

2025 学年第一学期 期末学习反馈

八年级 数学学科

(时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

1. 下列二次根式中, 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{\frac{3}{2}}$

B. $\sqrt{27}$

C. $\sqrt{0.5}$

D. $\sqrt{8}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 此题考查同类二次根式的概念, 属于基础题, 注意掌握同类二次根式是指: 二次根式是化为最简二次根式后, 被开方数相同的二次根式.

将选项中的二次根式化为最简, 然后根据同类二次根式的被开方数相同可得出答案.

【详解】 解: A、 $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 与 $\sqrt{3}$ 的被开方数不同, 不是同类二次根式, 故本选项不符合;

B、 $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, 与 $\sqrt{3}$ 的被开方数相同, 是同类二次根式, 故本选项符合;

C、 $\sqrt{0.5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 与 $\sqrt{3}$ 的被开方数不同, 不是同类二次根式, 故本选项不符合;

D、 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, 与 $\sqrt{3}$ 的被开方数不同, 不是同类二次根式, 故本选项不符合;

故选: B.

2. 在下列关于 x 的一元二次方程中, 一定有两个不相等的实数根的是 ()

A. $x^2 - 3x - 1 = 0$

B. $3x^2 - x + 1 = 0$

C. $x^2 + 3 = 0$

D. $x^2 - 4x + 4 = 0$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式. 用根的判别式判断即可, 若方程有两个不相等的实数根, 则需 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

【详解】 解: A、 $x^2 - 3x - 1 = 0$,

$$\therefore \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 13 > 0,$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根，本选项符合题意；

B、 $3x^2 - x + 1 = 0$,

$$\therefore \Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 1 = -11 < 0,$$

$\therefore$ 方程无实数根，本选项不符合题意；

C、 $x^2 + 3 = 0$,

$$\therefore \Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 3 = -12 < 0,$$

$\therefore$ 方程无实数根，本选项不符合题意；

D、 $x^2 - 4x + 4 = 0$,

$$\therefore \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0,$$

$\therefore$ 方程实有两个相等的实数根，本选项不符合题意；

故选：A.

3. 二次根式 $\sqrt{m}-1$ 的一个有理化因式是 ()

A. $\sqrt{m+1}$

B. $\sqrt{m}+1$

C. $\sqrt{m}-1$

D. $\sqrt{m-1}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据有理化因式的定义判断即可.

【详解】 $\because \sqrt{m}-1 \times \sqrt{m}+1 = m-1$

$\therefore$ 二次根式 $\sqrt{m}-1$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{m}+1$

故选 B.

【点睛】本题主要考查了二次根式的有理化因式的概念，熟练利用定义得出是解题关键.

4. 关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2 - 2ax + a - 1 = 0$ 有实数根，那么 a 的取值范围是 ()

A. $a \geq \frac{1}{2}$

B. $a \geq \frac{1}{2}$ 且 $a \neq 1$

C. $a \leq \frac{1}{2}$

D. $a = 1$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的定义及根的判别式的应用. 关键在于：一元二次方程要求二次项系数不

为0；方程有实数根时，判别式 $\Delta \geq 0$ ．需同时满足这两个条件来确定 a 的取值范围．

【详解】解： $\because$ 方程 $(a-1)x^2 - 2ax + a - 1 = 0$ 是一元二次方程，

$\therefore a-1 \neq 0$ ，即 $a \neq 1$ ．

又 $\because$ 方程有实数根，

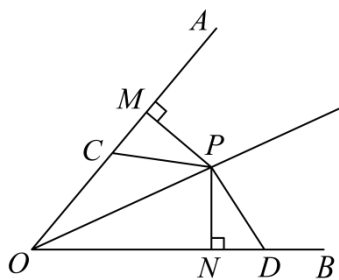
$$\therefore \Delta = (-2a)^2 - 4(a-1)(a-1) = 4a^2 - 4(a^2 - 2a + 1) = 4a^2 - 4a^2 + 8a - 4 = 8a - 4 \geq 0,$$

解得 $a \geq \frac{1}{2}$ ．

综上， a 的取值范围是 $a \geq \frac{1}{2}$ 且 $a \neq 1$ ．

故选：B．

5. 如图， C 、 D 两点分别在射线 OA 、 OB 上，点 P 在 $\angle AOB$ 的内部，且 $CP = DP$ ， $PM \perp OA$ ， $PN \perp OB$ ，垂足分别为点 M 、 N ，且 $CM = DN$ ，若 $DN = 3$ ， $CO = 7$ ，则 DO 的长为（ ）



A. 10

B. 13

C. 15

D. 17

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了全等三角形的性质与判定，先证明 $\text{Rt}\triangle PCM \cong \text{Rt}\triangle PDN$ (HL) 得到 $PM = PN$ ， $CM = DN = 3$ ，则 $OM = CO + CM = 10$ ，进一步证明 $\text{Rt}\triangle OPC \cong \text{Rt}\triangle OPN$ (HL) 得到 $ON = OM = 10$ ，则 $DO = ON + DN = 13$ ．

