

2025-2026 学年八年级上学期期末模拟卷 01

数学·全解全析

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 测试范围: 沪教版新教材八年级上册 (实数+二次根式+一元二次方程+直角三角形)。

第一部分 (选择题 共 18 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分。在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的)

1. 下列方程中是关于 x 的一元二次方程的是 ()

- A. $x(x-5)=0$ B. $ax^2-3=0$ C. $x^2-\frac{1}{x}=2$ D. $2x-x^3=1$

【答案】A

【详解】解: A. $x(x-5)=0$ 是一元二次方程, 故 A 符合题意;

B. $ax^2-3=0$ 中 $a=0$ 时, 不是一元二次方程, 故 B 不符合题意;

C. $x^2-\frac{1}{x}=2$ 不是整式方程, 故 C 不符合题意;

D. $2x-x^3=1$ 的最高次数是 3, 故 D 不符合题意。

故选: A.

2. 下列二次根式中, 属于最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{0.5}$ B. $\sqrt{9a}$ C. $\sqrt{a^2+b^2}$ D. $\sqrt{\frac{a}{2}}$

【答案】C

【详解】解: 最简二次根式需满足被开方数不含分母且不含能开得尽方的因数或因式,

A: $\sqrt{0.5} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, 被开方数含分母, 不是最简二次根式, 故该选项不合题意;

B: $\sqrt{9a} = 3\sqrt{a}$, 被开方数含平方因数 9, 不是最简二次根式, 故该选项不合题意;

C: $\sqrt{a^2+b^2}$, 被开方数不含分母且不含平方因式, 是最简二次根式, 故该选项符合题意;

D: $\sqrt{\frac{a}{2}}$, 被开方数含分母, 不是最简二次根式, 故该选项不合题意.

故选: C.

3. 若 $\sqrt{(2a-1)^2} = 1-2a$, 则 a 的取值范围为 ()

A. $a < \frac{1}{2}$

B. $a > \frac{1}{2}$

C. $a \leq \frac{1}{2}$

D. $a \geq \frac{1}{2}$

【答案】C

【详解】解: $\because \sqrt{(2a-1)^2} = |2a-1|$,

$$\therefore |2a-1| = 1-2a,$$

$$\therefore 1-2a \geq 0,$$

$$\text{解得: } a \leq \frac{1}{2}.$$

故选: C.

4. 在实数范围内因式分解: x^2-2x-1 , 下列选项中正确的是 ()

A. $(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$

B. $(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$

C. $(x-1+2\sqrt{2})(x-1-2\sqrt{2})$

D. $(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})$

【答案】B

【详解】解: $\because$ 对于 $x^2-2x-1=0$, 判别式 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4+4=8$,

$$\therefore \text{根为 } x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{因式分解为 } [x-(1+\sqrt{2})][x-(1-\sqrt{2})] = (x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2}),$$

故选: B.

5. $5-\sqrt{3}$ 的整数部分和小数部分分别是 ()

A. 0 和 $5-\sqrt{3}$

B. 3 和 $2-\sqrt{3}$

C. 3 和 $\sqrt{3}-1$

D. 3 和 0.26794919

【答案】B

【详解】解: $\because 1 < \sqrt{3} < 2$, 即 $-2 < -\sqrt{3} < -1$,

$$\therefore 3 < 5-\sqrt{3} < 4,$$

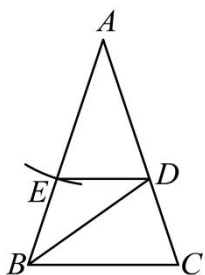
$\therefore$ 整数部分为 3,

$\therefore$ 小数部分为 $5 - \sqrt{3} - 3 = 2 - \sqrt{3}$.

$\therefore 5 - \sqrt{3}$ 的整数部分为 3, 小数部分为 $2 - \sqrt{3}$.

故选 B.

