

2025 学年第一学期八年级数学学科期终质量监测试卷

(满分 100 分, 答题时间 90 分钟)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分共 18 分)

1. 在下列各组二次根式中, 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{12}$ B. $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ C. $\sqrt{xy}$ 和 $\sqrt{x^2y^2}$ D. $\sqrt{a-1}$ 和 $\sqrt{a+1}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了同类二次根式的识别, 同类二次根式需化简后根号内被开方数相同, 分别化简各选项二次根式即可判断.

【详解】 解: 对于 A: $\because \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$, 被开方数为 3, 与 $\sqrt{2}$ 的被开方数 2 不同, $\therefore$ 不是同类二次根式.

对于 B: $\because \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 被开方数为 2, 与 $\sqrt{2}$ 的被开方数相同, $\therefore$ 是同类二次根式.

对于 C: $\because \sqrt{x^2y^2} = |xy|$, 化简后不再是二次根式, $\sqrt{xy}$ 是二次根式, $\therefore$ 不是同类二次根式.

对于 D: $\because \sqrt{a-1}$ 和 $\sqrt{a+1}$ 的被开方数分别为 $a-1$ 和 $a+1$, 被开方数不同, $\therefore$ 不是同类二次根式.

故选 B.

2. 下列说法正确的是 ()

- A. 只有正数才有平方根 B. 27 的立方根是 ± 3
C. $\sqrt{17}$ 是 17 的一个平方根 D. $\sqrt{16}$ 的算术平方根是 4

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查平方根、算术平方根和立方根, 解题的关键是掌握平方根、算术平方根和立方根的定义. 根据平方根定义和立方根的定义判断各选项.

【详解】 解: A、平方根定义: 正数有两个平方根, 0 的平方根是 0, 负数没有平方根, 所以 0 也有平方根, 故此选项错误, 不符合题意;

B、立方根定义: 一个数的立方根唯一, 27 的立方根是 3, 故此选项错误, 不符合题意;

C、 $\sqrt{17}$ 是 17 的算术平方根, 是 17 的一个平方根, 故此选项正确, 符合题意;

D、 $\sqrt{16}=4$ ，4的算术平方根是2，故此选项错误，不符合题意.

故选：C.

3. 下列方程中，是一元二次方程的是（ ）

A. $ax^2+2=0$

B. $x^2-\sqrt{3}x=7$

C. $(3x-2)(x+6)=3x^2-7$

D. $x^2+\frac{1}{y}=0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的定义，正确理解一元二次方程的定义是关键. 一元二次方程需同时满足一个未知数，最高次数2，且是整式方程三个条件.

根据一元二次方程的定义进行判断即可.

【详解】解：对于A，当 $a=0$ 时， $ax^2+2=0$ 不是二次方程，所以选项A不符合题意；

对于B，因为方程只含一个未知数 x ，且最高次数为2，是整式方程，所以 $x^2-\sqrt{3}x=7$ 是一元二次方程，即选项B符合题意；

对于C，将方程 $(3x-2)(x+6)=3x^2-7$ 化简后得 $16x=5$ ，是一元一次方程，所以选项C不符合题意；

对于D，因为方程中含有两个未知数 x 和 y ，且不是整式方程，所以方程 $x^2+\frac{1}{y}=0$ 不是一元二次方程，所以选项D不符合题意.

故选：B.

4. 已知光在真空中的传播速度约是 $3\times 10^8\text{m/s}$ ，太阳光从太阳表面照射到地球上大约需要500s，则地球到太阳的距离大约为（ ）km.（结果用科学记数法表示）

A. 1.5×10^8

B. 1.5×10^{11}

C. 0.15×10^9

D. 15×10^7

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了科学记数法，单位的换算.

根据距离=速度 $\times$ 时间，计算光传播的距离，然后进行单位换算（米到公里），并用科学记数法表示.

【详解】解： $\because$ 速度 $v=3\times 10^8\text{m/s}$ ，时间 $t=500\text{s}$ ，

$$\therefore \text{距离 } s = v \times t = 3 \times 10^8 \times 500 = 1.5 \times 10^{11} \text{ m},$$

$$\therefore 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m},$$

$$\therefore s = \frac{1.5 \times 10^{11}}{10^3} = 1.5 \times 10^8 \text{ km}.$$

故选: A.

5. 已知 $a+b=-2$, $ab=1$, 则化简求 $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$ 的值是 ()

A. -2

B. 2

C. -1

D. 1

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的化简求值, 根据已知条件可证明 a 、 b 都小于 0, 则可先化简二次根式得到 $-\frac{\sqrt{ab}}{b} - \frac{\sqrt{ab}}{a}$, 进一步通分得到 $-\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{ab}$, 再代值计算即可.