【详解】解： $PM \perp OA$ ， $PN \perp OB$ ，

$$\therefore \angle PMC = \angle PND = 90^\circ,$$

$$\because CP = DP, \quad CM = DN,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle PCM \cong \text{Rt}\triangle PDN \text{ (HL)},$$

$$\therefore PM = PN, \quad CM = DN = 3,$$

$$\therefore OM = CO + CM = 10,$$

$$\therefore PM = PN, OP = OP,$$

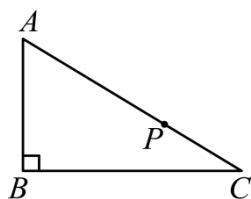
$$\therefore \text{Rt}\triangle OPC \cong \text{Rt}\triangle OPN (\text{HL}),$$

$$\therefore ON = OM = 10,$$

$$\therefore DO = ON + DN = 13,$$

故选 B.

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 6, BC = 8, \angle B = 90^\circ$, 若 P 是 AC 上的一个动点, 则 $AP + BP + CP$ 的最小值是 ()



A. 14.8

B. 15

C. 15.2

D. 16

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查解直角三角形, 勾股定理, 动点问题等知识, 解题的关键是掌握垂线段最短和等面积法. 利用勾股定理求出 AC , 根据垂线段最短, 求出 BP 的最小值即可解决问题.

【详解】解: $\because AB = 6, BC = 8, \angle B = 90^\circ$,

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$$\therefore AP + BP + PC = BP + AC = BP + 10,$$

根据垂线段最短得, 当 $BP \perp AC$ 时, BP 的值最小, 此时 $AP + BP + PC$ 取得最小值,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} BP \times AC,$$

$$\therefore BP = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{6 \times 8}{10} = 4.8,$$

$$\therefore AP + BP + PC \text{ 的最小值 } 10 + 4.8 = 14.8.$$

故选: A.

二、填空题 (本大题共 12 小题, 每题 2 分, 共 24 分)

7. 16 的平方根是_____.

【答案】 ± 4

【解析】

【分析】本题主要考查了平方根, 根据平方根的定义, 一个正数的平方根有两个, 它们互为相反数.

【详解】解： $\because (\pm 4)^2 = 16$,

$\therefore 16$ 的平方根是 ± 4 .

故答案为： ± 4 .

8. 比较大小： $2\sqrt{3}$ _____ $\sqrt{15}$ (填 “>” “<” 或 “=”).

【答案】 <

【解析】

【分析】 本题考查了无理数的大小比较.

通过比较平方即可比较两数的大小.

【详解】解： $\because (2\sqrt{3})^2 = 12$, $(\sqrt{15})^2 = 15$, $12 < 15$,

$\therefore 2\sqrt{3} < \sqrt{15}$.

故答案为： <.

9. 使 $\frac{\sqrt{x-1}}{4-x}$ 有意义的 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq 1$ 且 $x \neq 4$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式和分式有意义的条件. 二次根式有意义的条件是被开方数非负，分式有意义的条件是分母不为零，需同时满足这两个条件来确定 x 的取值范围.

【详解】解： 要使 $\frac{\sqrt{x-1}}{4-x}$ 有意义，

$\because$ 二次根式 $\sqrt{x-1}$ 有意义的条件是 $x-1 \geq 0$ ，解得 $x \geq 1$ ；

$\because$ 分式 $\frac{\sqrt{x-1}}{4-x}$ 有意义的条件是分母 $4-x \neq 0$ ，解得 $x \neq 4$ ；

$\therefore$ 综上， x 的取值范围是 $x \geq 1$ 且 $x \neq 4$.

故答案为： $x \geq 1$ 且 $x \neq 4$.

10. 在实数范围内因式分解： $2x^2 - 3x - 1 =$ _____.

【答案】 $2\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$

【解析】

【分析】 结合题意，当 $x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ 时，通过求解一元二次方程，得

$$x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = \left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right) = 0, \text{ 结合 } 2x^2 - 3x - 1 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right), \text{ 即可得到答案.}$$

【详解】 $2x^2 - 3x - 1 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right)$

当 $x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ 时，得 $x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$

$$\therefore x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = \left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right) = 0$$

$$\therefore x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = \left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$$

$$\therefore 2x^2 - 3x - 1 = 2\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$$

故答案为： $2\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$.

【点睛】 本题考查了因式分解和一元二次方程的知识；解题的关键是熟练掌握一元二次方程的性质，从而完成求解.

11. 若 m, n 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两个实数根，则 $mn - 4m - 4n$ 的值为_____.

【答案】 -9

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程根与系数的关系的应用，关键是利用韦达定理得到两根之和与两根之积，再对所求代数式进行变形代入计算.

【详解】 解： $\because m, n$ 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两个实数根，

$\therefore$ 根据韦达定理，得 $m + n = 2$ ， $mn = -1$ ；

将 $mn - 4m - 4n$ 变形为 $mn - 4(m + n)$ ，代入得 $-1 - 4 \times 2 = -1 - 8 = -9$ ；

故答案为：-9.

