

上海浦东新区民办欣竹中学 2025 学年第一学期数学学科八年级期末考 试卷

(考试时间: 90 分钟 满分: 100 分)

一、选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 下列说法正确的是 ()

A. $\sqrt{16}$ 的平方根是 ± 4

B. 负数没有立方根

C. 64 的立方根是 ± 4 ;

D. $(-5)^2$ 的算术平方根是 5

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查平方根、立方根、算术平方根的概念, 解题的关键是准确理解这些概念的定义. 分别对每个选项根据平方根、立方根、算术平方根的定义进行分析判断.

【详解】解: A、先计算 $\sqrt{16} = 4$, 4 的平方根是 ± 2 , 不是 ± 4 , 该选项错误;

B、负数有立方根, 例如 -8 的立方根是 -2 , 该选项错误;

C、64 的立方根是 4, 不是 ± 4 , 该选项错误;

D、先计算 $(-5)^2 = 25$, 25 的算术平方根是 5, 该选项正确.

故选: D.

2. 在下列各组二次根式中, 是同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{12}$

B. $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{2}}$

C. $\sqrt{2ab}$ 和 $\sqrt{ab^3}$

D. $\sqrt{a+1}$ 和 $\sqrt{a-1}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是同类二次根式的概念、二次根式的化简, 把几个二次根式化为最简二次根式后, 如果它们的被开方数相同, 就把这几个二次根式叫做同类二次根式.

根据二次根式的性质化简, 根据同类二次根式的概念判断即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, 故 $\sqrt{12}$ 和 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, 不符合题意;

B、 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 是同类二次根式, 符合题意;

C、 $\sqrt{ab^3}=|b|\sqrt{ab}$ ，故 $\sqrt{2ab}$ 和 $\sqrt{ab^3}$ 不是同类二次根式，不符合题意；

D、 $\sqrt{a-1}$ 和 $\sqrt{a+1}$ 不是同类二次根式，不符合题意；

故选：B.

3. 在下列关于 x 的一元二次方程中，一定有两个不相等的实数根的是（ ）

A. $x^2 - 3x - 1 = 0$

B. $3x^2 - x + 1 = 0$

C. $x^2 + 3 = 0$

D. $x^2 - 4x + 4 = 0$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根的判别式. 用根的判别式判断即可，若方程有两个不相等的实数根，则需 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

【详解】解：A、 $x^2 - 3x - 1 = 0$ ，

$$\therefore \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 13 > 0,$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根，本选项符合题意；

B、 $3x^2 - x + 1 = 0$ ，

$$\therefore \Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 1 = -11 < 0,$$

$\therefore$ 方程无实数根，本选项不符合题意；

C、 $x^2 + 3 = 0$ ，

$$\therefore \Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 3 = -12 < 0,$$

$\therefore$ 方程无实数根，本选项不符合题意；

D、 $x^2 - 4x + 4 = 0$ ，

$$\therefore \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0,$$

$\therefore$ 方程实有两个相等的实数根，本选项不符合题意；

故选：A.

4. 某工厂七月份的产值是 100 万元，计划第三季度共创产值 484 万元. 若每个月产值的增长率相同，并设这个增长率为 x ，则下列方程中正确的是（ ）

A. $100(1+x)^2 = 484$

B. $100(1+x)^3 = 484$

C. $(1+x)+100(1+x)^2=484$

D. $100[1+(1+x)+(1+x)^2]=484$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用，掌握增长率的计算方法是解题的关键；

根据每个月产值的平均增长率为 x ，七月份的产值是 100 万元，表示之后两个月的产值，然后已知第三季度的总产值，列方程即可．

【详解】解：∵每个月产值的平均增长率为 x ，七月份的产值是 100 万元，

∴八月份产值为 $100(1+x)$ ，

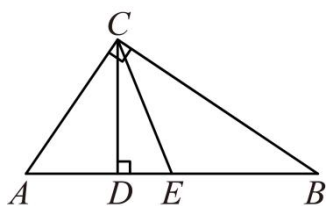
九月份产值为 $100(1+x)^2$ ，

∴计划第三季度共创产值 484 万元，

$$\therefore 100[1+(1+x)+(1+x)^2]=484,$$

故选：D．

5. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ．线段 CD 、 CE 分别为 ABC 的高和中线，下列说法中错误的是（ ）



A. $\angle B = \angle ACD$

B. $\angle BCE = \angle ACD$

C. $2CE = AB$

D. $2AC = AB$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了三角形的高和中线的性质，熟练掌握三角形高和中线的性质是解题的关键；

根据三角形高和中线的性质，结合图形对选项一一判断即可求解．

【详解】解：线段 CD 、 CE 分别为 ABC 的高和中线，

$$\therefore \angle CDB = \angle CDA = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle DCB = \angle B + \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACD, \text{ 故 A 选项正确, 不符合题意;}$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ，

$$\therefore CE = \frac{1}{2}AB = BE = AE,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle B,$$