【详解】 解: $\because ab=1$,

$\therefore a$ 、 b 同号,

$\because a+b=-2$,

$\therefore a$ 、 b 都小于 0,

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} &= -\frac{\sqrt{ab}}{b} - \frac{\sqrt{ab}}{a} \\ &= -\frac{a\sqrt{ab} + b\sqrt{ab}}{ab} \\ &= -\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{ab}, \end{aligned}$$

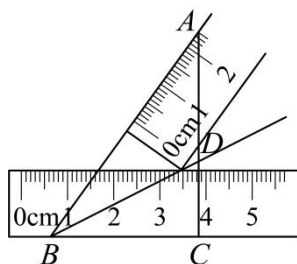
$\because a+b=-2$, $ab=1$,

$$\therefore \text{原式} = -\frac{(-2) \times \sqrt{1}}{1} = 2,$$

故选: B.

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, 现用两把完全相同的长方形直尺, 一把紧贴着边 BC , 另一把紧贴着边 AB 并且与第一把直尺相交于一点, 过点 B 和两把直尺的交点作射线, 交 AC 于点 D , 则

下列结论错误的是 ()



A. BD 是 $\angle ABC$ 的角平分线

B. $AD = BD$

C. $S_{\triangle CBD} : S_{\triangle ABD} = 1 : 3$

D. $\frac{CD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

【答案】C

【解析】

【分析】对于 A, 设两把直尺的交点为 P , 过点 P 作 $PE \perp BC$ 于点 E , $PF \perp AB$ 于点 F , 则 $PE = PF$, 根据角平分线的性质定理的逆定理, 即可证明结论;

对于 B, 根据直角三角形的两锐角互余, 可逐步证明 $\angle DBA = \angle A = 30^\circ$, 即可根据等腰三角形的判定证明结论;

对于 C, 根据含 30° 角的直角三角形的性质, 可得 $BD = 2CD$, 所以 $AD = 2CD$, 即得 $S_{\triangle CBD} : S_{\triangle ABD} = 1 : 2$, 即可判断;

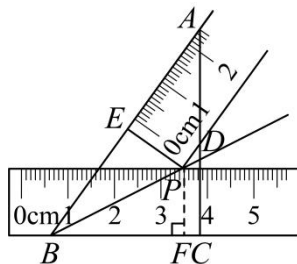
对于 D, 设 $CD = a$, 根据勾股定理可逐步求得 $AB = 2\sqrt{3}a$, 即可证明结论.

【详解】解: 对于 A, 设两把直尺的交点为 P , 过点 P 作 $PE \perp BC$ 于点 E , $PF \perp AB$ 于点 F , 则 $PE = PF$,

$\therefore BP$ 平分 $\angle ABC$,

即 BD 是 $\angle ABC$ 的角平分线,

故选项 A 正确, 不符合题意;



对于 B,

$\because \angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ - \angle A = 60^\circ,$$

$\because BP$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle DBA = \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DBA = \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore AD = BD,$$

故选项 B 正确, 不符合题意;

对于 C,

$$\because \angle C = 90^\circ, \angle DBC = 30^\circ,$$

$$\therefore BD = 2CD,$$

$$\because AD = BD,$$

$$\therefore AD = 2CD,$$

$$\therefore S_{\triangle CBD} : S_{\triangle ABD} = 1 : 2,$$

故选项 C 错误, 符合题意;

对于 D,

设 $CD = a$, 则 $AD = BD = 2a$,

$$\therefore AC = 3a,$$

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a,$$

$$\therefore AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 + (3a)^2} = 2\sqrt{3}a,$$

$$\therefore \frac{CD}{AB} = \frac{a}{2\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

故选项 D 正确, 不符合题意.

故选: C.

【点睛】 本题考查了角平分线的性质定理的逆定理, 等腰三角形的判定, 勾股定理, 含 30° 角的直角三角形的性质, 熟练掌握相关知识是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分共 24 分)

7. 要使 $\sqrt{2x-1}$ 有意义, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式有意义的条件，根据二次根式中被开方数大于等于0列不等式，即可求解.

【详解】 解：要使 $\sqrt{2x-1}$ 有意义，

$\therefore$ 被开方数 $2x-1 \geq 0$,

解不等式得 $2x \geq 1$ ，即 $x \geq \frac{1}{2}$.

故答案为： $x \geq \frac{1}{2}$.

8. $\sqrt{a-b}$ 的一个有理化因式是_____.

【答案】 $\sqrt{a-b}$ (合理即可)

【解析】

【分析】 根据有理化因式的定义，直接写出即可.

【详解】 解： $\because \sqrt{a-b} \cdot \sqrt{a-b} = a-b$

$\therefore \sqrt{a-b}$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{a-b}$ (合理即可) .

【点睛】 本题考查了有理化因式的定义. 一般来说 $\sqrt{a}$ 的有理化因式为： $\sqrt{a}$ 或 $b\sqrt{a}$.

9. 已知 $\sqrt{102.01} = 10.1$ ，则 $\sqrt{1.0201} =$ _____.

【答案】 1.01

【解析】

【分析】 根据算术平方根的移动规律，把被开方数的小数点每移动两位，结果移动一位，进行填空即可.