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D 在边 AC 上且到边 AB 和边 BC 的距离相等. 以点 A 为圆心, 线段 AD 的长为半径画弧交边 AB 于点 E , 连接 DE . 下列结论中, 不一定正确的是 ()



A. $BE = DE$

B. $BD = BC$

C. $\angle AED = 2\angle BDE$

D. $\frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{DE}{BC}$

【答案】B

【详解】解: 由作图可知: $AD = AE$,

$$\therefore \angle AED = \angle ADE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A),$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A),$$

$$\therefore \angle AED = \angle ABC,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EDB = \angle CBD,$$

$\therefore$ 点 D 在边 AC 上且到边 AB 和边 BC 的距离相等,

$$\therefore BD \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC,$$

$$\therefore \angle EDB = \angle EBD = \frac{1}{2}\angle ABC,$$

$\therefore BE = DE$, $\angle AED = \angle ABC = 2\angle BDE$; 故选项 A, C 正确, 不符合题意;

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{DE}{BC} \quad (\text{平行线间的距离处处相等}); \text{故选项 D 正确, 不符合题意};$$

无法得到 $BD = BC$;

故选: B.

第二部分 (非选择题 共 82 分)

二、填空题 (本大题共 12 小题, 每小题 2 分, 满分 24 分)

7. 用科学记数法表示: $0.000456 =$ _____.

【答案】 4.56×10^{-4}

【详解】解: $\because 0.000456 = 4.56 \times 10^{-4}$,

故答案为: 4.56×10^{-4} .

8. 已知: $11.12 \approx 3.335^2$, $111.2 \approx 10.545^2$, 那么 $\sqrt{1.112} \approx$ _____.

【答案】 1.0545

【详解】解: 由 $111.2 \approx 10.545^2$, 得 $\sqrt{111.2} \approx 10.545$.

$\because 111.2 = 100 \times 1.112$,

$\therefore \sqrt{111.2} = \sqrt{100 \times 1.112} = 10 \times \sqrt{1.112}$,

$\therefore 10 \times \sqrt{1.112} \approx 10.545$,

$\therefore \sqrt{1.112} \approx \frac{10.545}{10} = 1.0545$.

故答案为: 1.0545.

9. 不等式 $-\sqrt{5}x - 1 > 2x$ 的解集是 _____.

【答案】 $x < 2 - \sqrt{5}$

【详解】解: $-\sqrt{5}x - 1 > 2x$,

$-\sqrt{5}x - 2x > 1$,

$-(\sqrt{5} + 2)x > 1$,

由于 $\sqrt{5} + 2 > 0$, 所以 $-(\sqrt{5} + 2) < 0$, 除以负数时不等号方向改变, 得:

$x < \frac{1}{-(\sqrt{5} + 2)}$,

即 $x < -\frac{1}{\sqrt{5} + 2}$.

分子分母同乘 $\sqrt{5}-2$ ，得：

$$x < -\frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5})^2-2^2} = -\frac{\sqrt{5}-2}{5-4} = -(\sqrt{5}-2) = 2-\sqrt{5},$$

故答案为： $x < 2-\sqrt{5}$.

10. 等腰直角三角形的腰长为 5 cm，则这个三角形的周长是_____ cm.

【答案】 $(10+5\sqrt{2})$

【详解】解： $\because$ 等腰直角三角形的腰长为 5cm，

$\therefore$ 两腰之和为 $5+5=10\text{cm}$ ，

$\therefore$ 斜边长为 $\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}\text{cm}$ ，

$\therefore$ 周长为 $(10+5\sqrt{2})\text{cm}$.

故答案为： $(10+5\sqrt{2})$.

11. n 个球队参加比赛，每两队之间进行一场比赛，比赛总场数为 15 场，则 $n =$ _____.

【答案】 6

【详解】解：依题意，比赛总场数为 $\frac{n(n-1)}{2}=15$ ，

整理得 $n(n-1)=30$ ，

即 $n^2-n-30=0$ ，

因式分解得 $(n-6)(n+5)=0$ ，

$\therefore n-6=0$ ， $n+5=0$ ，

解得： $n=6$ 或 $n=-5$ （舍去）.

故答案为： 6.

12. 已知关于 x 的方程 $3x^2-2x+m=0$ 有两个实数根，那么实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \leq \frac{1}{3}$

【详解】解： $\because$ 关于 x 的方程 $3x^2-2x+m=0$ 有两个实数根，

$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times m = 4 - 12m \geq 0$ ，

解得 $m \leq \frac{1}{3}$ ，

故答案为: $m \leq \frac{1}{3}$.

13. 比较大小: $\sqrt{5} + \sqrt{11}$ _____ $\sqrt{6} + \sqrt{10}$ (填“>”“<”或“=”).