$\therefore \angle BCE = \angle ACD$, 故 B 选项正确, 不符合题意;

$$\because CE = \frac{1}{2}AB,$$

$\therefore AB = 2CE$, 故选项 C 正确, 不符合题意;

根据题中条件无法推出 $AC = AE = CE$, 故无法推出 $2AC = AB$, 故选项 D 错误, 符合题意;

故选: D

6. 如图, 从 ABC 内一点 O 出发, 把 ABC 剪成三个三角形(如图 1), 边 AB, BC, AC 放在同一直线上, 点 O 都落在直线 MN 上 (如图 2), 直线 $MN \parallel AC$, 则点 O 是 ABC 的 ()

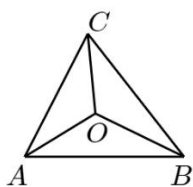


图1

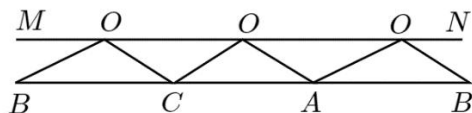


图2

- A. 三条角平分线的交点
- B. 三条高的交点
- C. 三条中线的交点
- D. 三边中垂线的交点

【答案】A

【解析】

【分析】根据平行线的性质可得点 O 到三边的距离相等, 点 O 是三角形三条角平分线的交点即可.

【详解】解: $\because$ 直线 $MN \parallel AC$,

根据平行线性质知点 O 到 BC 距离, 点 O 到 AC 距离, 点 O 到 BA 距离相等,

$\therefore$ 点 O 到三边的距离相等

$\therefore$ 点 O 是三角形三条角平分线的交点,

故选择 A.

【点睛】本题考查角平分线的性质, 掌握角平分线的性质是解题关键.

二、填空题 (每题 2 分, 共 24 分)

7. 比较大小: $3\sqrt{3}$ _____ $2\sqrt{7}$ (选填 “>”, “<”, “=”).

【答案】<

【解析】

【分析】 本题主要考查了实数的大小的比较，因为是两个无理数比较大小，所以应把根号外的数整理到根号内再行比较.

【详解】 解： $\because 3\sqrt{3} = \sqrt{27}$ ， $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$ ， $27 < 28$ ，

$$\therefore 3\sqrt{3} < 2\sqrt{7}.$$

故答案为： $<$.

8. 化简： $\sqrt{50mn^2} (n > 0) =$ _____.

【答案】 $5n\sqrt{2m}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的化简，将 50 分解为 25×2 ，利用 n^2 的算术平方根为 $n (n > 0)$ ，提取平方因子后化简.

【详解】 解： $\because n > 0$ ，

$$\therefore \sqrt{50mn^2} = 5n\sqrt{2m},$$

故答案为： $5n\sqrt{2m}$.

9. 如果关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + mx + 1 = 0$ 的两根为 1 和 $\frac{1}{2}$ ，那么多项式 $2x^2 + mx + 1$ 可分解为_____.

【答案】 $(2x-1)(x-1)$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解及因式分解，将 $x=1$ 代入原方程，求出 m 的值，然后再进行因式分解是解决问题的关键.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + mx + 1 = 0$ 有一个根是 1，

$$\therefore \text{把 } x=1 \text{ 代入，得 } 2+m+1=0,$$

解得： $m = -3$.

$$\text{则 } 2x^2 + mx + 1 = 2x^2 - 3x + 1 = (2x-1)(x-1)$$

故答案为： $(2x-1)(x-1)$.

10. 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 2x - 1 = 0$ 有实数根，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \geq -1$ 且 $m \neq 0$

【解析】

【分析】根据方程的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = [-2]^2 - 4 \times (-1) \times m \geq 0$ 且 $m \neq 0$ ，计算即可.

本题考查了根的判别式，熟练掌握判别式是解题的关键.

【详解】 $\because$ 一元二次方程 $mx^2 - 2x - 1 = 0$ 有实根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = [-2]^2 - 4 \times (-1) \times m \geq 0 \text{ 且 } m \neq 0,$$

解得 $m \geq -1$ 且 $m \neq 0$,

故答案为: $m \geq -1$ 且 $m \neq 0$.

11. 一块长方形绿地的面积为 1200 平方米，并且长比宽多 10 米，如果设长为 x 米，根据题意可列出方程 _____.

【答案】 $x(x-10) = 1200$

【解析】

【分析】本题考查列一元二次方程，设长为 x 米，则宽为 $(x-10)$ 米，根据面积等于长乘宽列方程即可.

【详解】解：如果设长为 x 米，则宽为 $(x-10)$ 米，

由此可得 $x(x-10) = 1200$,

故答案为: $x(x-10) = 1200$.