【详解】 解： $\because \sqrt{1020.11} = 10.1$,

$$\therefore \sqrt{1.0201} = \sqrt{\frac{102.01}{100}} = \frac{\sqrt{102.01}}{\sqrt{100}} = \frac{10.1}{10} = 1.01 ;$$

故答案为：1.01.

【点睛】 本题考查了算术平方根的移动规律的应用，能根据移动规律填空是解此题的关键.

10. 实数 $-\sqrt{8}$ ，3.14， $\sqrt[3]{27}$ ，0.1010010001， $-0.0272727\cdots$ (“27”依次不断出现) 中，其中无理数是_____.

【答案】 $-\sqrt{8}$

【解析】

【分析】 本题考查了无理数的定义，二次根式的化简，求一个数的立方根.

根据无理数的定义逐一判断各数即可.

【详解】 解： $-\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$ ，其中 $\sqrt{2}$ 是无理数，因此 $-\sqrt{8}$ 是无理数；

3.14 是有限小数，是有理数；

$\sqrt[3]{27} = 3$ ，是整数，是有理数.

0.1010010001 是有限小数，是有理数.

$-0.0272727\cdots$ 是无限循环小数，是有理数.

综上所述，无理数是 $-\sqrt{8}$.

故答案为： $-\sqrt{8}$.

11. 在实数范围内因式分解： $x^2 - 3x - 2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(x - \frac{3 + \sqrt{13}}{2})(x - \frac{3 - \sqrt{13}}{2})$

【解析】

【分析】 运用求根公式解得对应方程 $x^2 - 3x - 2 = 0$ 的解，再分解因式.

【详解】 解： $\because x^2 - 3x - 2 = 0$ 的根为 $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

即 $x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ ， $x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$

$\therefore x^2 - 3x - 2 = \left(x - \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right)$.

故答案为： $(x - \frac{3 + \sqrt{13}}{2})(x - \frac{3 - \sqrt{13}}{2})$.

【点睛】 此题主要考查了实数范围内分解因式，利用求根公式法得出方程的根再分解因式是解决问题的关键.

12. 我们知道，有理数是能够写成分数 $\frac{b}{a}$ (a 、 b 是整数， $a \neq 0$) 的数，将 $0.\dot{2}\dot{1}$ 化成分数是_____.

【答案】 $\frac{7}{33}$

【解析】

【分析】 本题考查了将纯循环小数化为分数，熟练掌握循环小数化为分数的方法是解题的关键. 通过设循环小数为未知数，利用方程求解，将循环部分消除后得到分数.

【详解】解：设 $x = 0.21$ ，则 $x = 0.212121\dots$ ，

由于循环节有两位，将方程两边乘以100，得 $100x = 21.212121\dots$ ，

然后减去原方程，得 $100x - x = 21.212121\dots - 0.212121\dots$ ，即 $99x = 21$ ，

$$\therefore x = \frac{21}{99}, \text{ 约分得 } x = \frac{7}{33},$$

故答案为： $\frac{7}{33}$.

13. 写出满足条件的一元二次方程，使这个方程的二次项系数是1，常数项是6，其中一个根是-2，满足条件的方程是_____.

【答案】 $x^2 + 5x + 6 = 0$

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的解，构造一元二次方程，根据一元二次方程的一般形式 $ax^2 + bx + c = 0$ ，

设方程为 $x^2 + bx + 6 = 0$ ，代入已知根 $x = -2$ 求解 b 的值.

【详解】解：设一元二次方程为 $x^2 + bx + 6 = 0$ ，

将根 $x = -2$ 代入方程，

$$\text{得 } (-2)^2 + b \times (-2) + 6 = 0, \text{ 即 } 4 - 2b + 6 = 0,$$

$$\text{整理得 } 10 - 2b = 0,$$

$$\text{解得 } b = 5,$$

$$\text{故方程为 } x^2 + 5x + 6 = 0.$$

$$\text{故答案为: } x^2 + 5x + 6 = 0.$$

14. 不等式 $2x < \sqrt{3}x - 2$ 的解集为_____.

【答案】 $x < -4 - 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】此题考查了二次根式的运算和解一元一次不等式，熟练掌握二次根式的混合运算和解不等式的步骤是关键.

通过移项和合并同类项，将不等式变形为 $x(2 - \sqrt{3}) < -2$ ，然后根据不等式的性质（除以正数不等号方向不变）求解，并有理化分母

【详解】解： $2x < \sqrt{3}x - 2$ ，

移项得 $2x - \sqrt{3}x < -2$,

即 $(2 - \sqrt{3})x < -2$,

$\because 2 - \sqrt{3} > 0$,

$\therefore x < \frac{-2}{2 - \sqrt{3}}$,

$\therefore x < \frac{-2(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{-2(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = -2(2 + \sqrt{3}) = -4 - 2\sqrt{3}$

故答案为: $x < -4 - 2\sqrt{3}$

15. 已知直角三角形的两边长分别为 4、5, 那么第三边的长为_____.