【答案】<

【详解】解: 设 $A = \sqrt{5} + \sqrt{11}$, $B = \sqrt{6} + \sqrt{10}$.

$$\because A^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{11})^2 = 5 + 2\sqrt{55} + 11 = 16 + 2\sqrt{55},$$

$$B^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{10})^2 = 6 + 2\sqrt{60} + 10 = 16 + 2\sqrt{60},$$

$$\text{又} \because \sqrt{60} > \sqrt{55},$$

$$\therefore 2\sqrt{60} > 2\sqrt{55},$$

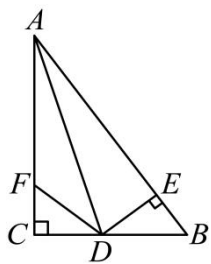
$$\therefore B^2 > A^2,$$

$\because A, B$ 均为正数,

$$\therefore B > A, \text{ 即 } \sqrt{5} + \sqrt{11} < \sqrt{6} + \sqrt{10},$$

故答案为: <.

14. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, AD 平分 $\angle BAC$, $DE \perp AB$ 于点 E , 点 F 在 AC 上, $BD = DF$, $AB = 15$, $AF = 9$, 则 FC 的长为_____.



【答案】3

【详解】解: $\because \angle C = 90^\circ$, AD 平分 $\angle BAC$, $DE \perp AB$,

$$\therefore DE = DC,$$

在 $\text{Rt}\triangle DBE$ 与 $\text{Rt}\triangle DFC$ 中

$$\begin{cases} DE = DC \\ BD = FD \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle DBE \cong \text{Rt}\triangle DFC (\text{HL}),$$

$$\therefore BE = DC,$$

在 $Rt\triangle ACD$ 与 $Rt\triangle AED$ 中

$$\begin{cases} AD = AD \\ DC = DE \end{cases}$$

$$\therefore Rt\triangle ACD \cong Rt\triangle AED (HL),$$

$$\therefore AC = AE,$$

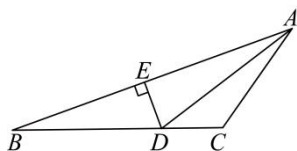
$$\therefore AF + FC = AB - BE,$$

$$\because AB = 15, \quad AF = 9,$$

$$\therefore FC = \frac{AB - AF}{2} = 3,$$

故答案为: 3.

15. 如图, AD 是 $\triangle BAC$ 的角平分线, $DE \perp AB$ 于点 E , $S_{\triangle ABC} = 16$, $DE = 2$, $AB = 12$, 则边 AC 的长是_____.



【答案】4

【详解】解: 作 $DF \perp AC$ 于点 F ,

$\because AD$ 是 $\triangle BAC$ 的角平分线, $DE \perp AB$ 于点 E ,

$$\therefore DF = DE = 2,$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times AB \times DE = \frac{1}{2} \times 12 \times 2 = 12,$$

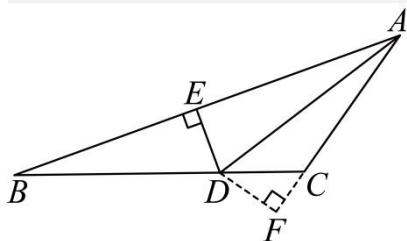
$$\because S_{\triangle ABC} = 16,$$

$$\therefore S_{\triangle ADC} = 4, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times AC \times DF = 4,$$

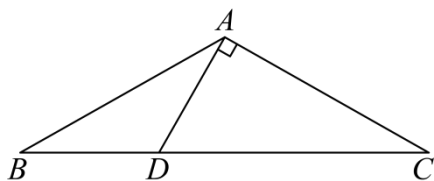
$$\because DF = DE = 2,$$

$$\therefore AC = 4,$$

故答案为: 4.



16. 如图, 已知 $\triangle ABC$, $AB = AC$, 点 D 在 BC 边上, $\angle DAC = 90^\circ$, $AD = \frac{1}{2}CD$, 那么 $\angle BAC$ 的度数是_____.



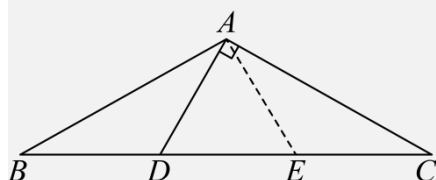
【答案】 120°

【详解】解: $\because AB = AC$,

$\therefore \angle B = \angle C$,

$\because \angle DAC = 90^\circ$, $AD = \frac{1}{2}CD$.