12. $\sqrt{28}$ 与最简二次根式 $5\sqrt{x-1}$ 为同类二次根式，则 $x =$ _____.

【答案】 8

【解析】

【分析】本题考查了同类二次根式，最简二次根式，掌握同类二次根式定义，最简二次根式定义是解题的关键. 化成最简二次根式后，根据被开方数相等解答即可.

【详解】解: $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$,

$\because \sqrt{28}$ 与最简二次根式 $5\sqrt{x-1}$ 为同类二次根式，

$$\therefore x-1 = 7,$$

$$\therefore x = 8.$$

故答案为: 8.

13. 若 α , β 是方程 $x^2 - 2x - 5 = 0$ 的两个实数根，则 $\alpha + \beta - \alpha\beta$ 的值为 _____.

【答案】 7

【解析】

【分析】 本题考查了代数式求值，一元二次方程根与系数的关系，准确的计算是解决本题的关键.
利用一元二次方程根与系数的关系，求出两根之和与两根之积，再代入表达式计算即可.

【详解】 解： $\because a, \beta$ 是方程 $x^2 - 2x - 5 = 0$ 的两个实数根，

$$\therefore a + \beta = -\frac{-2}{1} = 2, \quad a\beta = \frac{-5}{1} = -5,$$

$$\therefore a + \beta - a\beta$$

$$= 2 - (-5)$$

$$= 2 + 5$$

$$= 7.$$

故答案为： 7.

14. 已知点 $P(a, b)$ 在第三象限，则点 $P(a, b)$ 到 x 轴的距离为 _____.

【答案】 $-b$

【解析】

【分析】 直接利用第三象限内点的坐标特点得出答案.

【详解】 $\because P(a, b)$ 在第三象限，

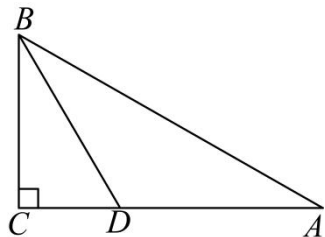
$$\therefore b < 0,$$

所以点 P 到 x 轴的距离 $|b| = -b$.

故答案为： $-b$.

【点睛】 此题主要考查了点的坐标，正确理解点的坐标特点是解题关键.

15. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， BD 平分 $\angle CBA$ ， 且交 AC 于点 D ， $AC = 1$ ， 那么 AD 的长是_____.



【答案】 $\frac{2}{3}$

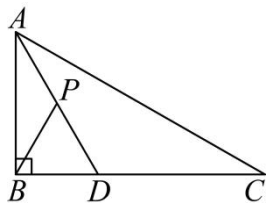
【解析】

【分析】 本题考查了含 30° 角的直角三角形的性质、角平分线定义以及等腰三角形的判定等知识，熟练掌握

含 30° 角的直角三角形的性质和等腰三角形的判定是解题的关键. 由直角三角形的性质和角平分线定义得 $\angle CBD = \angle ABD = 30^\circ = \angle A$, 则 $BD = 2CD$, $AD = BD = 2CD$, 得 $AC = 3CD$, 再求出 $CD = \frac{1}{3}$, 即可得出结论.

【详解】解: $\because \angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$,
 $\therefore \angle ABC = 60^\circ$,
 $\because BD$ 平分 $\angle CBA$,
 $\therefore \angle CBD = \angle ABD = 30^\circ = \angle A$,
 $\therefore BD = 2CD$, $AD = BD = 2CD$,
 $\therefore AC = 3CD$,
 $\because AC = 1$,
 $\therefore CD = \frac{1}{3}$,
 $\therefore AD = AC - CD = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
 故答案为: $\frac{2}{3}$.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, 点 D 是 BC 边上的一点, 点 P 是 AD 的中点, 若 AC 的垂直平分线经过点 D , $DC = 8$, 则 $BP =$ _____.



【答案】4

【解析】

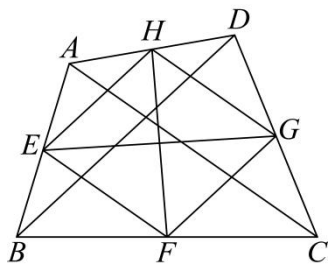
【分析】本题主要考查了线段垂直平分线的性质, 直角三角形的性质, 先根据线段垂直平分线的性质得 $DA = DC = 8$, 再根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半得出答案.

【详解】 $\because$ 点 D 在 AC 的垂直平分线上,
 $\therefore DA = DC = 8$.
 $\because \angle ABC = 90^\circ$, 点 P 是 AD 的中点,
 $\therefore BP = \frac{1}{2}AD = 4$.

故答案为: 4.

17. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, E 、 F 、 G 、 H 分别是边 AB 、 BC 、 CD 、 DA 的中点, 若 $AC = BD$,

且 $EG \cdot HF = 16$ ，则四边形 $EFGH$ 的面积为_____.



【答案】 8

【解析】

【分析】 本题主要考查了菱形的判定与性质、菱形的面积公式、三角形的中位线定理，根据中位线定理可证 $EF = EH = HG = GF$ ，根据四条边都相等的四边形是菱形可证四边形 $EFGH$ 是菱形，根据菱形的面积公式即可求出四边形 $EFGH$ 的面积.

【详解】 解： $\because E, F, G, H$ 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点，

$\therefore EF, EH, HG, GF$ 分别是 $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle DAC, \triangle CBD$ 的中位线，

$$\therefore EF = HG = \frac{1}{2}AC, \quad EH = GF = \frac{1}{2}BD,$$

$$\because AC = BD,$$

$$\therefore EF = EH = HG = GF,$$

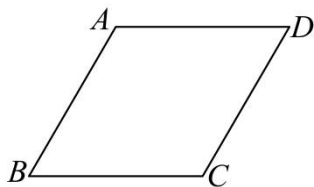
$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形，

$$\because EG \cdot HF = 16,$$

$$\therefore S_{\text{菱形}EFGH} = \frac{1}{2}EG \cdot HF = \frac{1}{2} \times 16 = 8.$$

故答案为： 8.

18. 在边长为 6 的菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ， 将菱形 $ABCD$ 绕点 B 旋转， 得到菱形 $A'BC'D'$ ， 其中点 D' 落在 BA 的延长线上， 那么 $\triangle C'D'D$ 的面积是_____



【答案】 $27 - 9\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了菱形的性质， 旋转的性质， 含 30° 度角的直角三角形的性质， 勾股定理等等， 连接 AC 交 BD 于 O ， 设 $C'D'$ ， AD 交于 F ， 由菱形的性质可得 $\angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC = 30^\circ$ ， $AC \perp BD$ ，

$BD = 2OB$, 则可得到 $OA = \frac{1}{2}AB = 3$, $OB = 3\sqrt{3}$, $BD = 2OB = 6\sqrt{3}$; 由旋转的性质可得 $BC' = BC = 6$,

$\angle A'BC' = \angle ABC = 60^\circ$, 则可证明 B 、 C' 、 D 三点共线, 得到 $DC' = BD - BC' = 6\sqrt{3} - 6$; 证明

$\angle C'FD = 90^\circ$, 得到 $C'F = \frac{1}{2}C'D = 3\sqrt{3} - 3$, 则 $DF = \sqrt{C'D^2 - C'F^2} = 9 - 3\sqrt{3}$, 据此根据三角形面积计算公式求解即可.

【详解】解: 如图所示, 连接 AC 交 BD 于 O , 设 $C'D'$, AD 交于 F ,

$\because$ 在边长为 6 的菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC = 30^\circ$, $AC \perp BD$, $BD = 2OB$,

$\therefore OA = \frac{1}{2}AB = 3$,

$\therefore OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = 3\sqrt{3}$,

$\therefore BD = 2OB = 6\sqrt{3}$;

由旋转的性质可得 $BC' = BC = 6$, $\angle A'BC' = \angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \angle A'BA = \angle ABC' = 30^\circ$,

$\therefore B$ 、 C' 、 D 三点共线,

$\therefore DC' = BD - BC' = 6\sqrt{3} - 6$;

$\because AB = AD$, $BC' = D'C'$,

$\therefore \angle ADB = \angle ABD = 30^\circ$, $\angle C'BD' = \angle C'D'B = 30^\circ$,

$\therefore \angle D'C'D = \angle C'BD' + \angle C'D'B = 60^\circ$,

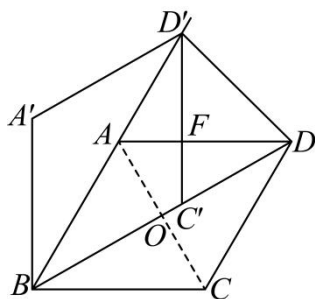
$\therefore \angle C'FD = 90^\circ$,

$\therefore C'F = \frac{1}{2}C'D = 3\sqrt{3} - 3$,

$\therefore DF = \sqrt{C'D^2 - C'F^2} = 9 - 3\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\triangle C'D'D} = \frac{1}{2}C'D' \cdot DF = \frac{1}{2} \times 6 \times (9 - 3\sqrt{3}) = 27 - 9\sqrt{3}$,

故答案为: $27 - 9\sqrt{3}$.