【答案】3 或 $\sqrt{41}$

【解析】

【分析】本题考查勾股定理的应用, 由于直角三角形的斜边不确定, 需分两种情况讨论: 当 5 为斜边时, 第三边为直角边; 当第三边为斜边时, 4 和 5 均为直角边, 分别计算即可得出结果, 熟练掌握勾股定理是解此题的关键.

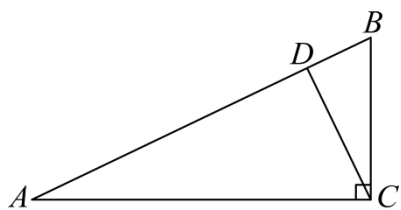
【详解】解: 当 5 为斜边时, 第三边长为 $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$;

当第三边为斜边时, 第三边长为 $\sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$;

故第三边的长为 3 或 $\sqrt{41}$,

故答案为: 3 或 $\sqrt{41}$.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CD 是斜边上的高, 如果 $\angle B = 2\angle BCD$, 那么 $\angle A =$ _____.



【答案】 30° ## 30 度

【解析】

【分析】本题考查了三角形内角和定理.

根据高线的定义得到 $\angle CDB = 90^\circ$, 即 $\angle B + \angle BCD = 90^\circ$, 根据 $\angle B = 2\angle BCD$ 求出 $\angle BCD = 30^\circ$, 即

$\angle B = 2\angle BCD = 60^\circ$ ，根据三角形内角和定理即可求出 $\angle A = 30^\circ$ 。

【详解】解： $\because CD$ 是斜边上的高，

$$\therefore \angle CDB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\because \angle B = 2\angle BCD,$$

$$\therefore 2\angle BCD + \angle BCD = 90^\circ,$$

解得： $\angle BCD = 30^\circ$,

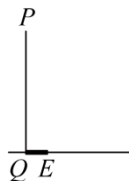
$$\therefore \angle B = 2\angle BCD = 60^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

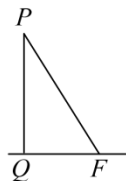
$$\therefore \angle A = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

故答案为： 30° 。

17. 某数学研究性学习小组在老师的指导下，利用课余时间测量校园内旗杆的高度。第一次操作：如图①，将系在旗杆顶端的绳子自然下垂到地面，绳子多出的一段在地面拉直后记作 QE ，用皮尺量出 QE 的长度为 3m。第二次操作：如图②，将绳子拉直，绳子末端落在地面上的点 F 处，用皮尺量出 QF 的长度为 9m。则旗杆的高度为 _____ m。



图①



图②

注：线段 PQ 表示旗杆， PQ 垂直地面于点 Q 。

【答案】 12

【解析】

【分析】 本题考查勾股定理的应用，熟练掌握勾股定理是解题的关键，由①得，绳子的长度比旗杆的高度多 3m，设旗杆 PQ 的高度为 x m，则绳子的长度 PF 为 $(x+3)$ m，在 $\text{Rt}\triangle PQE$ 中，由勾股定理得 $PQ^2 + QE^2 = PE^2$ ，列出方程，并解方程即可得到答案。

【详解】解：由①得，绳子的长度比旗杆的高度多 3m，

设旗杆 PQ 的高度为 x m，则绳子的长度 PF 为 $(x+3)$ m，

在 $\text{Rt}\triangle PQF$ 中， $PF = x+3$ ， $QF = 9$ ，

由勾股定理得： $PQ^2 + QF^2 = PF^2$ ，则 $x^2 + 9^2 = (x+3)^2$ ，

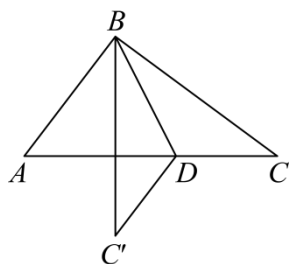
整理得: $6x + 9 = 81$,

解得: $x = 12$,

$\therefore$ 旗杆的高度为 12m,

故答案为: 12.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = 4$, D 为 AC 上一动点, 将 $\triangle BDC$ 沿着 BD 折叠, 点 C 落到 C' 处. 当 $BC' \perp AC$ 时, $CD = \underline{\hspace{2cm}}$.

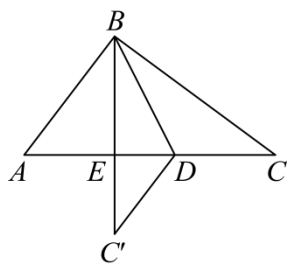


【答案】2

【解析】

【分析】此题考查了折叠的性质和勾股定理的应用, 设 $BC' \perp AC$ 于点 E , 用勾股定理和等积法求出 $CE = \frac{16}{5}$, 由折叠可知, $BC = BC' = 4$, $CD = C'D$, 设 $CD = C'D = x$, 得到 $C'E = \frac{8}{5}$, $DE = \frac{16}{5} - x$, 利用勾股定理列方程即可求出答案.

