

# 2025-2026 学年第一学期期末测评

## 八年级 数学学科

(时间: 90 分钟 满分: 150 分)

### 一、单选题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列函数中, 不是反比例函数的是 ( )

A.  $y = \frac{6}{x}$

B.  $y = 5x^{-1}$

C.  $y = -\frac{x}{9}$

D.  $y = -\frac{1}{7x}$

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的定义.

反比例函数的一般形式为  $y = \frac{k}{x}$  ( $k$  为常数,  $k \neq 0$ ), 选项 C 为正比例函数, 不符合反比例函数定义.

【详解】 解: 反比例函数形式为  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ),

A:  $y = \frac{6}{x}$ , 是反比例函数;

B:  $y = 5x^{-1} = \frac{5}{x}$ , 是反比例函数;

C:  $y = -\frac{x}{9}$ , 是正比例函数, 不是反比例函数;

D:  $y = -\frac{1}{7x}$ , 是反比例函数;

故选: C.

2. 对于一次函数  $y = 3x - 2$ , 下列说法错误的是 ( )

A.  $y$  随  $x$  的增大而增大

B. 图象经过第二、三、四象限

C. 图象与正比例函数  $y = 3x$  的图象平行

D. 点  $M(-2, y_1)$ ,  $N(1, y_2)$  都在直线  $y = 3x - 2$  上, 则  $y_1 < y_2$

【答案】B

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象的分布和性质, 图象的平移, 根据  $k = 3 > 0$ ,  $b = -2 < 0$ , 逐项分析判断, 即可求解.

【详解】解：对于一次函数  $y = 3x - 2$ ， $k = 3 > 0$ ， $b = -2 < 0$

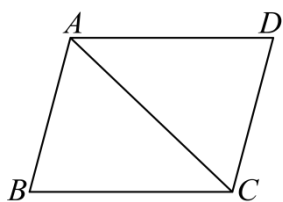
$\therefore y$  随  $x$  的增大而增大，图象经过第一、三、四象限，不经过第二象限，图象与正比例函数  $y = 3x$  的图象平行

$$\therefore -2 < 1$$

$$\therefore y_1 < y_2$$

故选：B.

3. 如图，在四边形  $ABCD$  中， $AB \parallel CD$ ，添加一个条件，能使四边形  $ABCD$  成为平行四边形的是（ ）



A.  $AD = BC$

B.  $\angle BAC = \angle ACD$

C.  $AB = AD$

D.  $\angle B = \angle D$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的判定定理，掌握平行四边形的判定定理是解题的关键。根据已知条件以及各个选项中所给的条件，逐项分析即可得出答案。

【详解】A. 已知  $AB \parallel CD$ ，添加条件  $AD = BC$ ，则四边形  $ABCD$  有可能是等腰梯形，不符合题意；

B. 已知  $AB \parallel CD$  可得  $\angle BAC = \angle ACD$ ，故添加条件  $\angle BAC = \angle ACD$ ，不能判定四边形  $ABCD$  为平行四边形，不符合题意；

C. 已知  $AB \parallel CD$ ，添加条件  $AB = AD$ ，不能判定四边形  $ABCD$  为平行四边形，不符合题意；

D. 已知  $AB \parallel CD$  可得  $\angle B + \angle BCD = 180^\circ$ ，添加条件  $\angle B = \angle D$ ，则可得  $\angle D + \angle BCD = 180^\circ$ ，由此可证得  $AD \parallel BC$ ，因此可判定四边形  $ABCD$  为平行四边形，符合题意。

故选 D.

4. 二次函数  $y = x^2 - 4x - 2$  的顶点坐标为（ ）

A.  $(2, -6)$

B.  $(2, -2)$

C.  $(-2, -4)$

D.  $(-2, -6)$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了求二次函数的顶点坐标，通过配方法将二次函数化为顶点式，从而得到顶点坐标。

【详解】解：  $y = x^2 - 4x - 2$

$$\begin{aligned}
 &= x^2 - 4x + 4 - 4 - 2 \\
 &= (x^2 - 4x + 4) - 6 \\
 &= (x - 2)^2 - 6
 \end{aligned}$$

故顶点坐标为  $(2, -6)$ ,

故选: A.

