=\sqrt{AB^2-AF^2}=1,$$

$$\therefore BD=DF-BF=\sqrt{2}-1;$$

故答案为 $\sqrt{2}+1$ 或 $\sqrt{2}-1$.

【点睛】本题主要考查了折叠问题以及勾股定理的运用，解决问题的关键是分两种情况画出图形进行求解。解题时注意：折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等。

三、简答题（本大题共 6 小题）

19. 计算: $\frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{27} - \sqrt{\frac{1}{2}} + (\sqrt{48} - \sqrt{24}) \div \sqrt{6}.$

【答案】 $4\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】先把前三项化为最简二次根式，第四项用二次根式的除法法则计算，然后合并即可。

【详解】原式 $= 2 + \sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{48 \div 6} - \sqrt{24 \div 6} = 2 + \sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} - 2 = 4\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{2}}{2}.$

【点睛】本题考查了二次根式的计算：先把各二次根式化为最简二次根式，再进行二次根式的乘除运算，然后合并同类二次根式。

20. 解方程: $2(2x-1)^2 - 4 = -x(x+11).$

【答案】 $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -\frac{2}{3}.$

【解析】

【分析】本题考查因式分解法解一元二次方程，先去括号，移项，合并同类项，再用因式分解法解方程即可。

【详解】解: $2(2x-1)^2 - 4 = -x(x+11)$

$$2(4x^2 - 4x + 1) - 4 = -x^2 - 11x$$

$$8x^2 - 8x + 2 - 4 = -x^2 - 11x$$

$$8x^2 + x^2 - 8x + 11x + 2 - 4 = 0$$

$$9x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$(3x-1)(3x+2) = 0$$

$$\text{即 } 3x-1=0$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{1}{3},$$

$$3x+2=0$$

$$\text{解得 } x_2 = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{原方程的解为 } x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -\frac{2}{3}.$$

$$21. \text{ 解不等式: } \sqrt{3}x - 6 < \sqrt{5}x + 2.$$

$$\text{【答案】 } x > -4(\sqrt{3} + \sqrt{5})$$

【解析】

【分析】 本题考查解不等式，二次根式的化简，掌握解不等式的方法是解题的关键，根据不等式的性质解不等式，再将二次根式化简即可.

$$\text{【详解】 解: } \sqrt{3}x - 6 < \sqrt{5}x + 2$$

$$\sqrt{3}x - \sqrt{5}x < 2 + 6$$

$$(\sqrt{3} - \sqrt{5})x < 8$$

$$\because \sqrt{3} - \sqrt{5} < 0,$$

$$\therefore x > \frac{8}{\sqrt{3} - \sqrt{5}},$$

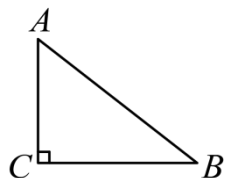
$$\because \frac{8}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{8(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5})} = \frac{8(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{3 - 5} = \frac{8(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{-2} = -4(\sqrt{3} + \sqrt{5}),$$

$$\therefore x > -4(\sqrt{3} + \sqrt{5}).$$

22. 如图所示, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=6$, $AB=10$. 点 D 在边 AC 上, 且点 D 到边 AB 和边 BC 的距离相等.

(1) 用直尺圆规作出点 D (不写作法, 保留作图痕迹, 在图上标注清楚点 D);

(2) 求点 D 到边 AB 的距离.



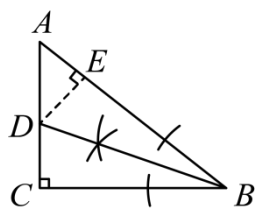
【答案】 (1) 详见解析; (2) $\frac{8}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 作 $\angle ABC$ 的角平分线交 AC 于 D , 则根据角平分线的性质可判断点 D 到边 AB 和边 BC 的距离相等;

(2) 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E , 如图, 利用勾股定理计算出 $BC=8$, 设 $DE=x$, 则 $DC=x$, 利用 $S_{\triangle ADB} + S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ABC}$ 得到 $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot x = \frac{1}{2} \times 6 \times 8$, 然后解方程求出 x 即可.