【详解】解: 设 $BC' \perp AC$ 于点 E , 如图,



$$\because \angle ABC = 90^\circ, \quad AB = 3, \quad BC = 4,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} AC \cdot BE,$$

$$\therefore BE = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5},$$

$$\therefore CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{16}{5},$$

由折叠可知, $BC = BC' = 4$, $CD = C'D$,

设 $CD = C'D = x$,

$$\therefore C'E = BC' - BE = 4 - \frac{12}{5} = \frac{8}{5}, \quad DE = CE - CD = \frac{16}{5} - x$$

$$\because C'D^2 = DE^2 + C'E^2,$$

$$\therefore x^2 = \left(\frac{16}{5} - x\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2,$$

解得 $x = 2$,

故答案为: 2

三、简答题 (本大题共 3 题, 每题 5 分, 满分共 15 分)

19. 计算: $\sqrt[3]{-27} + \sqrt{12} - \frac{1}{2+\sqrt{3}} + (\sqrt{3})^2$;

【答案】 $3\sqrt{3} - 2$

【解析】

【分析】 本题考查了实数的混合运算, 掌握实数的运算法则是解题的关键. 先分别计算式子中的立方根、二次根式、分母有理化和平方项, 再去括号, 最后将有理数部分和含 $\sqrt{3}$ 的根式部分分别合并, 得出最终结果.

【详解】 解: 原式 $= -3 + 2\sqrt{3} - \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + 3$

$$= -3 + 2\sqrt{3} - (2 - \sqrt{3}) + 3$$
$$= -3 + 2\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} + 3$$
$$= 3\sqrt{3} - 2.$$

20. 计算: $\frac{2}{b}\sqrt{a} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)\sqrt{a^3b} \div \sqrt{\frac{a}{b}}$;

【答案】 $-3a\sqrt{a}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的乘除, 熟练掌握二次根式的乘除是解题的关键. 先将除法转化为乘法, 再根据二次根式的乘法运算法则进行计算即可.

【详解】 解: 原式 $= \frac{2}{b}\sqrt{a} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)\sqrt{a^3b} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{b} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \sqrt{a \cdot a^3 b \cdot \frac{b}{a}} \\
&= -\frac{3}{b} \sqrt{(ab)^2 a} \\
&= -\frac{3}{b} \cdot ab \sqrt{a} \\
&= -3a \sqrt{a}.
\end{aligned}$$

21. 解方程: $\frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = 1$

【答案】 $x = -4$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程，熟练掌握解分式方程是关键．先将原方程变形为 $\frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x(x-2)} = 1$ ，

再去分母，并整理得 $x^2 + 2x - 8 = 0$ ，再解一元二次方程并检验即可．

【详解】 解：原方程变形为 $\frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x(x-2)} = 1$ ，

两边同乘以 $x(x-2)$ ，得 $2x^2 - 8 = x(x-2)$ ，

整理得 $x^2 + 2x - 8 = 0$ ，

$\therefore (x+4)(x-2) = 0$ ，

$\therefore x+4=0$ 或 $x-2=0$ ，

$\therefore x_1 = -4$ ， $x_2 = 2$ ，

经检验 $x = -4$ 是原方程的根， $x = 2$ 使分母为 0，是增根应舍去，

所以原方程的根是 $x = -4$ ．

四、解答题（本大题共 7 题，第 22、23、24、25 每题 5 分，第 26 题 6 分，第 27 题 8 分，第 28 题 9 分，满分共 43 分）

22. 按要求解答下列问题：

小华与小海两位同学解方程 $3(x-5) = (x-5)^2$ 的过程如下：

小华：	小海：
解： $3(x-5) = (x-5)^2$	解： $3(x-5) = (x-5)^2$
两边同时除以 $(x-5)$ ，得	提公因式，得 $(x-5)(3-x-5) = 0$ ，

$3 = x - 5$. 解得: $x = 8$.	由此得 $x - 5 = 0$ 或 $3 - x - 5 = 0$. 解得: $x_1 = 5, x_2 = -2$.
--------------------------------	--

(1) 小华的解法是错误的, 原因是_____

(2) 小海的解法是_____ (填“正确”或“错误”). 如果小海的解法错误, 请写出正确的解题过程.

【答案】(1) $(x-5)$ 可能为 0

(2) 错误, 见解析, $x_1 = 5, x_2 = 8$

【解析】

【分析】此题考查了解一元二次方程, 熟练掌握因式分解法解一元二次方程是关键.

(1) 根据除数不为零无意义进行解答即可;

(2) 判断后利用因式分解法解一元二次方程即可.

【小问 1 详解】

解: 小华的解法是错误的, 原因是: 两边同时除以 $(x-5)$, $(x-5)$ 可能为 0.

故答案为: $(x-5)$ 可能为 0

【小问 2 详解】

解: 小海的解法是错误的, 正确的过程如下:

$$3(x-5) = (x-5)^2$$

$$(x-5)[3-(x-5)] = 0$$

$$\text{整理得 } (x-5)(8-x) = 0$$

$$\text{解得 } x_1 = 5, x_2 = 8.$$

所以原方程的根是 $x_1 = 5, x_2 = 8$.

23. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 .

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若 $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 4$, 求 m 的值及此方程的两根.