三、简答题 (7 题, 共 58 分)

19. 计算

$$(1) \left(\sqrt{12} - \sqrt{24} \right) \div \sqrt{3} - \frac{2}{2 + \sqrt{2}}$$

$$(2) a\sqrt{8a} - 2a^2\sqrt{\frac{1}{8a}} + 3\sqrt{2a^3} \quad (a > 0).$$

【答案】 (1)

$$-\sqrt{2}$$

(2)

$$\frac{9}{2}a\sqrt{2a}$$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，利用二次根式的性质化简，熟练掌握运算法则是解题的关键.

(1)先拆分根式除法并化简，再对分式分母有理化，最后去括号合并同类项，得出结果；

(2)先利用二次根式的性质化简，再进行加减计算.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & \left(\sqrt{12} - \sqrt{24} \right) \div \sqrt{3} - \frac{2}{2 + \sqrt{2}} \\ &= \sqrt{12} \div \sqrt{3} - \sqrt{24} \div \sqrt{3} - \frac{2(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} \\ &= \sqrt{4} - \sqrt{8} - (2 - \sqrt{2}) \\ &= 2 - 2\sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} \\ &= -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}
 \text{解: } & a\sqrt{8a} - 2a^2\sqrt{\frac{1}{8a}} + 3\sqrt{2a^3} \\
 &= 2a\sqrt{2a} - 2a^2 \times \frac{\sqrt{2a}}{4a} + 3a\sqrt{2a} \\
 &= 2a\sqrt{2a} - \frac{a\sqrt{2a}}{2} + 3a\sqrt{2a} \\
 &= \left(2 - \frac{1}{2} + 3\right)a\sqrt{2a} \\
 &= \frac{9}{2}a\sqrt{2a}.
 \end{aligned}$$

20. 解方程: $\frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = 1$.

【答案】 $x = -4$

【解析】

【分析】 本题考查解分式方程；先去分母，然后解一元二次方程，最后进行检验即可.

【详解】 解: $\frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = 1$

$$2x^2 - 8 = x(x-2)$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

解得 $x_1 = -4$, $x_2 = 2$

经检验, $x = 2$ 是增根, 应舍去.

故原方程的解为 $x = -4$.

21. 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - (3m-1)x + 2m-1 = 0$, 其根的判别式的值为 1, 求 m 的值及该方程的根.

【答案】 $m = 2$, $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 1$

【解析】

【分析】 根据根的判别式的值为 1, 求出 m 的值, 再利用求根公式进行求解即可.

【详解】 解: 由题意, 得: $\Delta = b^2 - 4ac = [-(3m-1)]^2 - 4m(2m-1) = 1$,

整理, 得: $m^2 - 2m = 0$,

解得: $m = 0$ (不合题意, 舍去) 或 $m = 2$;

$\therefore$ 一元二次方程化为: $2x^2 - 5x + 3 = 0$,

$$\therefore \Delta = 1 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{5 \pm 1}{4},$$

$$\therefore x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 1.$$

【点睛】 本题考查根的判别式，公式法解一元二次方程．解题的关键是掌握根的判断式为 $\Delta = b^2 - 4ac$ ．

22. 阅读下列材料：利用完全平方公式，将多项式 $x^2 + bx + c$ 变形为 $(x + m)^2 + n$ 的形式，然后由

$(x + m)^2 \geq 0$ 就可求出多项式 $x^2 + bx + c$ 的最小值．

例题：求多项式 $x^2 - 4x + 5$ 的最小值．

解： $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1$ ．因为 $(x - 2)^2 \geq 0$ 所以 $(x - 2)^2 + 1 \geq 1$

当 $x = 2$ 时， $(x - 2)^2 + 1 = 1$ 因此 $(x - 2)^2 + 1$ 有最小值，最小值为 1，即 $x^2 - 4x + 5$ 的最小值为 1．

通过阅读，理解材料的解题思路，请解决以下问题：

(1) 【理解探究】

已知代数式 $A = x^2 + 10x + 20$ ，则 A 的最小值为_____；

(2) 【类比应用】

张大爷家有甲、乙两块长方形菜地，已知甲菜地的两边长分别是 $(3a + 2)$ 米、 $(2a + 5)$ 米，乙菜地的两边长分别是 $5a$ 米、 $(a + 5)$ 米，求这两块菜地的面积 $S_{\text{甲}}$ 和 $S_{\text{乙}}$ 的差并比较两块菜地的大小，并说明理由；

【答案】 ①.

-5 ②.