5. 已知四边形  $ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $AC = BD$ , 下列判断中的正确的是 ( )

- A. 如果  $BC = AD$ , 那么四边形  $ABCD$  是等腰梯形
- B. 如果  $AD \parallel BC$ , 那么四边形  $ABCD$  是菱形
- C. 如果  $AC$  平分  $BD$ , 那么四边形  $ABCD$  是矩形
- D. 如果  $AC \perp BD$ , 那么四边形  $ABCD$  是正方形

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据正方形、等腰梯形、矩形和菱形的判定定理进行判断即可.

- 【详解】 解: A. 如果  $BC=AD$ , 那么四边形  $ABCD$  可能是等腰梯形, 也可能是矩形, 错误;
- B. 如果  $AD \parallel BC$ , 那么四边形  $ABCD$  是矩形, 错误;
- C. 如果  $AC$  平分  $BD$ , 那么四边形  $ABCD$  是矩形, 正确;
- D. 如果  $AC \perp BD$ , 那么四边形  $ABCD$  不一定是正方形, 错误;

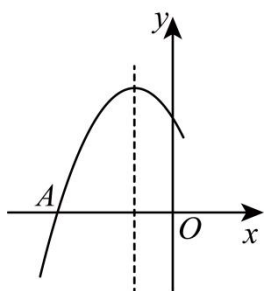
故选: C.

【点睛】 此题考查等腰梯形的判定, 关键是根据正方形、等腰梯形、矩形和菱形的判定定理解答.

6. 如图是二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  图象的一部分, 图象过点  $A(-3, 0)$ , 对称轴为直线  $x = -1$ , 给出四个

结论: ①  $abc < 0$ ; ②  $2a - b = 0$ ; ③  $a + b + c = 0$ ; ④若点  $B\left(-\frac{5}{2}, y_1\right)$ ,  $C\left(-\frac{1}{2}, y_2\right)$  为函数图象上的两

点, 则  $y_1 < y_2$ . 其中正确结论的个数是 ( )



A. 4 个

B. 3 个

C. 2 个

D. 1 个

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查二次函数图象与系数的关系、二次函数图象上点的坐标特征，根据函数图象和题意，可以判断各个小题中的结论是否正确，从而可以解答本题.

【详解】 解：由函数图象可得， $a < 0$ ， $c > 0$ ，

$\therefore$  对称轴为直线  $x = -1$ ，

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} = -1,$$

$$\therefore b = 2a < 0, \text{ 即 } 2a - b = 0,$$

故②正确；

$$\therefore abc > 0,$$

故①错误；

$\therefore$  图象过点  $A(-3, 0)$ ，对称轴为直线  $x = -1$ ，

$\therefore$  图象过点  $(1, 0)$ ，

$$\therefore a + b + c = 0,$$

故③正确；

$\therefore$  函数图象开口向下，对称轴为直线  $x = -1$ ，

$\therefore$  点  $B\left(-\frac{5}{2}, y_1\right)$ ， $C\left(-\frac{1}{2}, y_2\right)$  为函数图象上的两点， $\left|-1 + \frac{5}{2}\right| = \frac{3}{2}$ ， $\left|-\frac{1}{2} + 1\right| = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore \left|-1 + \frac{5}{2}\right| > \left|-\frac{1}{2} + 1\right|,$$

$$\therefore y_1 < y_2,$$

故④正确，

综上所述，正确的有②③④，一共 3 个.

故选：B.

## 二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 一条直线经过原点，且与直线  $y = -3x + 1$  平行，则这条直线的解析式为\_\_\_\_\_.

【答案】  $y = -3x$

【解析】

【分析】 本题考查了求一次函数解析式，一次函数图象平行的问题，解题的关键是熟练掌握一次函数图象平行，则  $k$  相同.