【答案】(1) $m \leq 2$

$$(2) m = -3, x_1 = 1 + \sqrt{5}, x_2 = 1 - \sqrt{5}$$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式，根与系数的关系，解一元二次方程.

(1) 根据“有两个实数根”可知 $\Delta \geq 0$ ，进而求解即可；

(2) 根据根与系数的关系得到 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m - 1$ ，根据 $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 4$ 得到 $x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) = 0$ ，将 $x_1 + x_2 = 2$ ， $x_1 x_2 = m - 1$ 代入得到 $m - 1 + 2 \times 2 = 0$ ，求出 $m = -3$ ，此时 $x^2 - 2x - 4 = 0$ ，根据配方法求解即可.

【小问 1 详解】

解： $\because a = 1$ ， $b = -2$ ， $c = m - 1$ ，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (m - 1) = 8 - 4m,$$

$\because$ 方程有两个实数根，

$$\therefore 8 - 4m \geq 0,$$

$$\therefore m \leq 2;$$

【小问 2 详解】

解： $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ 有两个实数根 x_1 、 x_2 ，

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m - 1,$$

$$\text{又} \because (x_1 + 2)(x_2 + 2) = 4,$$

$$\therefore x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) = 0,$$

$$\text{即 } m - 1 + 2 \times 2 = 0,$$

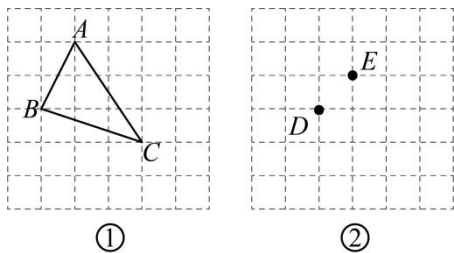
$$\therefore m = -3,$$

当 $m = -3$ 时，方程 $x^2 - 2x - 4 = 0$ ，

$$\text{解得 } x_1 = 1 + \sqrt{5}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{5},$$

$$\therefore m = -3, \text{ 方程两根为 } x_1 = 1 + \sqrt{5}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{5}.$$

24. 如图①是小华同学在正方形网格中（每个小正方形的边长为 1）画出的格点 ABC （ ABC 的三个顶点都在正方形的顶点处）.



(1) 由图①可知 $AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, 则 $BC = \underline{\quad\quad}$, $AC = \underline{\quad\quad}$.

(2) 请你在图②的正方形网格中, 补画出格点 $\triangle DEF$, 其中 $EF = 2\sqrt{2}$, $DF = \sqrt{10}$, 并求出 $\triangle DEF$ 的面积. (只要画出一个符合条件的 $\triangle DEF$)

【答案】 (1) $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$

(2) 见解析, 2

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理及其逆定理, 熟练掌握勾股定理及其逆定理是关键.

(1) 根据勾股定理求解即可;

(2) 根据勾股定理即可画出图形; 根据勾股定理的逆定理, 可证明 $\angle DEF = 90^\circ$, 即可根据直角三角形的面积公式求解.

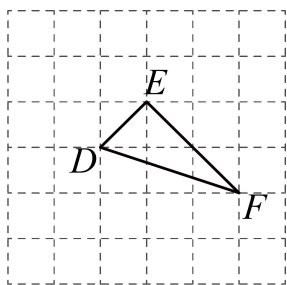
【小问 1 详解】

解: $BC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, $AB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

故答案为: $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$.

【小问 2 详解】

解: 如图, $\triangle DEF$ 就是所求作的图形;



$$\because DE = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad EF = 2\sqrt{2}, \quad DF = \sqrt{10},$$

$$\therefore DE^2 + EF^2 = (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 10 = DF^2,$$

$$\therefore \angle DEF = 90^\circ,$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} DE \cdot EF = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 2.$$

25. 新能源汽车采用电能作为动力来源，能减少二氧化碳气体的排放，达到保护环境的目的，其市场需求逐年上升. 一汽车销售公司抢占先机，购进一款进价为 12 万元/辆的某品牌新能源汽车，销售一段时间后发现：当该款汽车售价定为 25 万元/辆时，平均每周售出 8 辆；如果售价每降低 1 万元，平均每周多售出 2 辆. 若该店计划下调售价，使平均每周的销售利润为 144 万元. 为了推广新能源汽车，并且尽量让利于顾客，求该公司每辆车的下调价格.

【答案】该店每辆车的下调价格为 5 万元

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用，正确理解题意是解题的关键. 设该店每辆车的下调价格 x 万元，则降价后每辆车的利润为 $(25 - x - 12)$ 万元，销量为 $(8 + 2x)$ 辆，即可列方程求解.

【详解】解：设该店每辆车的下调价格 x 万元，

根据题意可得 $(25 - x - 12)(8 + 2x) = 144$,

整理得 $x^2 - 9x + 20 = 0$,

解得 $x_1 = 4$, $x_2 = 5$,

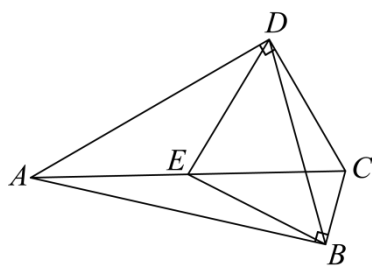
因为销售为了尽量让利于顾客，即下调价格应尽可能大，

所以 $x_1 = 4$ (舍去)，

$\therefore x = 5$,

答：该店每辆车的下调价格为 5 万元.