12. 关于 x 的分式方程 $\frac{x-1}{x-2} = \frac{m}{x-2} + 2$ 有增根，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查了根据分式方程解的情况求值，分式方程无解问题，解题关键是掌握上述知识点并能熟练运用求解.

分式方程有增根时，分母为零，即 $x = 2$ ，代入化简后的方程求解 m .

【详解】 解：方程两边同乘 $x - 2$ ，得 $x - 1 = m + 2(x - 2)$ ，

化简得 $x = 3 - m$.

令 $x = 2$ ，得 $2 = 3 - m$ ，

解得： $m = 1$.

故答案为： 1.

13. 关于 x 的一元二次方程 $(m-3)x^2 + 2x + m^2 - 9 = 0$ 有一个根为 0，那么 m 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的定义，一元二次方程的解，掌握相关知识是解决问题的关键. 将根 $x = 0$ 代入方程，得到关于 m 的方程，解出 m ，并检验是否满足一元二次方程的条件.

【详解】 解：将 $x = 0$ 代入方程 $(m-3)x^2 + 2x + m^2 - 9 = 0$ ，

得 $m^2 - 9 = 0$ ，

即 $m^2 = 9$ ，

解得 $m = 3$ 或 $m = -3$ ，

$\because$ 一元二次方程二次项系数 $m - 3 \neq 0$ ，

$\therefore m \neq 3$ ，

$\therefore m = -3$.

故答案为： -3.

14. 不等式 $x > \sqrt{2}x + 3\sqrt{2}$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x < -6 - 3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题通过解一元一次不等式考查二次根式的乘法公式，核心是利用平方差公式进行分母有理化.

【详解】 解：原不等式为 $x > \sqrt{2}x + 3\sqrt{2}$ ，即 $x(1 - \sqrt{2}) > 3\sqrt{2}$ ，

$\because 1 - \sqrt{2} < 0$ ，

$$\therefore x < \frac{3\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{2} + 6}{1 - 2} = -6 - 3\sqrt{2}.$$

故不等式的解集为 $x < -6 - 3\sqrt{2}$.

故答案为： $x < -6 - 3\sqrt{2}$.

15. 已知方程 $x^2 - 4x + k = 0$ 的一个根为 5，则方程的另一个根为_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系，设方程的另一个根为 m ，根据根与系数的关系可得 $m + 5 = 4$ ，据此可得答案.

【详解】 解：设方程的另一个根为 m ，

根据根与系数的关系可得 $m + 5 = 4$ ，

$\therefore m = -1$ ，

$\therefore$ 原方程的另一个根为 -1 ，

故答案为： -1 .

16. 小杰将1000元压岁钱按一年定期存入银行，到期后取出200元用来购买学习用品，剩下的800元和应得的利息又全部按一年定期存入银行. 若存款的年利率为 x ，这样到期后账户里有892.5元，由题意可列方程：_____.

【答案】 $(800 + 1000x)(1 + x) = 892.5$

【解析】

【分析】 本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，解题关键是要读懂题目的意思，根据题目给出的条件，找出合适的等量关系列出方程. 可以设存款利率为 x ，第一年提取200元后存款为

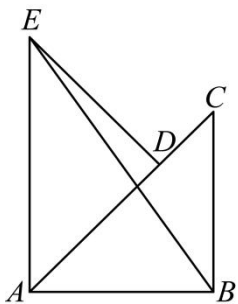
$1000 \times (1+x) - 200 = 800 + 1000x$ ，第二年后可得存款为 $(800 + 1000x)(1+x) = 892.5$ ，此题得解.

【详解】解：设存款利率为 x ，则第一年提取 200 元后存款为 $1000 \times (1+x) - 200$ ，

根据题意，可列方程为： $(800 + 1000x)(1+x) = 892.5$ ，

故答案为： $(800 + 1000x)(1+x) = 892.5$.

17. 如图，将等腰直角三角形 ABC 绕点 A 逆时针旋转 45° ，得到 ADE . 已知， $AB = 3$ ，连接 BE ，则 $BE = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】此题考查旋转的性质、勾股定理等知识，先由等腰三角形的性质和勾股定理求出 $AC = 3\sqrt{2}$ ，再由旋转的性质得 $\angle EAB = 90^\circ$ ， $AB = AD = 3$ ， $AC = AE = 3\sqrt{2}$ ，然后根据勾股定理可以求出 BE 的长.

【详解】解： $\because$ ABC 是等腰直角三角形， $AB = 3$ ，

$\therefore \angle BAC = 45^\circ$ ， $AB = BC = 3$ ，

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ ，

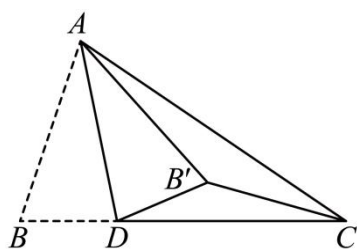
$\therefore$ 将等腰直角三角形 ABC 绕点 A 逆时针旋转 45° ，得到 ADE ，

$\therefore \angle EAB = \angle BAC + \angle DAE = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ ， $AB = AD = 3$ ， $AC = AE = 3\sqrt{2}$ ，

$\therefore BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{3}$.