$S_{\text{甲}} > S_{\text{乙}}$ ，理由见解析

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式分解因式，非负数的性质，理解题意是解题的关键．

(1) 仿照材料的方法将代数式 $x^2 + 10x + 20$ 变形为 $(x + 5)^2 - 5$ ，再利用非负数的性质即可求出最小值；

(2) 用长方形面积公式分别表示出甲乙两块菜地的面积，再利用作差法比较大小即可得出结论．

【详解】 解：(1) $A = x^2 + 10x + 20 = x^2 + 10x + 25 - 5 = (x + 5)^2 - 5$ ，

$$\therefore (x + 5)^2 \geq 0,$$

$$\therefore (x + 5)^2 - 5 \geq -5$$

当 $x = -5$ 时, $(x+5)^2 - 5 = -5$,

因此 $(x+5)^2 - 5$ 有最小值, 最小值为 -5 ,

即 $x^2 + 10x + 20$ 的最小值为 -5 ,

$\therefore A$ 的最小值为 -5 ;

故答案为: -5 ;

(2) 解: 甲菜地的面积 $S_{\text{甲}} = (3a+2)(2a+5) = 6a^2 + 19a + 10$,

乙菜地的面积 $S_{\text{乙}} = 5a(a+5) = 5a^2 + 25a$,

$$S_{\text{甲}} - S_{\text{乙}} = (6a^2 + 19a + 10) - (5a^2 + 25a) = a^2 - 6a + 10 = (a-3)^2 + 1,$$

$$\because (a-3)^2 \geq 0,$$

$$\therefore (a-3)^2 + 1 > 0,$$

$$\text{即 } S_{\text{甲}} - S_{\text{乙}} > 0,$$

$$\therefore S_{\text{甲}} > S_{\text{乙}}.$$

23. (1) 如图 1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, D 为 BC 边上一点, 将 $\triangle ABC$ 沿着 AD 折叠, 使点 C 落在边 AB 上, 请用直尺和圆规作出点 D ; (不写作法, 保留作图痕迹)

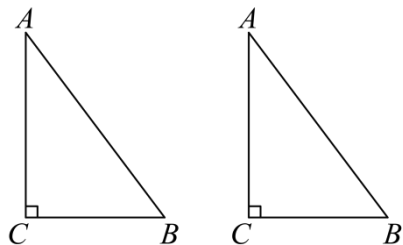


图1

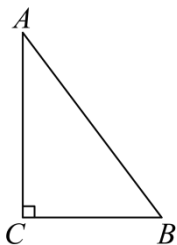


图2

(2) 如图 2, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 沿着某条直线折叠, 使得点 A, B 重合, 折痕交 AC 于点 P , 请用直尺和圆规作出点 P ; (不写作法, 保留作图痕迹)

(3) 在 (2) 的条件下, 若 $AB = 8, AP = 5$, 求 CP 的长.

【答案】 (1) 图见解析; (2) 图见解析; (3) CP 的长 1.4

【解析】

【分析】 本题考查作图—复杂作图、角平分线的性质、垂直平分线的性质和勾股定理的应用, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题.

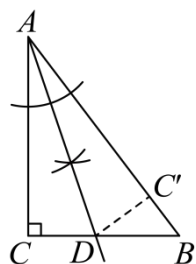
(1) 作 $\angle BAC$ 的角平分线; 根据角平分线的性质可得 $CD = CD$, 则 $\triangle ABC$ 沿着 AD 折叠, 使点 C 落在

边 AB ;

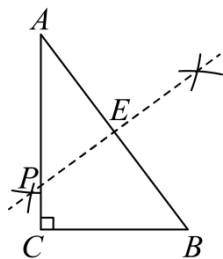
(2) 作 AB 的垂直平分线; 根据垂直平分线的性质可得 $AE = BE$, 将 $\triangle ABC$ 沿着 PE 折叠, 使得点 A, B 重合;

(3) 连接 BP , 根据垂直平分线的性质, 可得 $BP = AP = 5$, 设 $CP = x$, 则 $AC = 5 + x$, 在 $\text{Rt}\triangle BPC$ 中和 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 运用两次勾股定理求解即可.

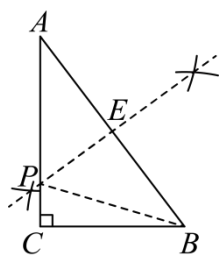
【详解】解: (1) 如图, 点 D 即为所求,



(2) 如图, 点 P 即为所求,



(3) 连接 BP , 如图,



$\therefore PE$ 是 AB 的垂直平分线,

$\therefore BP = AP = 5$,

设 $CP = x$,

$\therefore AC = AP + PC = 5 + x$,

在 $\text{Rt}\triangle BPC$ 中, $BC^2 = BP^2 - CP^2 = 5^2 - x^2 = 25 - x^2$,

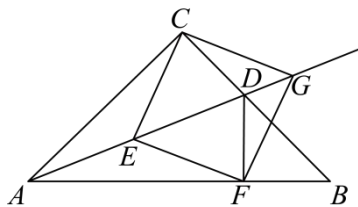
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC^2 + BC^2 = AB^2$

$$(5+x)^2 + (25-x^2) = 8^2,$$

解得 $x = 1.4$,

$\therefore CP = 1.4$.