如图, 取 CD 的中点 E , 连接 AE ,



$\therefore AE = DE = CE = \frac{1}{2}CD$,

$\therefore AE = DE = AD$,

$\therefore \triangle ADE$ 为等边三角形,

$\therefore \angle ADC = 60^\circ$,

$\therefore \angle C = 90^\circ - \angle ADC = 30^\circ$,

$\therefore \angle B = \angle C = 30^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle C = 120^\circ$.

故答案为: 120° .

17. 设方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 有两个根 x_1 和 x_2 , 且 $1 < x_1 < 2 < x_2 < 4$, 那么方程 $cx^2 - bx + a = 0$ 的较小根 x_3 的范围为_____.

【答案】 $-1 < x_3 < -\frac{1}{2}$

【详解】解: $\because$ 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两根为 x_1 和 x_2 ,

$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$,

设方程 $cx^2 - bx + a = 0$ 的两根为 m 和 n ,

则 $m+n=\frac{b}{c}$, $mn=\frac{a}{c}$,

$$\therefore m+n=\frac{b}{c}=-\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{a}{c}\right)=-(x_1+x_2)\cdot\frac{1}{x_1x_2}=-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right), \quad mn=\frac{a}{c}=\frac{1}{x_1x_2},$$

$\therefore$ 方程 $cx^2-bx+a=0$ 的两根为 $-\frac{1}{x_1}$ 和 $-\frac{1}{x_2}$,

$$\therefore 1 < x_1 < 2 < x_2 < 4,$$

$$\therefore \frac{1}{2} < \frac{1}{x_1} < 1, \quad \frac{1}{4} < \frac{1}{x_2} < \frac{1}{2},$$

$$\therefore -1 < -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} < -\frac{1}{x_2} < -\frac{1}{4},$$

$$\therefore -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2},$$

$\therefore$ 方程 $cx^2-bx+a=0$ 的较小根 x_3 的范围为 $-1 < x_3 < -\frac{1}{2}$.

故答案为: $-1 < x_3 < -\frac{1}{2}$.

1. 我们新定义一种三角形: 两边的平方和等于第三边平方的 2 倍的三角形叫做“可爱三角形”. 若 $\text{Rt}\triangle ABC$ 是“可爱三角形”, $\angle C=90^\circ$, $AC=2\sqrt{2}$, 则 $AB=$ _____.

【答案】 $2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{6}$

【详解】解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=2\sqrt{2}$, 设 $BC=a$, $AB=c$, 则根据勾股定理, 有 $AC^2+BC^2=AB^2$, 即 $8+a^2=c^2$,

由“可爱三角形”的定义, 需考虑三种情况:

①若 $AC^2+BC^2=2AB^2$, 但 $AC^2+BC^2=AB^2$, 前后矛盾, 故不成立;

②若 $AC^2+AB^2=2BC^2$, 即 $8+c^2=2a^2$, 则 $c^2=2a^2-8$ 代入 $8+a^2=c^2$,

得 $8+a^2=2a^2-8$, 整理得 $a^2=16$,

解得 $a=4$ (负根舍去), 则 $c^2=8+16=24$,

$\therefore c=2\sqrt{6}$ (负根舍去), 即 $AB=2\sqrt{6}$;

③若 $BC^2+AB^2=2AC^2$, 即 $a^2+c^2=2\times 8=16$, 则 $c^2=16-a^2$ 代入 $8+a^2=c^2$,

得 $8+a^2=16-a^2$, 整理得 $2a^2=8$,

解得 $a^2=4$, 则 $c^2=8+4=12$,

$\therefore c=2\sqrt{3}$ (负根舍去), $AB=2\sqrt{3}$;

综上所述: $AB=2\sqrt{6}$ 或 $AB=2\sqrt{3}$;

故答案为： $2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{6}$.

三、解答题（本大题共 8 小题，58 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

19. (3 分) 计算： $\sqrt{\frac{1}{x}} \div 3\sqrt{4x^3} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{9x^4}$

【详解】解：(1) 原式 $= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{x^4}}{4}$

$$= \frac{1}{6\sqrt{x^4}} \cdot \frac{3\sqrt{x^4}}{4} \cdots \cdots (1 \text{ 分})$$
$$= \frac{3}{24} \cdots \cdots (2 \text{ 分})$$
$$= \frac{1}{8}; \cdots \cdots (3 \text{ 分})$$

20. (6 分) 解方程：

(1) $2(x-4)^2 = x^2 - 16$; (2) $\frac{2}{x+2} - \frac{16}{x^2-4} = \frac{x+2}{2-x}$.