故答案为： $3\sqrt{3}$.

18. 如图，在 ABC 中， $\angle BAD = 30^\circ$ ，将 $\triangle ABD$ 沿 AD 折叠至 $\triangle ADB'$ ， $\angle ACB = 2\alpha$ ，连接 $B'C$ ， $B'C$ 平分 $\angle ACB$ ，则 $\angle AB'D$ 的度数为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (用含 α 的式子表示)



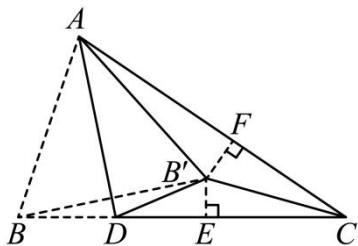
【答案】 $90^\circ - \alpha$

【解析】

【分析】连接 BB' ，过点 B' 作 $B'E \perp BC$ 于 E ， $B'F \perp AC$ 于 F ，可得 $\triangle ABB'$ 是等边三角形，得出 $AB' = BB'$ ， $\angle B'BA = \angle B'AB = 60^\circ$ ，运用 HL 可证得 $\text{Rt}\triangle BB'E \cong \text{Rt}\triangle AB'F$ ，得出 $\angle B'BE = \angle B'AF$ ，再运用三角形内角和定理即可求得答案.

【详解】解：如图，连接 BB' ，过点 B' 作 $B'E \perp BC$ 于 E ， $B'F \perp AC$ 于 F ，则

$$\angle CEB' = \angle CFB' = \angle BEB' = \angle AFB' = 90^\circ,$$



由折叠可知， $\angle BAD = \angle B'AD = 30^\circ$ ， $AB = AB'$ ，

$$\therefore \angle BAB' = \angle BAD + \angle B'AD = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABB'$ 是等边三角形，

$$\therefore AB' = BB', \quad \angle B'BA = \angle B'AB = 60^\circ,$$

$$\because B'C \text{ 平分 } \angle ACB, \quad \angle ACB = 2\alpha,$$

$$\therefore \angle ACB' = \angle BCB' = \frac{1}{2} \angle ACB = \alpha,$$

又 $\because B'E \perp BC$ ， $B'F \perp AC$ ，

$$\therefore B'E = B'F,$$

在 $\text{Rt}\triangle BB'E$ 和 $\text{Rt}\triangle AB'F$ 中，

$$\begin{cases} B'E = B'F \\ BB' = AB' \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BB'E \cong \text{Rt}\triangle AB'F \text{ (HL)},$$

$$\therefore \angle B'BE = \angle B'AF,$$

$$\therefore \angle B'BA + \angle B'BE = \angle B'AB + \angle B'AF,$$

$$\text{即 } \angle ABC = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle ACB = 2\alpha, \quad \angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BAC = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle AB'D = 90^\circ - \alpha,$$

故答案为: $90^\circ - \alpha$.

【点睛】本题考查折叠变换的性质，等边三角形的判定和性质，角平分线的性质，全等三角形的判定和性质，三角形内角和定理等，添加辅助线构造全等三角形是解题关键.

三、简答题 (本大题共 6 小题, 19、20 题每题 8 分, 21-24 题每题 6 分, 共 40 分)

$$19. (1) \text{ 计算: } \sqrt{24} \div \sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{18} - \sqrt{32}$$

$$(2) \text{ 已知 } x = \frac{1}{\sqrt{5}+2}, \text{ 求 } \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-4} \text{ 的值.}$$

【答案】

$$(1) -2\sqrt{2}-3; (2) -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

【解析】

【分析】本题考查二次根式混合运算和二次根式化简求值，解题的关键是掌握二次根式相关运算的法则.

(1) 先算乘除法，化为最简二次根式，再合并同类二次根式；

(2) 先将 $\frac{1}{\sqrt{5}+2}$ 分母有理化为 $\sqrt{5}-2$ ，由 $\sqrt{5}-2 < 2$ ，再把所求式子化简为 $-\frac{1}{x+2}$ ，将 $x = \sqrt{5}-2$ 代

入即可.

$$\text{【详解】解: (1) 原式} = \sqrt{8} - \sqrt{9} - \sqrt{32}$$

$$= 2\sqrt{2} - 3 - 4\sqrt{2}$$

$$= -2\sqrt{2} - 3;$$

$$(2) x = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \sqrt{5}-2,$$

$$\because \sqrt{5}-2 < 2,$$

$$\therefore x-2 = \sqrt{5}-2-2 < 0,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-4}$$

$$= \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{2-x}{(x+2)(x-2)}$$

$$= -\frac{1}{x+2},$$

$$\text{则原式} = -\frac{1}{\sqrt{5}-2+2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

20. 解方程

$$(1) (2x-5)^2 + 5(5-2x) + 6 = 0$$

$$(2) \frac{4x}{x^2-9} - 1 = \frac{2}{x+3} - \frac{2}{x-3}$$

【答案】 (1) $x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = 4$

(2) $x = 7$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的解法，关键是选择适合的解法.