【详解】 解: (1) 如图, 点 D 就是所要求作的点;



(2) 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E , 如图,

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $BC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$,

设 $DE=x$, 则 $DC=x$,

$$\because S_{\triangle ADB} + S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot x = \frac{1}{2} \times 6 \times 8$$

$$\therefore x = \frac{8}{3},$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 到边 } AB \text{ 的距离为 } \frac{8}{3}.$$

【点睛】 本题考查了作图—基本作图: 熟练掌握基本作图 (作一条线段等于已知线段; 作一个角等于已知角; 作已知线段的垂直平分线; 作已知角的角平分线; 过一点作已知直线的垂线). 也考查了角平分线的性质.

23. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m-1)x - 3m^2 + m = 0$

(1) 求证: 无论 m 为何值, 方程总有实数根;

(2) 若 x_1, x_2 是方程的两个实数根, 且 $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = -\frac{5}{2}$, 求 m 的值.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{2}{5}$ 或 1.

【解析】

【分析】(1) 根据一元二次方程根的情况与判别式的关系, 只要判定 $\Delta \geq 0$ 即可得到答案;

(2) 根据一元二次方程根与系数的关系得到 $x_1 + x_2 = 2m-1$, $x_1x_2 = -3m^2 + m$, 整体代入得到 $m^2 + 2m - 3 = 0$ 求解即可得到答案.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m-1)x - 3m^2 + m = 0$,

$$\therefore a = 1, b = -(2m-1), c = -3m^2 + m,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = [-(2m-1)]^2 - 4 \times 1 \times (-3m^2 + m) = (4m-1)^2,$$

$$\therefore (4m-1)^2 \geq 0, \text{ 即 } \Delta \geq 0,$$

$\therefore$ 不论 m 为何值, 方程总有实数根;

【小问 2 详解】

解: $\because x_1, x_2$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m-1)x - 3m^2 + m = 0$ 的两个实数根,

$$\therefore x_1 + x_2 = 2m-1, x_1x_2 = -3m^2 + m,$$

$$\therefore \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = -\frac{5}{2},$$

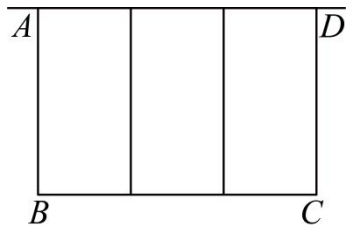
$$\therefore \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1x_2} = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{(2m-1)^2}{-3m^2 + m} = -\frac{1}{2}, \text{ 整理, 得 } 5m^2 - 7m + 2 = 0, \text{ 解得 } m_1 = \frac{2}{5}, m_2 = 1,$$

$\therefore m$ 的值为 $\frac{2}{5}$ 或 1.

【点睛】 本题考查一元二次方程根的情况与判别式关系，一元二次方程根与系数的关系，熟记一元二次方程判别式与方程根的情况联系、一元二次方程根与系数的关系是解决问题的关键.

24. 如图是一排形状相同、大小相等的3个长方形猪圈，总面积为20平方米，一面靠墙（墙长 a 米），其它各边用总长为24米的木栅栏围成.



(1) 若 $a = 24$ ，则 AB 和 BC 各为多少米？

(2) 若 $a = 8$ ，则 AB 和 BC 各为多少米？

【答案】 (1) 1米和20米或5米和4米

(2) 5米和4米

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的应用，不等式的应用，

(1) 设 AB 的长度为 x 米，则猪圈的另一边 BC 的长表示为 $(24 - 4x)$ 米，再根据“总面积为20平方米”得到关于 x 的一元二次方程，求解后结合题意确定 x 的值后可得答案；

(2) 根据题意列出方程，求解后结合题意确定 x 的值后可得答案；

正确理解题意，列出方程和不等式是解题的关键.