设所求直线解析式为  $y = kx + b$ ，由于与直线  $y = -3x + 1$  平行，则  $k = -3$ ，再根据图象经过原点即可得到  $b = 0$ ，即可求解函数解析式.

【详解】 解：设所求直线解析式为  $y = kx + b$ .

$\because$  与直线  $y = -3x + 1$  平行，

$\therefore k = -3$ .

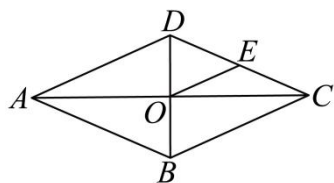
$\because$  经过原点，

$\therefore b = 0$ .

$\therefore$  解析式为  $y = -3x$ .

故答案为：  $y = -3x$ .

8. 如图，菱形的对角线  $AC$  与  $BD$  相交于点  $O$ ， $E$  是  $CD$  的中点，且  $OE = 3$ ，则  $CD$  的长是\_\_\_\_\_.



【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了菱形的性质以及直角三角形斜边上的中线性质的性质，由菱形的性质可得  $AC \perp BD$ ，由直角三角形的性质可得  $CD = 2OE$ ，故可求解.

【详解】 解： $\because$  四边形  $ABCD$  是菱形，

$\therefore AC \perp BD$ ，

$\therefore \triangle COD$  是直角三角形，

$\because$  点  $E$  是  $CD$  的中点，

$\therefore CD = 2OE = 6$ .

故答案为： 6.

9. 若二次函数  $y = x^2 - 2x + n$  的图像与  $y$  轴的交点坐标为  $(0, -3)$ ，则该函数图像与  $x$  轴的交点坐标为\_\_\_\_\_.

【答案】  $(-1, 0)$  或  $(3, 0)$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数图像与坐标轴的交点问题，解题的关键是求出函数解析式.

先根据抛物线与  $y$  轴的交点坐标求出  $n$ ，得到函数解析式，再令  $y=0$ ，求出函数图像与  $x$  轴的交点坐标.

【详解】 解：  $\because$  二次函数  $y=x^2-2x+n$  的图像与  $y$  轴的交点坐标为  $(0,-3)$ ,

$$\therefore n=-3,$$

$$\therefore \text{解析式为 } y=x^2-2x-3,$$

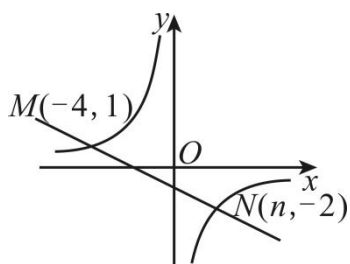
$$\text{当 } y=0 \text{ 时, } x^2-2x-3=0,$$

$$\text{解得 } x=3 \text{ 或 } x=-1,$$

$$\therefore \text{该函数图像与 } x \text{ 轴的交点坐标为 } (-1,0) \text{ 或 } (3,0),$$

故答案为:  $(-1,0)$  或  $(3,0)$ .

10. 如图，一次函数  $y=ax+b$  的图象与反比例函数  $y=\frac{k}{x}$  的图象交于  $M$ 、 $N$  两点，观察图象知，不等式  $ax+b < \frac{k}{x}$  的解集为\_\_\_\_\_.



【答案】  $-4 < x < 0$  或  $x > 2$

【解析】

【分析】 此题主要考查函数与不等式之间的关系，解题的关键是正确理解函数图象和性质.

先求得  $n$  的值，然后观察函数图象即可求解.

【详解】 解：由题意可得  $-2n = -4 \times 1$ ,

$$\text{解得 } n=2,$$

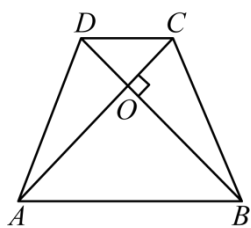
$$\therefore N(2,-2),$$

观察图像可得，当  $-4 < x < 0$  或  $x > 2$  时，一次函数的图象位于反比例函数图象的下方，

$$\therefore \text{不等式 } ax+b < \frac{k}{x} \text{ 的解集为 } -4 < x < 0 \text{ 或 } x > 2,$$

故答案为:  $-4 < x < 0$  或  $x > 2$ .