(1) 通过完全平方公式展开、合并同类项将方程化为标准形式，再用因式分解法求解；

(2) 去分母转化为整式方程，同时要检验分母不为零，排除增根.

【小问 1 详解】

解：原方程展开，得 $4x^2 - 20x + 25 + 25 - 10x + 6 = 0$,

整理，得 $4x^2 - 30x + 56 = 0$,

化简，得 $2x^2 - 15x + 28 = 0$,

因式分解，得 $(2x-7)(x-4) = 0$,

则 $2x-7=0$ 或 $x-4=0$,

解得 $x_1 = \frac{7}{2}$, $x_2 = 4$;

【小问 2 详解】

解: 方程两边同乘 $(x+3)(x-3)$, 得 $4x - (x^2 - 9) = 2(x-3) - 2(x+3)$,

整理化简, 得 $x^2 - 4x - 21 = 0$,

因式分解得 $(x-7)(x+3) = 0$,

解得 $x = 7$ 或 $x = -3$.

检验: 当 $x = -3$ 时, $(x+3)(x-3) = 0$, 所以 $x = -3$ 是增根, 舍去;

故方程的解为 $x = 7$.

21. 已知点 A 、 B 、 C 、 D 在数轴上, 其中 A 、 B 分别表示数 $1 - \sqrt{3}$ 和 $1 + \sqrt{3}$. 点 C 向左平移 4 个单位长度后与点 B 重合.

(1) 求线段 AB 的长;

(2) 求点 C 表示的数;

(3) 对于数轴上三点, 点 A 、点 B 关于点 D 对称, 求点 D 对应的实数.

【答案】(1) $2\sqrt{3}$

(2) $5 + \sqrt{3}$

(3) 1

【解析】

【分析】本题考查实数与数轴的知识, 包括: 数轴上两点距离为两点表示的数之差(右减左); 点向左平移时数减对应单位, 向右平移时坐标加对应单位; 两点关于某点对称时, 该点到两点的距离相等.

(1) 通过数轴上两点距离公式计算 AB 长度;

(2) 根据平移规律列方程求点 C 的数;

(3) 通过设未知数, 利用线段长相等列方程求解表示点 D 的数.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 A 表示 $1 - \sqrt{3}$, 点 B 表示 $1 + \sqrt{3}$,

$\therefore$ 线段 AB 的长为 $(1 + \sqrt{3}) - (1 - \sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$;

【小问 2 详解】

解: $\because$ 点 C 向左平移 4 个单位长度后与点 B 重合, 即数减小 4 与 $1 + \sqrt{3}$ 相等,

∴ 点 C 表示的数为 $(1+\sqrt{3})+4=5+\sqrt{3}$;

【小问 3 详解】

解: 设点 D 对应的实数为 x ,

∵ 点 A 、点 B 关于点 D 对称,

∴ $AD=BD$, 即 $x-(1-\sqrt{3})=(1+\sqrt{3})-x$,

解得 $x=1$, 即点 D 对应的实数为 1.

22. 已知关于 x 的方程 $(m-1)x^2-2mx+m+1=0$.

(1) 求证: 无论常数 m 取何值, 方程总有实数根;

(2) 当整数 m 取何值时, 方程有两个整数根?

【答案】(1) 见解析 (2) $m=2$ 或 $m=0$ 或 $m=3$ 或 $m=-1$

【解析】

【分析】本题考查根据方程的根的情况, 求参数的值. 熟练掌握一元二次方程判别式和根的个数关系, 以及根与系数的关系, 是解题的关键.

(1) 根据二次项系数为零和不为零两种情况进行分类讨论, 利用判别式的取值进行证明即可;

(2) 根据方程的两个根都是整数, 说明方程为一元二次方程, 利用根与系数的关系, 结合两个根都是整数, 进行计算即可.

【小问 1 详解】

证明: 当 $m-1=0$, 即: $m=1$ 时,

方程变为: $-2x+2=0$,

解得: $x=1$, 方程有实数根;

当 $m-1 \neq 0$, 即: $m \neq 1$ 时, 方程为一元二次方程,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4(m-1)(m+1) = 4 > 0,$$

∴ 方程有两个不相等的实数根;

∴ 无论 m 为何值, 方程总有实数根.