【小问1详解】

解： 设 AB 的长度为 x 米，则猪圈的另一边 BC 的长表示为 $(24 - 4x)$ 米，

依题意，得： $x(24 - 4x) = 20$ ，

解得： $x = 1$ 或 $x = 5$ ，

$\because$ 长方形猪圈一面靠墙（墙长 a 米），

$\therefore 24 - 4x \leq a$ ，

当 $a = 24$ 时，得： $24 - 4x \leq 24$ ，

$\therefore x \geq 0$ ，

当 $AB = 1$ 时， $BC = 24 - 4 \times 1 = 20$ （米）；

当 $AB = 5$ 时， $BC = 24 - 4 \times 5 = 4$ （米）；

$\therefore AB$ 和 BC 各为1米和20米或5米和4米；

【小问2详解】

解：设 AB 的长度为 x 米，则猪圈的另一边 BC 的长表示为 $(24-4x)$ 米，

依题意，得： $x(24-4x) = 20$ ，

解得： $x = 1$ 或 $x = 5$ ，

$\because$ 长方形猪圈一面靠墙（墙长 a 米），

$\therefore 24-4x \leq a$ ，

当 $a = 8$ 时，得： $24-4x \leq 8$ ，

$\therefore x \geq 4$ ，

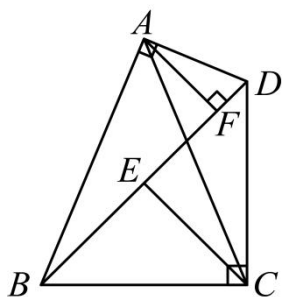
$\therefore x = 5$ ，

此时 $AB = 5$ ， $BC = 24-4 \times 5 = 4$ （米），

$\therefore AB$ 和 BC 各为 5 米和 4 米.

四、解答题（本大题共 2 小题）

25. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ ， AC 平分 $\angle BAD$ ，点 E 是 BD 中点， $AF \perp BD$ ，垂足为点 F 。求证：



(1) $\angle ABF = \angle DAF$ ；

(2) $CB = CD$.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 由垂直的定义得到 $\angle AFD = \angle BAD = 90^\circ$ ，再由三角形内角和定理得到 $\angle ABF + \angle ADB = 90^\circ = \angle DAF + \angle ADF$ ，则 $\angle ABF = \angle DAF$ ；

(2) 如图所示，连接 AE ，根据直角三角形的性质得到 $AE = CE = BE = \frac{1}{2}BD$ ，则

$\angle EAB = \angle EBA = \angle DAF$ ， $\angle EAC = \angle ECA$ ，再由角平分线的定义证明 $\angle EAC = \angle FAC = \angle ECA$ ，推出 $AF \parallel CE$ ，即可证明 CE 垂直平分 BD ，则 $BC = CD$.

【小问 1 详解】

证明: $\because AF \perp BD$,

$$\therefore \angle AFD = \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF + \angle ADB = 90^\circ = \angle DAF + \angle ADF,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle DAF;$$

【小问 2 详解】

证明: 如图所示, 连接 AE ,

$$\because \angle BAD = \angle BCD = 90^\circ, E \text{ 是 } BD \text{ 中点},$$

$$\therefore AE = CE = BE = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle EBA = \angle DAF, \angle EAC = \angle ECA,$$

$$\because AC \text{ 平分 } \angle BAD,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DAC,$$

$$\therefore \angle EAB + \angle EAC = \angle DAF + \angle FAC,$$

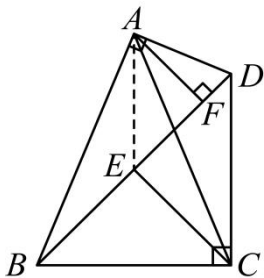
$$\therefore \angle EAC = \angle FAC = \angle ECA,$$

$$\therefore AF \parallel CE,$$

$$\therefore CE \perp BD,$$

$$\therefore CE \text{ 垂直平分 } BD,$$

$$\therefore BC = CD.$$



【点睛】 本题主要考查了等腰三角形的性质与判定, 直角三角形的性质, 角平分线的定义, 三角形内角和定理, 相等垂直平分线的性质与判定等等, 熟知直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半是解题的关键.