【详解】(1) 解： $2(x^2 - 8x + 16) = x^2 - 16$,

$$2x^2 - 16x + 32 = x^2 - 16,$$

$$x^2 - 16x + 48 = 0,$$

$$(x-12)(x-4) = 0,$$

$$x-12=0 \text{ 或 } x-4=0,$$

$$x_1 = 12, \quad x_2 = 4. \cdots \cdots (3 \text{ 分})$$

(2) 解： $\frac{2}{x+2} - \frac{16}{x^2-4} - \frac{x+2}{2-x} = 0$,

$$\frac{2}{x+2} - \frac{16}{x^2-4} + \frac{x+2}{x-2} = 0,$$

$$2(x-2) - 16 + (x+2)^2 = 0,$$

$$2x - 4 - 16 + x^2 + 4x + 4 = 0,$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0,$$

$$(x+8)(x-2) = 0,$$

$$x+8=0 \text{ 或 } x-2=0,$$

$$x_1 = -8, \quad x_2 = 2,$$

$\therefore x=2$ 是方程的增根,

$\therefore x=2$ 舍去,

$\therefore x=-8$. $\cdots\cdots$ (6 分)

21. (6 分) 先化简, 再求值: 已知 $x=2-\sqrt{3}$, $y=2+\sqrt{3}$, 求 $\left(\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)\div\frac{x-y+1}{\sqrt{x}}$ 的值.

【详解】解: $\left(\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)\div\frac{x-y+1}{\sqrt{x}}$

$$=\left[\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right]\div\frac{x-y+1}{\sqrt{x}}$$

$$=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)\div\frac{x-y+1}{\sqrt{x}}$$

$$=\left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)\div\frac{x-y+1}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x-y+1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{x-y+1}$$

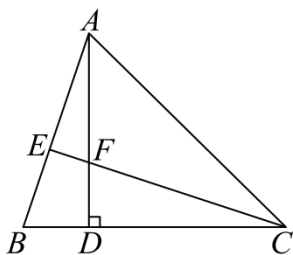
$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$=\frac{x+\sqrt{xy}}{x-y}; \cdots\cdots (4 \text{ 分})$$

当 $x=2-\sqrt{3}$, $y=2+\sqrt{3}$ 时,

$$\text{原式}=\frac{2-\sqrt{3}+\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}}{2-\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})}=\frac{2-\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}. \cdots\cdots (6 \text{ 分})$$

22. (7 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$ 于点 D , E 为 AB 边上一点, 且 $AB=CF$, $BD=DF$. 连接 CF 并延长交 AB 于点 E .



(1)若 $CD = 10$, $DF = 4$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2)试判断 AB 与 CE 之间的位置关系, 并说明理由.

【详解】(1) 解: $\because AD \perp BC$,

$$\therefore \angle ADB = \angle CDF = 90^\circ ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 和 $\text{Rt}\triangle CFD$ 中,

$$\begin{cases} AB = CF \\ BD = FD \end{cases} ,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle CFD (\text{HL})$$

$$\therefore AD = CD = 10 ,$$

$$\text{又} \because BD = DF = 4 ,$$

$$\therefore BC = BD + CD = DF + CD = 14 .$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \times 14 \times 10 = 70 ; \cdots \cdots (4 \text{ 分})$$

(2) 解: $AB \perp CE$. 理由:

$$\because AD \perp BC ,$$

$$\therefore \angle CDF = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle B = 90^\circ ,$$

$$\because \triangle ABD \cong \triangle CFD ,$$

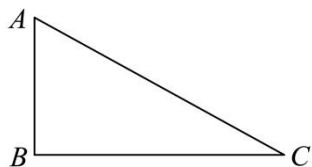
$$\therefore \angle BAD = \angle DCF ,$$

$$\therefore \angle FCD + \angle B = 90^\circ .$$

$$\therefore \angle BEC = 180^\circ - (\angle FCD + \angle B) = 90^\circ .$$

$$\therefore AB \perp CE . \cdots \cdots (7 \text{ 分})$$

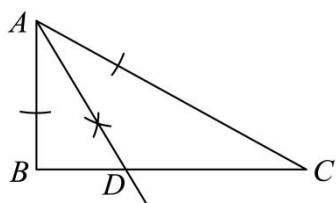
23. (7 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle B = 90^\circ$.