【小问 2 详解】

解: 依题意, 方程有两个整数根, 则该方程为一元二次方程, 故 $m-1 \neq 0$, 即 $m \neq 1$,

设方程的两个根为: x_1, x_2 ,

$$\text{则: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2m}{m-1} = \frac{2m}{m-1} = \frac{2(m-1)+2}{m-1} = 2 + \frac{2}{m-1},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m+1}{m-1} = \frac{m-1+2}{m-1} = 1 + \frac{2}{m-1},$$

∴ 方程的两个根都为整数,

∴ $2 + \frac{2}{m-1}$ 和 $1 + \frac{2}{m-1}$ 为整数, 即 $\frac{2}{m-1}$ 为整数,

∴ $m-1 = \pm 1$ 或 $m-1 = \pm 2$,

解得: $m = 2$ 或 $m = 0$ 或 $m = 3$ 或 $m = -1$,

∴ 当 $m = 2$ 或 $m = 0$ 或 $m = 3$ 或 $m = -1$ 时, 该方程的两个根都为整数.

23. 为加强防汛工作, 市工程队准备对苏州河一段长为 2240 米的河堤进行加固, 由于采用新的加固模式, 现在计划每天加固的长度比原计划增加了 20 米, 因而完成此段加固工程所需天数将比原计划缩短 2 天, 问现在计划每天加固多少米?

【答案】 现在计划每天加固 160 米

【解析】

【分析】 本题考查分式方程的实际应用、解一元二次方程, 解题的关键是根据所给等量关系列出分式方程, 求出解后注意检验. 设原计划每天加固长度为 x 米, 则现在每天加固长度为 $(x+20)$ 米, 根据完成天数比原计划缩短 2 天, 列出分式方程求解.

【详解】 解: 设原计划每天加固长度为 x 米, 则现在每天加固长度为 $(x+20)$ 米,

由题意得: $\frac{2240}{x} - \frac{2240}{x+20} = 2$,

整理得 $x^2 + 20x - 22400 = 0$,

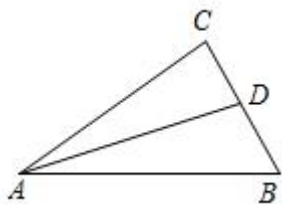
解得 $x_1 = 140$ 或 $x_2 = -160$ (舍去),

经检验, $x = 140$ 是原方程的解,

∴ 现在每天加固长度为 $140 + 20 = 160$ 米.

答: 现在计划每天加固 160 米.

24. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 8$, $BC = 6$, AD 为 $\triangle ABC$ 角平分线, 求 CD 的长度.

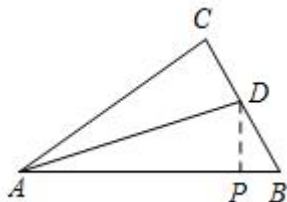


【答案】 $CD = \frac{8}{3}$.

【解析】

【分析】首先证明 $CD=DP$, $AC=AP=8$, 设 $CD=DP=x$, 在 $Rt\triangle BDP$ 中, 利用勾股定理构建方程即可解决问题.

【详解】解: (1) 如图, 过点 D 作 AB 的垂线, 垂足为 P , 设 $CD=DP=x$



在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\because AC=8$, $BC=6$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10,$$

$$\because \angle CAD = \angle PAD, \angle C = \angle APD = 90^\circ, AD = AD,$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ADP \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AC = AP = 8, CD = PD, \text{ 设 } CD = PD = x,$$

在 $Rt\triangle BDP$ 中, $\because PB = AB - AP = 2$, $BD = 6 - x$,

$$\therefore x^2 + 2^2 = (6 - x)^2,$$

$$\therefore x = \frac{8}{3},$$

$$\therefore CD = \frac{8}{3}.$$

【点睛】本题考查了角平分线的性质, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

四、解答题 (本大题共 2 小题, 25 题 8 分, 26 题 10 分, 共 18 分)

25. 已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - (2k + 4)x + k + 7 = 0$.

(1) 如果这个方程的两个实数根是 x_1 , x_2 , 且 $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 3$, 求 k 的值;

(2) 若等腰 ABC 的一边长 $a = 2$, 另两边长 b , c 恰好是这个方程的两个根, 求 ABC 的周长.

【答案】(1) $k = -\frac{5}{2}$

(2) 7

【解析】

【分析】本题主要考查根与系数的关系, 方程根的判别式及等腰三角形的性质, 掌握方程根的判别式与方程根的情况的关系是解题的关键, 注意分类讨论.

(1) 由根与系数的关系得出 $x_1 + x_2 = \frac{2k+4}{k}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{k+7}{k}$, 再根据 $(x_1+2)(x_2+2)=3$ 得 $x_1 \cdot x_2 + 2(x_1+x_2) + 4 = 3$, 代入解方程即可;

(2) 根据等腰三角形的性质分情况讨论求出 b, c 的长, 并根据三角形三边关系检验, 综合后求出 ABC 的周长.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 方程 $kx^2 - (2k+4)x + k+7 = 0$ 的两个实数根是 x_1, x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{2k+4}{k}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{k+7}{k},$$

$$\therefore (x_1+2)(x_2+2) = 3,$$

$$\therefore x_1 \cdot x_2 + 2(x_1+x_2) + 4 = 3,$$

$$\therefore \frac{k+7}{k} + 2 \times \frac{2k+4}{k} + 4 = 3,$$

$$\text{解得 } k = -\frac{5}{2},$$

当 $k = -\frac{5}{2}$ 时, $\Delta = (2k+4)^2 - 4k(k+7) = 16 - 12k = 46 > 0$, 方程有两个实数根, 符合题意;