26. 已知 $\angle AOB = 90^\circ$, OM 是 $\angle AOB$ 的平分线, 按以下要求解答问题:

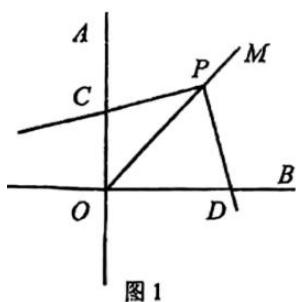


图 1

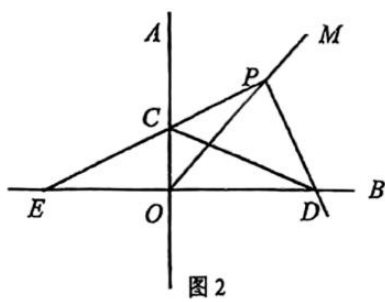


图 2

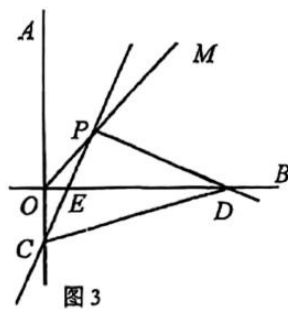


图 3

(1) 如图 1, 将三角板的直角顶点 P 在射线 OM 上移动并绕着 P 点旋转, 两直角边分别与边 OA 、 OB 交于点 C 、 D , 求证: $PC = PD$.

(2) 将三角形的直角顶点 P 在射线 OM 上移动, 一直角边与边 OB 交于点 D , $OD = 1$,

①如图 2, 若另一直角边所在的直线与边 OA 交于点 C , 与 BO 的延长线交于点 E , 使 $\angle PDE = \angle OCD$, 求出此时 OP 的长.

②如图 3, 若另一直角边所在的直线与 AO 的延长线交于点 C 、与 OB 边交于点 E , 使 $\angle PED = \angle OCD$, 直接写出此时 OP 的长.

【答案】(1) 证明见解析

(2) ①1; ② $\sqrt{2}-1$

【解析】

【分析】(1) 如图, 过点 P 作 $PH \perp OA$ 于点 H , 作 $PN \perp OB$ 于点 N , 根据角平分线的性质得 $PH = PN$, 证明 $\triangle PCH \cong \triangle PDN$ (ASA), 即可得证;

(2) ①设 OP 交 CD 于点 G , 推出 $\angle PED = \angle CDO$, 继而得到 $CE = CD$, 再根据直角三角形斜边中线的性质可得答案;

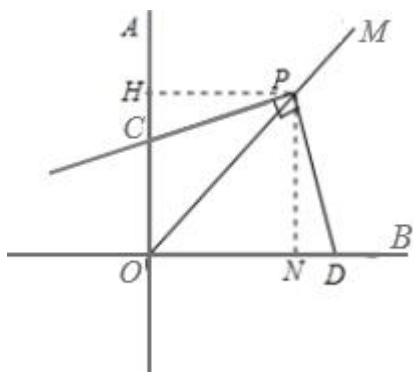
②如图, 过点 P 作 $PH \perp OA$ 于点 H , 作 $PN \perp OB$ 于点 N , 根据角平分线的性质得 $PH = PN$, 结合等腰三角形判定推出 $OH = PH = PN = ON$, 证明 $\triangle PCH \cong \triangle PDN$ (AAS) 得 $HC = ND$, $PC = PD$, 进一

步推出 $OP = OC$, 设 $OP = x$, 利用勾股定理推出 $HC = DN = OD - ON = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x$,

$HC = HO + OC = \frac{\sqrt{2}}{2}x + x$, 最后得到关于 x 的方程, 求解即可.

【小问 1 详解】

证明: 如图, 过点 P 作 $PH \perp OA$ 于点 H , 作 $PN \perp OB$ 于点 N ,



$$\therefore \angle PHC = 90^\circ = \angle PNO = \angle PND,$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HPN = 360^\circ - \angle PHC - \angle AOB - \angle PNO = 90^\circ, \quad \angle CPN + \angle NPD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HPC + \angle CPN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HPC = \angle NPD,$$

$$\therefore OM \text{ 是 } \angle AOB \text{ 的平分线, } PH \perp OA, \quad PN \perp OB,$$

$$\therefore PH = PN,$$

在 $\triangle PCH$ 和 $\triangle PDN$ 中,

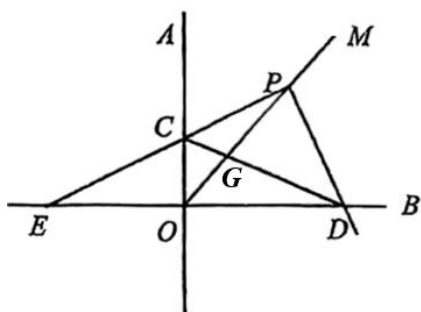
$$\begin{cases} \angle PHC = \angle PND \\ PH = PN \\ \angle HPC = \angle NPD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle PCH \cong \triangle PDN (\text{ASA}),$$