(1)尺规作图: 在边 BC 上作一点 D , 使得点 D 到边 AB 与边 AC 的距离相等 (不写作法, 保留作图痕迹);

(2)若 $CD = 4\text{cm}$, 求 AB 的长.

【详解】(1) 解: 点 D 如图所示:



..... (3 分)

(2) 解: $\because \angle ACB = 30^\circ$, $\angle B = 90^\circ$.

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

由 (1) 的作图痕迹, 得出 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线,

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ = \angle ACB,$$

$$\therefore AD = CD = 4\text{cm},$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $BD = \frac{1}{2}AD = 2\text{cm},$

$$\therefore AB = \sqrt{AD^2 - BD^2} = 2\sqrt{3}(\text{cm}). \text{..... (7 分)}$$

24. (8 分) 某建筑工程队, 计划在工地一边的靠墙处 (利用墙, 墙长 100 米), 用 170 米长的建筑材料围成一个长方形仓库,

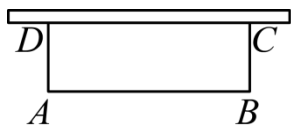


图1

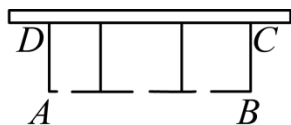


图2

(1) 如果长方形仓库 (如图 1) 占地面积为 1500 平方米, 求与墙垂直的边 AD 的长;

(2) 为了便于分类存放和搬运货物, 现决定改变计划, 用原有建筑材料建造并分割出三个小仓库, 并在与墙平行的边 AB 上, 每个仓库预留出 1 个长度为 2 米的门 (如图 2), 长方形 $ABCD$ 面积扩大到 2000 平方米, 若能, 求与墙垂直的边 AD 的长; 若不能, 请说明理由.

【详解】(1) 解: 设与墙垂直的边 AD 的长为 $x\text{m}$, 则与墙平行的边 AB 的长为 $(170 - 2x)\text{m}$,

$$\text{由题意可得: } x(170 - 2x) = 1500,$$

$$\text{解得: } x_1 = 10, \quad x_2 = 75,$$

当 $x = 10$ 时, $170 - 2x = 170 - 2 \times 10 = 150 > 100$, 不符合题意;

当 $x = 75$ 时, $170 - 2x = 170 - 2 \times 75 = 20 < 100$, 符合题意;

$\therefore$ 与墙垂直的边 AD 的长为 75m; (4 分)

(2) 解: 不能, 理由如下:

设与墙垂直的边 AD 的长为 $y\text{m}$, 则与墙平行的边 AB 的长为 $(170 - 4y + 3 \times 2)\text{m}$,

由题意可得 $y(170-4y+3\times 2)=2000$,

整理可得: $y^2-44y+500=0$,

$\therefore \Delta = (-44)^2 - 4 \times 1 \times 500 = -64 < 0$,

$\therefore$ 原方程没有实数根,

$\therefore$ 不能使长方形 $ABCD$ 面积扩大到 2000 平方米. $\cdots\cdots$ (8 分)

25. (10 分) 配方法是中学数学的重要方法, 用配方法可求最大 (小) 值. 对于任意正实数 a, b , 可作如下变形 (提示: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$);

$$\therefore a+b = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2\sqrt{ab},$$

$$\text{又} \because (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0,$$

$$\therefore (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2\sqrt{ab} \geq 0 + 2\sqrt{ab}, \text{ 即 } a+b \geq 2\sqrt{ab}.$$

当且仅当 $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, 即 $a=b$ 时等号成立.



图1

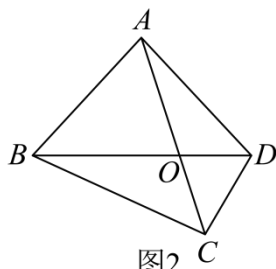


图2

(1) 若 $x > 0$, 代数式 $x + \frac{9}{x}$ 的最小值为 _____, 此时 $x =$ _____.

(2) 某园林设计师要对园林的一个区域进行设计改造, 一面利用墙体将该区域用篱笆围成中间隔有一道篱笆的矩形花圃, 如图 1 所示, 为了围成面积为 108m^2 的花圃, 所用的篱笆至少为多少米?