【小问 2 详解】

解: 分两种情况:

①若 $b = c$,

$\therefore$ 方程 $kx^2 - (2k+4)x + k+7 = 0$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (2k+4)^2 - 4k(k+7) = 0,$$

$$\text{解得 } k = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \text{此时方程为 } \frac{4}{3}x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{25}{3} = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = x_2 = \frac{5}{2},$$

$$\therefore ABC \text{ 的周长为 } 2 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 7;$$

②若 $b \neq c$, 则 $b = a = 2$ 或 $c = a = 2$, 即方程有一根为 2,

$\therefore$ 把 $x = 2$ 代入方程 $kx^2 - (2k+4)x + k+7 = 0$, 得 $4k - 2(2k+4) + k+7 = 0$,

解得 $k = 1$,

$$\therefore \text{此时方程为 } x^2 - 6x + 8 = 0,$$

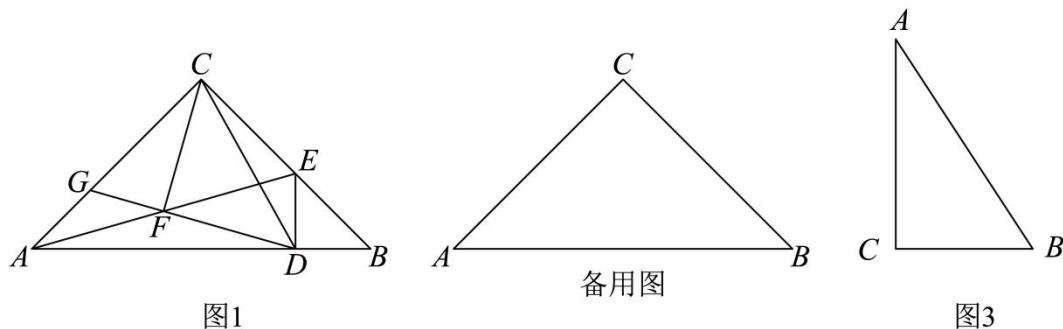
解得 $x_1 = 2$, $x_2 = 4$,

$\therefore$ 方程另一根为 4,

$\because 2, 2, 4$ 不能构成三角形, 此种情况舍去.

综上所述, $\triangle ABC$ 的周长为 7.

26. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 3$, 点 D 是边 AB 上的动点 (点 D 与点 A, B 不重合), 过点 D 作 $DE \perp AB$ 交射线 BC 于点 E , 连接 AE , 点 F 是 AE 的中点, 过点 D, F 作直线, 交边 AC 于点 G , 连接 CF, CD .



- (1) 当点 E 在边 BC 上时, 设 $DB = x$, 用含有 x 的代数式表示 CE 的长;
- (2) 判断 $\triangle CDF$ 的形状, 并证明;
- (3) 在直角三角形中, 如果一个锐角等于 30° , 那么它所对的直角边等于斜边的一半. 例如图 3 中, 在 $\triangle ABC$ 中, 如果 $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, 那么 $BC = \frac{1}{2}AB$. 如果 $\angle CAE = 30^\circ$, 请利用上述性质求 DG 的长.

【答案】(1) $CE = 3 - \sqrt{2}x$

(2) 等腰直角三角形, 见解析

(3) $\sqrt{3} + 1$ 或 $\sqrt{3} - 1$

【解析】

【分析】(1) 先证 $\triangle DEB$ 为等腰直角三角形, 由勾股定理得 $EB = \sqrt{2}x$, 再由 $EB + CE = BC = 3$ 即可得出答案;

(2) 根据题意分两种情况讨论: 当点 E 在边 BC 上时和当点 E 在线段 BC 的延长线上时, 由题意得 $\angle ADE = 90^\circ$, 再由点 F 是 AE 的中点知 $CF = AF = \frac{1}{2}AE$, $DF = AF = \frac{1}{2}AE$, 则 $CF = DF$, $\angle CAE = \angle ACF$, $\angle EAD = \angle ADF$, 可推出 $\angle CFD = 2\angle CAD = 90^\circ$, 据此可得答案;

(3) 分点 E 在线段 BC 上和线段 BC 延长线上两种情况, 分别求出 DF, GF 的长, 即可得出答案.