11. 如图，在等腰梯形  $ABCD$  中， $AB \parallel CD$ ， $AD=BC$ ， $AC \perp BD$ ， $AC$  与  $BD$  交于点  $O$ ， $CD=3$ ， $AB=5$ ．则此梯形的面积为\_\_\_\_\_.

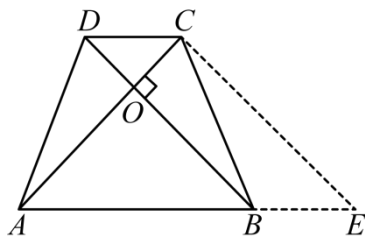


【答案】 16

【解析】

【分析】 本题考查的是等腰梯形的判定与性质，平行四边形的判定与性质，勾股定理的应用，作出合适的辅助线是解本题的关键. 过点  $C$  作  $CE \parallel BD$ ，交  $AB$  的延长线于点  $E$ ，证明四边形  $BECD$  是平行四边形，可得  $BE = CD = 3$ ，证明  $\angle ACE = 90^\circ$ ， $AC = BD$ ， $AC = CE$ ，结合勾股定理得，即  $AC^2 = 32$ ，再进一步解答即可.

【详解】 解：过点  $C$  作  $CE \parallel BD$ ，交  $AB$  的延长线于点  $E$ ，



又  $\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore$  四边形  $BECD$  是平行四边形，

$\therefore BE = CD = 3$ ， $AE = AB + BE = 8$ ，

$\because AC \perp BD$ ，

$\therefore AC \perp CE$ ，

$\therefore \angle ACE = 90^\circ$ ，

$\because AD = BC$ ， $AB \parallel CD$ ，

$\therefore AC = BD$ ，

$\therefore AC = CE$ ，

由勾股定理得， $2AC^2 = AE^2 = 64$ ，即  $AC^2 = 32$ ，

$\therefore$  此梯形的面积为  $\frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} AC^2 = \frac{1}{2} \times 32 = 16$ ；

故答案为：16.

12.  $A(-1, a)$ ， $B(1, b)$ ， $C(4, c)$  三点都在二次函数  $y = (x - 2)^2 + k$  的图像上，则  $a$ ， $b$ ， $c$  的大小关系为 \_\_\_\_\_ . (用 “ $<$ ” 连接)

【答案】  $b < c < a$

【解析】

【分析】根据二次函数解析式可知二次函数对称轴为直线  $x = 2$ ，再由  $a = 1 > 0$ ，得到二次函数图像上的点离对称轴越远，函数值越大，由此即可得到答案.

【详解】解：  $\because$  二次函数解析式为  $y = (x - 2)^2 + k$ ,

$\therefore$  二次函数对称轴为直线  $x = 2$ ,

$\because a = 1 > 0$ ,

$\therefore$  二次函数图像上的点离对称轴越远，函数值越大，

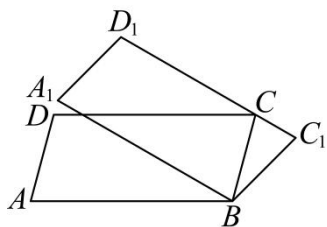
$\because A(-1, a)$ ,  $B(1, b)$ ,  $C(4, c)$  三点离直线  $x = 2$  的距离分别为 3, 1, 2,

$\therefore b < c < a$ ,

故答案为:  $b < c < a$ .

【点睛】本题主要考查了二次函数图像的性质，解题的关键在于能够根据题意确定对称轴以及离对称轴越远，函数值越小.

13. 如图，在  $\square ABCD$  中， $\angle A = 70^\circ$ ，将  $\square ABCD$  绕顶点  $B$  顺时针旋转到  $\square A_1BC_1D_1$ ，当  $C_1D_1$  首次经过顶点  $C$  时，旋转角  $\angle ABA_1 =$  \_\_\_\_\_  $^\circ$ .