(3) 如图 2, 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , $\triangle AOB$ 、 $\triangle COD$ 的面积分别为 9 和 4, 求四边形 $ABCD$ 面积的最小值.

【详解】(1) 解: 由题意, 设 $a=x$, $b=\frac{9}{x}$,

$$\therefore \text{由 } a+b \geq 2\sqrt{ab}, \text{ 得 } x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = 6,$$

$\therefore$ 当且仅当 $x = \frac{9}{x}$, 即 $x=3$ (负值舍去) 时, 代数式取到最小值, 最小值为 6.

故答案为: 6; 3; $\cdots\cdots$ (2 分)

(2) 解: 由题意, 设花圃的宽为 x 米, 则长为 $\frac{108}{x}$ 米,

$$\therefore \text{所用的篱笆} = 3x + \frac{108}{x},$$

$$\text{又令 } a = 3x, \quad b = \frac{108}{x},$$

$$\therefore \text{由 } a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

$$\therefore 3x + \frac{108}{x} \geq 2\sqrt{3x \cdot \frac{108}{x}} = 36.$$

$$\therefore \text{当且仅当 } 3x = \frac{108}{x}, \text{ 即 } x = 6 \text{ (负值舍去) 时, 代数式取到最小值, 最小值为 } 36,$$

答: 所用的篱笆至少为 36 米. …… (6 分)

(3) 解: 由题意, 设 $S_{\triangle COB} = m$,

$\therefore \triangle COB$ 与 $\triangle COD$ 底边上的高相等, $\triangle AOB$ 与 $\triangle AOD$ 底边上的高相等,

$$\therefore \frac{OB}{OD} = \frac{S_{\triangle COB}}{S_{\triangle COD}} = \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOD}},$$

$$\therefore \frac{m}{4} = \frac{9}{S_{\triangle AOD}}.$$

$$\therefore S_{\triangle AOD} = \frac{36}{m}.$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = 9 + 4 + m + \frac{36}{m} = 13 + m + \frac{36}{m}.$$

$$\text{又} \therefore m + \frac{36}{m} \geq 2\sqrt{m \times \frac{36}{m}} = 12,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} \geq 13 + 12 = 25,$$

$$\therefore \text{当 } m = \frac{36}{m} \text{ 时, 即 } m = 6 \text{ (负值舍去) 时取等号.}$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 面积的最小值为 25. …… (10 分)

26. (11 分) 【了解概念】

如图, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$, $AB = AC$, $AD = AE$, $\angle BAC = \angle DAE$, 连接 CE , 连接 BD 并延长与 CE 交于点 F , 那么将 $\angle BFC$ 叫做 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 的底联角.

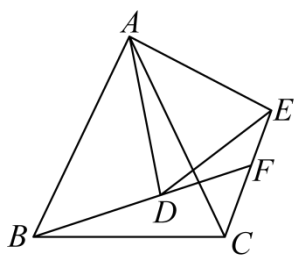


图1

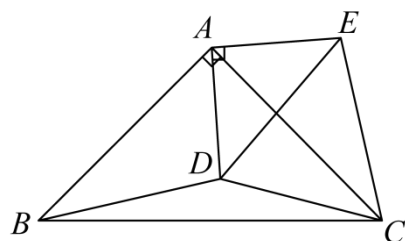


图2

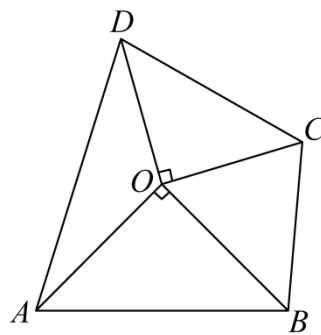


图3

【探究归纳】

(1)两个等腰三角形的底联角与这两个等腰三角形的顶角有怎样的数量关系？请用文字语言写出结论.

【拓展提升】运用（1）中的结论解决问题：

(2)如图， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ， $\angle DCE = 62^\circ$ ，求 $\angle BDC$ 的度数；

(3)如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 4$ ， $CD = 5$ ，点 O 为四边形 $ABCD$ 内一点，且 $OA = OB$ ， $OC = OD$ ， $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$ ，求 AD 的长.

【详解】（1）解：两个等腰三角形的底联角等于这两个等腰三角形的顶角.