【小问 1 详解】

解: $\because \angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 3$,

$$\therefore \angle B = \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\text{又} \because DE \perp AB,$$

$$\therefore \triangle DEB \text{ 为等腰直角三角形,}$$

$$\because DB = x,$$

$$\therefore BD = DE = x,$$

$$\therefore EB = \sqrt{DE^2 + DB^2} = \sqrt{2}x,$$

$$\therefore CE = CB - BE = 3 - \sqrt{2}x;$$

【小问 2 详解】

证明：如图 1，当点 E 在边 BC 上时，

$$\because DE \perp AB, \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ACE = 90^\circ,$$

$$\because \text{点 } F \text{ 是 } AE \text{ 的中点,}$$

$$\therefore CF = AF = \frac{1}{2}AE, \quad DF = AF = \frac{1}{2}AE,$$

$$\therefore CF = DF, \quad \angle CAE = \angle ACF, \quad \angle EAD = \angle ADF,$$

$$\therefore \angle CFE = 2\angle CAE, \quad \angle EFD = 2\angle EAD,$$

$$\therefore \angle CFD = \angle CFE + \angle EFD = 2\angle CAE + 2\angle EAD = 2\angle CAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CDF \text{ 是等腰直角三角形;}$$

如图 2，当点 E 在线段 BC 的延长线上时，

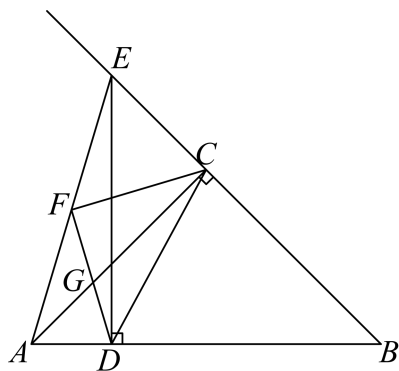


图2

$$\because DE \perp AB, \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ACE = 90^\circ,$$

$$\because \text{点 } F \text{ 是 } AE \text{ 的中点,}$$

$$\therefore CF = AF = \frac{1}{2}AE, \quad DF = AF = \frac{1}{2}AE,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore CF = DF, \quad \angle CAE = \angle ACF, \quad \angle EAD = \angle ADF, \\
&\therefore \angle CFE = 2\angle CAE, \quad \angle EFD = 2\angle EAD, \\
&\therefore \angle CFD = \angle EFD - \angle CFE = 2\angle EAD - 2\angle CAE = 2\angle CAD = 90^\circ, \\
&\therefore \triangle CDF \text{ 是等腰直角三角形;}
\end{aligned}$$

【小问 3 详解】

解：如图 1，当点 E 在线段 BC 上时， $\angle CAE = 30^\circ$ ， $AC = 3$ ，

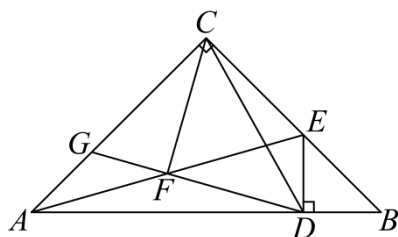


图1

$$\begin{aligned}
&\because \angle ACE = 90^\circ, \\
&\therefore AE = 2CE, \\
&\because AE^2 - CE^2 = AC^2, \text{ 即 } AE^2 - \left(\frac{1}{2}AE\right)^2 = 3^2, \\
&\therefore AE = 2\sqrt{3}, \\
&\therefore CF = DF = \frac{1}{2}AE = \sqrt{3}, \\
&\because \angle CAE = \angle ACF = 30^\circ, \quad \angle CFD = 90^\circ, \\
&\therefore \text{在 Rt}\triangle CFG \text{ 中, } CG = 2GF, \\
&\because CG^2 - GF^2 = CF^2, \text{ 即 } (2GF)^2 - GF^2 = (\sqrt{3})^2, \\
&\therefore GF = 1, \\
&\therefore DG = DF + FG = \sqrt{3} + 1;
\end{aligned}$$

如图 2，当点 E 在线段 BC 的延长线上时， $\angle CAE = 30^\circ$ ， $AC = 3$ ， $\angle CFD = 90^\circ$ ，

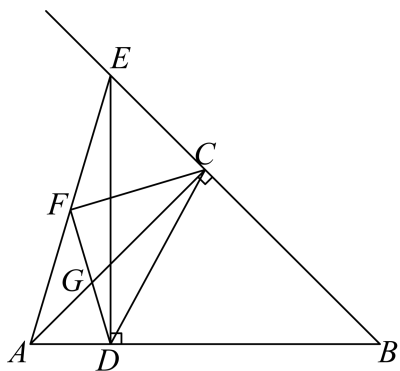


图2

同理可得, $CF = DF = \frac{1}{2}AE = \sqrt{3}$,

在 $\text{Rt}\triangle CFG$ 中, $GF = 1$,

$$\therefore DG = DF - FG = \sqrt{3} - 1,$$

综上, 如果 $\angle CAE = 30^\circ$, DG 的长为 $\sqrt{3} + 1$ 或 $\sqrt{3} - 1$.

【点睛】 本题考查 等腰直角三角形的判定与性质, 直角三角形斜边上的中线的性质, 含 30° 直角三角形的性质, 勾股定理, 三角形外角的性质等知识, 熟练掌握等腰直角三角形的判定和性质、直角三角形斜边上的中线的性质、含 30° 直角三角形的性质是解题的关键.