$$\therefore PC = PD;$$

【小问 2 详解】

解: ①设 OP 交 CD 于点 G ,



$$\therefore \text{点 } P \text{ 是三角板的直角顶点, } \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EPD = 90^\circ = \angle AOB, \quad CO \perp ED,$$

$$\therefore \angle PDE = \angle OCD, \quad OD = 1,$$

$$\therefore \angle PED = 90^\circ - \angle PDE = 90^\circ - \angle OCD = \angle CDO,$$

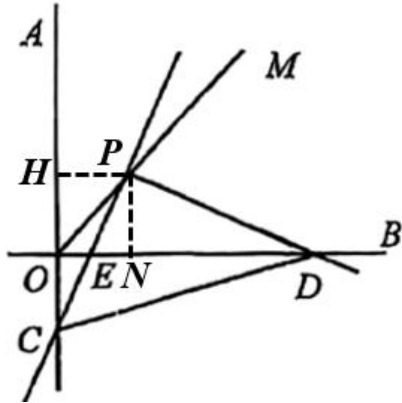
$$\therefore CE = CD,$$

$$\therefore OE = OD = 1, \text{ 即点 } O \text{ 是 } ED \text{ 的中点,}$$

$$\therefore OP = \frac{1}{2}ED = OD = 1,$$

此时 OP 的长为1;

②如图, 过点 P 作 $PH \perp OA$ 于点 H , 作 $PN \perp OB$ 于点 N ,



$$\because \text{点 } P \text{ 是三角板的直角顶点, } \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EPD = 90^\circ = \angle COD,$$

$$\because \angle PED = \angle OCD,$$

$$\therefore \angle PDE = 90^\circ - \angle PED = 90^\circ - \angle OCD = \angle ODC,$$

$$\because \angle OEC = \angle PED,$$

$$\therefore \angle PDE = \angle HCP,$$

$$\because OM \text{ 是 } \angle AOB \text{ 的平分线, } PH \perp OA, PN \perp OB,$$

$$\therefore PH = PN, \angle PHC = 90^\circ = \angle PND = \angle PNO, \angle POH = \angle PON = \frac{1}{2} \angle AOB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle OPH = 90^\circ - \angle POH = 45^\circ = \angle POH, \angle OPN = 90^\circ - \angle PON = 45^\circ = \angle PON,$$

$$\therefore OH = PH = PN = ON,$$

在 $\triangle PCH$ 和 $\triangle PDN$ 中,

$$\begin{cases} \angle PHC = \angle PND \\ \angle HCP = \angle NDP, \\ PH = PN \end{cases}$$

$$\therefore \triangle PCH \cong \triangle PDN (\text{AAS}),$$

$$\therefore HC = ND, PC = PD,$$

$$\therefore \angle PDC = \angle PCD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle PCH = \angle PDO = \angle ODC = \frac{1}{2} \angle PDC = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle OPC = \angle POH - \angle OCP = 45^\circ - 22.5^\circ = 22.5^\circ = \angle OCP,$$

$$\therefore OP = OC, \text{ 设 } OP = x,$$

$$\therefore x = OP = \sqrt{PH^2 + OH^2} = \sqrt{OH^2 + OH^2} = \sqrt{2}OH,$$

$$\therefore ON = OH = \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$\therefore HC = DN = OD - ON = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$\therefore HC = HO + OC = \frac{\sqrt{2}}{2}x + x,$$

$$\therefore 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x = \frac{\sqrt{2}}{2}x + x,$$

$$\therefore x = \sqrt{2} - 1,$$

$$\text{即 } OP = \sqrt{2} - 1,$$

此时 OP 的长为 $\sqrt{2} - 1$.

【点睛】 本题考查全等三角形的判定与性质，角平分线的性质，等腰三角形的判定与性质，直角三角形的斜边上中线的性质，勾股定理等知识点，通过作辅助线构造全等三角形是解题的关键.