理由：如图 1，

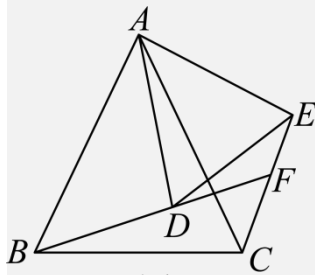


图1

$$\because \angle BAC = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle BAC - \angle CAD = \angle DAE - \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\because AB = AC, AD = AE,$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle ADB = \angle AEC,$$

$$\therefore \angle ADF + \angle AEC = \angle ADF + \angle ADB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE + \angle DFE = 180^\circ,$$

$$\because \angle BFC + \angle DFE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BFC = \angle BAE = \angle BAC; \dots\dots (4 \text{ 分})$$

（2）解：当点 D 在 $\triangle ABC$ 的内部时，如图 2 甲，延长 BD 交 CE 于点 F ，

$$\because AB = AC, AD = AE, \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BFC = \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\because \angle DCE = 62^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BFC + \angle DCE = 90^\circ + 62^\circ = 152^\circ;$$

当点 D 在 $\triangle ABC$ 的外部时，如图 2 乙， BD 交 CE 于点 F ，交 AC 于点 G ，

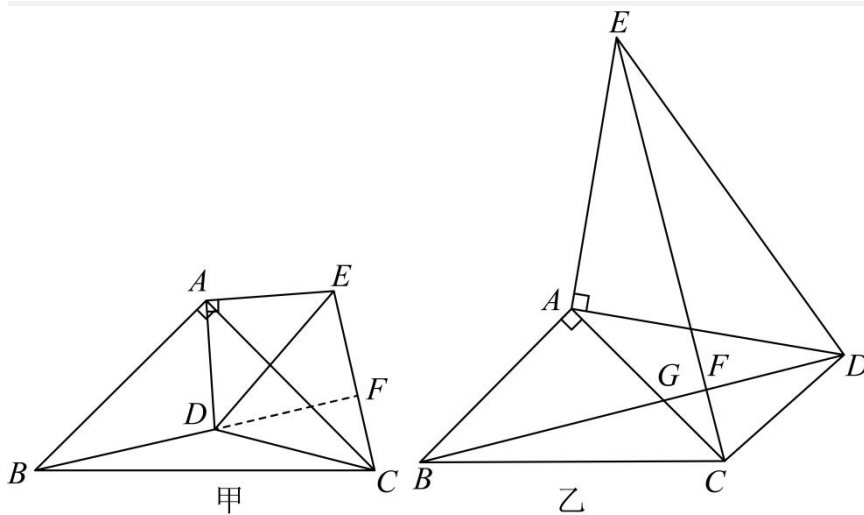


图2

$$\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE = 90^\circ + \angle CAD,$$

$$\because AB = AC, AD = AE,$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE,$$

$$\because \angle CGD = \angle AGB,$$

$$\therefore \angle ACE + \angle CGD = \angle ABD + \angle AGB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BFC - \angle DCE = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ,$$

综上所述, $\angle BDC = 152^\circ$ 或 $\angle BDC = 28^\circ$; (8分)

(3) 如图 3, 连接 AC 、 BD 交于点 F ,

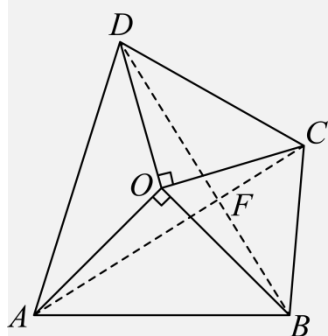


图3

$$\because OA = OB, OC = OD, \angle AOB = \angle COD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BFC = \angle COD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle AFD = \angle CFD = 90^\circ,$$

$$\therefore AD^2 = FA^2 + FD^2, \quad BC^2 = FB^2 + FC^2, \quad AB^2 = FA^2 + FB^2, \quad CD^2 = FC^2 + FD^2,$$

$$\therefore AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2 = FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2,$$

$$\therefore AB = 6, \quad BC = 4, \quad CD = 5,$$

$$\therefore AD^2 + 4^2 = 6^2 + 5^2,$$

$$\therefore AD = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore AD \text{ 的长为 } 3\sqrt{5}. \quad \cdots \cdots (11 \text{ 分})$$