26. 如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 中， $\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$ ， E 是 AC 中点， $\angle DAB = 45^\circ$ ， $AC = 6$ ，



(1) 求证： $DE = BE$ ；

(2) 求线段 BD 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】本题主要考查了勾股定理，直角三角形的性质，等边对等角，熟知直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半是解题的关键.

(1) 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半证明即可；

(2) 先求出 $AE = DE = 3$ ，则由等边对等角和三角形外角的性质得到 $\angle DEC = 2\angle EAD$ ， $\angle BEC = 2\angle EAB$ ，则可证明 $\angle DEB = 2\angle DAB = 90^\circ$ ，再利用勾股定理即可得到答案.

【小问1 详解】

证明： $\because \angle ADC = 90^\circ$ ， E 是 AC 中点

$\therefore DE = \frac{1}{2}AC$ (直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半)

同理 $BE = \frac{1}{2}AC \quad \therefore DE = BE$

【小问2 详解】

解： $\because E$ 是 AC 中点，且 $AC = 6$ ， $\angle ADC = 90^\circ$

$\therefore AE = DE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 6 = 3$

$\angle EAD = \angle ADE$ (等边对等角)，

$\therefore \angle DEC = \angle EAD + \angle ADE = 2\angle EAD$ ，

同理 $\angle BEC = \angle EAB + \angle ABE = 2\angle EAB$ ，

$\therefore \angle DEC + \angle BEC = 2\angle EAD + 2\angle EAB = 2(\angle EAD + \angle EAB)$ ，即 $\angle DEB = 2\angle DAB$ ，

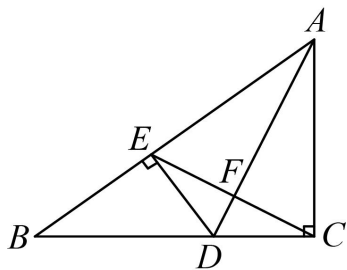
$\because \angle DAB = 45^\circ$

$\therefore \angle DEB = 90^\circ$ ，

$\therefore BD^2 = BE^2 + DE^2$

$\therefore BD = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.

27. $\triangle ABC$ 中， $\angle ACD = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $BC = 8$ ， $AC = 6$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ， $DE \perp AB$ ，垂足为点 E . 连接 CE ，交 AD 于点 F .



(1) 证明 $AF \perp CE$.

(2) 求 $\triangle BDE$ 的周长；

(3) 求 $\triangle ADC$ 的面积.

【答案】(1) 见解析 (2) 12

(3) 9

【解析】

【分析】(1) 利用条件证明 $\triangle AED \cong \triangle ACD$ ，利用等腰三角形的三线合一的性质可证明结论；

(2) 由勾股定理可求得 BC 的长，再利用 (1) 的结论可求得 BE ，且 $DE = DC$ ，可求得 BDE 的周长；

(3) 根据勾股定理求出 $DE = DC = 3$ ，再利用面积公式求解即可.

【小问 1 详解】

证明： $\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ，

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD,$$

$$\because DE \perp AB,$$

$$\therefore \angle AED = \angle ACB = 90^\circ,$$

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$$\begin{cases} \angle EAD = \angle CAD \\ \angle DEA = \angle DCA \\ AD = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle ACD (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = AC,$$

$$\because AD \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore AD \perp CE;$$

【小问 2 详解】

解： $\because AB = 10, BC = 8, AC = 6$ ，

$$\therefore AE = AC = 6,$$

$$\therefore BE = AB - AE = 10 - 6 = 4,$$

又 $\because \triangle AED \cong \triangle ACD$ ，

$$\therefore DC = DE,$$

$$\therefore BE + BD + DE = BE + BD + CD = BE + BC = 4 + 8 = 12,$$

即 BDE 的周长为 12；

【小问 3 详解】

解： 由 (2) 知 $DC = DE$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中， $BE = 4$ ， $BD = 8 - DE$ ，

$$\text{又 } BE^2 + DE^2 = BD^2,$$

$$\therefore 4^2 + DE^2 = (8 - DE)^2,$$

解得 $DE = 3$,

$$\therefore CD = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot DC = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9.$$

【点睛】 本题考查的是角平分线的性质、三角形全等的判定和性质、勾股定理、三角形的面积公式，正确理解题意、灵活运用相关的性质和定理是解题的关键.