24. 已知: 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 在 BC 上, $DF \perp AB$, 垂足为 F , 且 $DF = CD$, 点 E 为线段 AD 的中点, 过点 F 作 $FG \parallel CE$ 交射线 AD 于 G , 连接 CG .



(1) 求证: $\angle CEG = \angle FEG$;

(2) 求证: 四边形 $CEFG$ 是菱形.

(3) 当 $AC = BC$ 时, 求证: 四边形 $CEFG$ 是正方形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 见解析

【解析】

【分析】(1) 证明 $\text{Rt}\triangle ACD \cong \text{Rt}\triangle AFD$ (HL), 得出 $\angle CAD = \angle FAD$, $AC = AF$, 证明 $\triangle ACG \cong \triangle AFG$ (SAS), 得出 $CG = FG$, $\angle CGA = \angle FGA$, 证明 $\triangle CEG \cong \triangle FEG$ (SAS), 得出 $\angle CEG = \angle FEG$;

(2) 根据平行线的性质得 $\angle FGA = \angle CEG$, 证明 $\angle CGE = \angle CEG$, 根据等腰三角形的判定得出 $CE = CG$, 证明 $CE = EF = FG = CG$, 即可证明结论;

(3) 根据等腰三角形的性质和三角形的内角和得到 $\angle CAB = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$, 求得 $\angle CAD = \angle FAD = 22.5^\circ$, 根据等腰三角形的性质得到 $\angle CAE = \angle ECA = 22.5^\circ$, 求得 $\angle CEF = \angle CEG + \angle FEG = 90^\circ$, 根据正方形的判定定理即可得到结论.

【小问1详解】

证明: $\because \angle ACB = 90^\circ$, $DF \perp AB$,

$\therefore \angle DFA = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 与 $\text{Rt}\triangle AFD$ 中,

$$\begin{cases} DF = CD \\ AD = AD \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ACD \cong \text{Rt}\triangle AFD$ (HL),

$\therefore \angle CAD = \angle FAD$, $AC = AF$,

在 $\triangle ACG$ 与 $\triangle AFG$ 中,

$$\begin{cases} AC = AF \\ \angle CAD = \angle FAD, \\ AG = AG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACG \cong \triangle AFG (\text{SAS}),$$

$$\therefore CG = FG, \quad \angle CGA = \angle FGA,$$

在 $\triangle CEG$ 和 $\triangle FEG$ 中,

$$\begin{cases} CG = FG \\ \angle CGA = \angle FGA, \\ EG = EG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CEG \cong \triangle FEG (\text{SAS}),$$

$$\therefore CE = EF, \quad \angle CEG = \angle FEG;$$

【小问2 详解】

证明: $\because FG \parallel CE$,

$$\therefore \angle FGA = \angle CEG,$$

由(1)知: $\angle CGA = \angle FGA$,

$$\therefore \angle CGE = \angle CEG,$$

$$\therefore CE = CG,$$

由(1)知: $CE = EF$, $CG = FG$,

$$\therefore CE = EF = FG = CG,$$

$\therefore$ 四边形 $CEFG$ 是菱形.

【小问3 详解】

证明: $\because AC = BC$, $\angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CAB = \angle B = \frac{1}{2}(180^\circ - 90^\circ) = 45^\circ,$$

由(1)知, $\angle CAD = \angle FAD$,

$$\therefore \angle CAD = \angle FAD = 22.5^\circ,$$

$\because E$ 为 AD 的中点, $\angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore CE = AE = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ECA = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle CEG = \angle CAE + \angle ECA = 45^\circ,$$

由 (1) 知: $\angle FEG = \angle CEG = 45^\circ$,

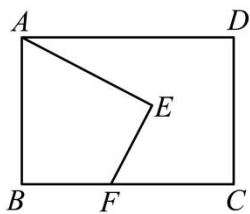
$$\therefore \angle CEF = \angle CEG + \angle FEG = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $CEFG$ 是菱形,

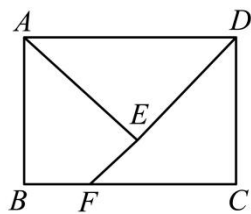
$\therefore$ 四边形 $CEFG$ 是正方形.

【点睛】 本题主要考查了正方形的判定, 菱形的判定和性质, 三角形的内角和定理, 全等三角形的判定和性质, 正确的识别图形, 熟练掌握全等三角形的判定方法和菱形、正方形的判定方法, 是解题的关键.

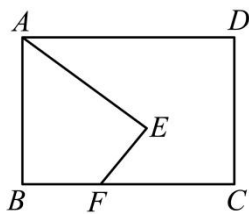
25. 综合与实践课上, 李老师让同学们以“翻折”为主题展开探究.



图①



图②



图③

【问题情境】

如图①, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3, AD = 4$. 点 F 在射线 BC 上, 将边 AB 沿 AF 翻折得到线段 AE , 连接 EF .

【猜想证明】

(1) 当点 E 落在 AD 上时, 四边形 $ABFE$ 的形状为_____. (直接写出答案)

(2) 如图②, 当 $\angle EAB = 45^\circ$ 时, 连接 DE , 求此时 $\triangle ADE$ 的面积;

【能力提升】

(3) 在【问题情境】的条件下, 点 F, E, D 三点共线, 请直接写出此时 BF 的长度.

【答案】 正方形; $3\sqrt{2}$; $4 - \sqrt{7}$ 或 $4 + \sqrt{7}$

【解析】

【分析】 本题主要考查翻折的性质, 全等三角形的判定和性质, 正方形的判定和性质, 熟练掌握性质定理是解题的关键.

(1) 由翻折可知, $\triangle ABF \cong \triangle AEF$, 再根据正方形的判定证明即可;

(2) 作 $EG \perp AD$, 得到 $AG = EG$, 再根据勾股定理进行计算即可;

(3) 分两种情况, 当点 E 在 DF 上时, 以及当点 E 在 FD 的延长线上时两种情况, 运用勾股定理进行计算即可.

【详解】 解: (1) $\because$ 将边 AB 沿 AF 翻折得到线段 AE ,

$$\therefore AB = AE,$$

当点 E 落在 AD 上时, 此时 AF 为 $\angle BAE$ 的角平分线,

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle AEF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle ABF = \angle AEF = 90^\circ,$$

$\because$ 矩形 $ABCD$,

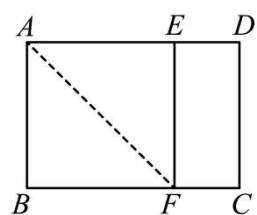
$$\therefore \angle BAE = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 为矩形,

$$\because AB = AE,$$

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 为正方形,

故答案为: 正方形;



(2) 作 $EG \perp AD$,

$$\because \angle BAD = 90^\circ, \angle BAE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EAG = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AEG = 90^\circ - \angle EAG = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AEG = \angle EAG,$$

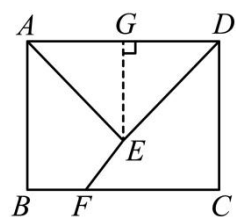
$$\therefore AG = EG,$$

$$\because EG^2 + AG^2 = AE^2,$$

$$\therefore 2EG^2 = 3^2,$$

$$\therefore EG = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} AD \cdot EG = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2};$$



(3) ①当点 E 在 DF 上时, 连接 AF ,

$$\because \angle AEF = \angle B = 90^\circ, AE = AB, AF = AF,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABF \cong \text{Rt}\triangle AEF (\text{HL}),$$

$$\therefore BF = EF,$$

$$\text{设 } BF = EF = x, CF = 4 - x,$$

$$\text{由翻折得: } AE = AB = 3,$$

$$\because EF \perp AE,$$

$$\therefore \angle AED = \angle AEF = 90^\circ,$$

$$\because AD = 4,$$

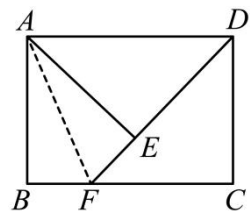
$$\therefore DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7},$$

$$\text{在 Rt}\triangle DCF \text{ 中, } CF^2 + CD^2 = DF^2,$$

$$\therefore (4 - x)^2 + 3^2 = (x + \sqrt{7})^2,$$

$$\text{解得 } x = 4 - \sqrt{7},$$

$$\therefore BF = 4 - \sqrt{7};$$



②当点 E 在 FD 的延长线上时,

$$\because \angle AEF = \angle B = 90^\circ, AE = AB, AF = AF,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABF \cong \text{Rt}\triangle AEF (\text{HL}),$$

$$\therefore BF = EF,$$

$$\text{由翻折得: } AE = AB = 3,$$

$$\because EF \perp AE,$$

$$\therefore \angle AED = \angle AEF = 90^\circ,$$

$$\because AD = 4,$$

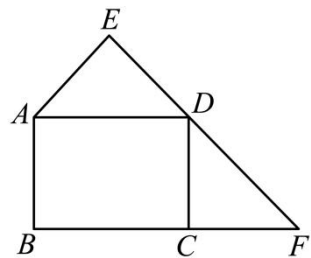
$$\therefore DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7},$$

$$\text{设 } BF = EF = a, CF = a - 4, DF = a - \sqrt{7},$$

$$\therefore (a-4)^2 + 3^2 = (a-\sqrt{7})^2,$$

$$\text{解得 } x = 4 + \sqrt{7},$$

$$\therefore BF = 4 + \sqrt{7}.$$



故答案为: $4 - \sqrt{7}$ 或 $4 + \sqrt{7}$.