28. 综合与实践

【阅读理解】

背景介绍：勾股定理是几何学中的明珠，充满着智慧. 赵爽的证明方法是：制作四个全等的直角三角形，直角边长分别记为 a 、 b ($b \geq a$)，斜边长记为 c . 用这四个直角三角形拼成如图 1 所示的正方形（赵爽弦图）. 用它可以证明勾股定理. 证明思路是：大正方形的面积有两种求法，方法 1：利用正方形面积公式算得大正方形面积为 c^2 ；方法 2：把大正方形面积看作四个直角三角形与中间一个小正方形的面积之和. 再根据以上结果，就可以证明勾股定理. 这里用两种求法来表示同一个量从而得到等式或方程的方法，我们称之为“双求法”.

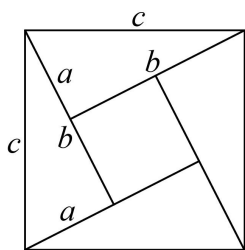


图 1

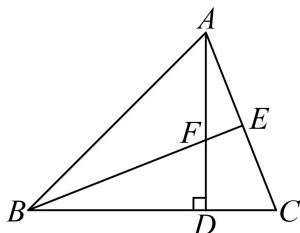


图 2

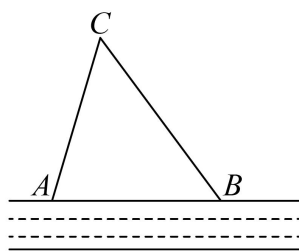
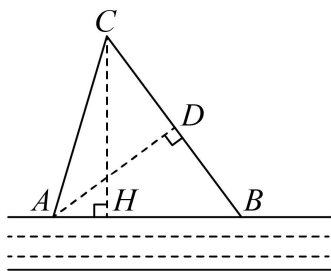


图 3



(1) 请根据上面的叙述，给出勾股定理证明过程.

【方法运用】

根据背景介绍，探索勾股定理新的证法：把两个全等的直角三角形 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BDF$ 如图 2 放置（其中 B 、 D 、 C 在同一条直线上， A 、 F 、 D 在同一条直线上），其中 $DC = DF = a$ ， $BD = AD = b$ ， $AC = BF = c$ ，延长 BF 与 AC 交于点 E .

(2) 连接 AB ，请利用“双求法”证明： $a^2 + b^2 = c^2$ ；

【应用拓展】

(3) 如图 3，在一条东西走向河流的一侧有一村庄 C ，河边原有两个取水点 A 、 B ，测得 $AB = AC = 500$ 米， $BC = 600$ 米。后来为了方便村民就近取水，决定在河边新建第三个取水点 H (A 、 H 、 B 在同一条直线上)，要求 CH 的长度最短。求新修道路 CH 的长。

【答案】 (1) 见解析；(2) 见解析；(3) 480 米

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理的证明及勾股定理的应用，正确理解勾股定理的证明方法是关键。

(1) 根据题意先分别表示各图形的面积，再探究面积之间的关系即可；

(2) 根据 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle FDC} + S_{\triangle AFC}$ 和 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BE$ 计算来证明即可；

(3) 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D ，过点 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H ，先根据勾股定理求出 $AD = 400$ 米，再根据 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH = \frac{1}{2}BC \cdot AD$ 求解即可。

【详解】 证明：(1) 方法 1：正方形的面积 $= c^2$ ，

方法 2：正方形的面积 $= 4 \times \frac{1}{2}ab + (b-a)^2 = a^2 + b^2$ ，

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$

(2) $\because \triangle ADC \cong \triangle BDF$

$$\therefore \angle DAC = \angle DBF$$

$$\because \angle BDF = 90^\circ$$

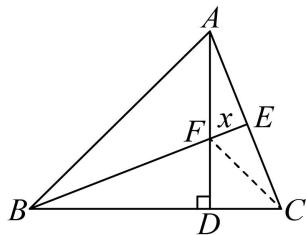
$$\therefore \angle DBF + \angle BFD = 90^\circ$$

$$\because \angle BFD = \angle AFE$$

$$\therefore \angle DAC + \angle AFE = 90^\circ$$

$$\text{即 } \angle AEF = 90^\circ$$

连接 FC ，设 $EF = x$

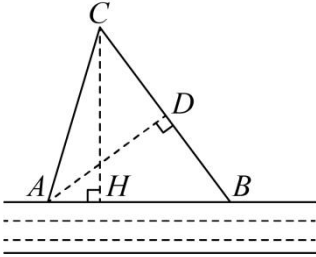


$$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle FDC} + S_{\triangle AFC} = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}cx, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BE = \frac{1}{2}c(c+x) = \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}cx,$$

$$\therefore \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}cx = \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}cx,$$

$$\text{即 } a^2 + b^2 = c^2;$$

(3) 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D , 过点 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H ,



$$\therefore AD^2 + CD^2 = AC^2$$

$$\because AB = AC = 500 \text{ 米}, \quad BC = 600 \text{ 米}, \quad BC \perp AD,$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}BC = 300 \text{ (米)},$$

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{500^2 - 300^2} = 400 \text{ (米)},$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH = \frac{1}{2}BC \cdot AD,$$

$$\therefore 500CH = 600 \times 400,$$

$$\therefore CH = \frac{2400}{5} = 480 \text{ (米)}.$$