【答案】 40

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的性质、旋转的性质、等腰三角形的判定和性质以及三角形的内角和定理，解题的关键是证明三角形  $CBC_1$  是等腰三角形. 由旋转的性质可知  $BC = BC_1$ ，由等腰三角形的性质得出

$\angle BCC_1 = \angle C_1$ ，根据旋转角相等可得  $\angle ABA_1 = \angle CBC_1 = 40^\circ$ .

【详解】解：  $\because \square ABCD$  绕顶点  $B$  顺时针旋转到  $\square A_1BC_1D_1$ ,

$\therefore BC = BC_1$ ,

$\therefore \angle BCC_1 = \angle C_1$ ,

$$\therefore \angle A = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle C_1 = 70^\circ,$$

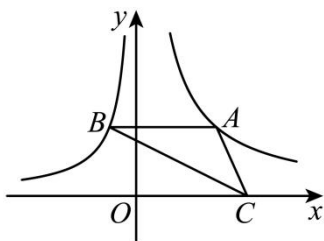
$$\therefore \angle BCC_1 = \angle C_1,$$

$$\therefore \angle CBC_1 = 180^\circ - 2 \times 70^\circ = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle ABA_1 = \angle CBC_1 = 40^\circ$$

故答案为：40.

14. 如图，点  $A$ ， $B$  分别在反比例函数  $y_1 = \frac{12}{x} (x > 0)$ ， $y_2 = -\frac{4}{x} (x < 0)$  的图象上，且  $AB \parallel x$  轴，点  $C$  在  $x$  轴的正半轴上，连接  $AC$ ， $BC$ ，则  $\triangle ABC$  的面积为\_\_\_\_\_.



【答案】8

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数与几何综合，根据  $A$  点坐标求出  $B$  点坐标是解题的关键. 设  $A$  点坐标为

$\left(m, \frac{12}{m}\right)$ ，由  $AB \parallel x$  轴可得  $B$  点的纵坐标为  $\frac{12}{m}$ ，则  $y_2 = \frac{12}{m} = -\frac{4}{x}$ ，于是可得  $x = -\frac{m}{3}$ ，即  $B$  点坐标为

$\left(-\frac{m}{3}, \frac{12}{m}\right)$ ，则  $AB = \frac{4m}{3}$ ，进而可得  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot y_A$ ，由此即可求出  $\triangle ABC$  的面积.

【详解】 解：设  $A$  点坐标为  $\left(m, \frac{12}{m}\right)$ ，

$\because AB \parallel x$  轴，

$\therefore B$  点的纵坐标为  $\frac{12}{m}$ ，则：

$$y_2 = \frac{12}{m} = -\frac{4}{x},$$

$$\therefore x = -\frac{m}{3},$$

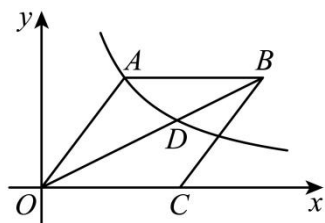
$\therefore B$  点坐标为  $\left(-\frac{m}{3}, \frac{12}{m}\right)$ ，

$$\therefore AB = m - \left(-\frac{m}{3}\right) = m + \frac{m}{3} = \frac{4m}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot y_A = \frac{1}{2} \times \frac{4m}{3} \times \frac{12}{m} = 8,$$

故答案为: 8.

15. 如图, 已知菱形  $OABC$ , 顶点  $C$  在  $x$  轴上, 反比例函数  $y = \frac{k}{x} (x > 0)$  的图像经过顶点  $A(3, 4)$ ,  $OB$  与反比例函数的图像交于点  $D$ . 点  $D$  的坐标是\_\_\_\_\_.



【答案】  $(2\sqrt{6}, \sqrt{6})$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图像与反比例函数图像的交点问题, 菱形的性质, 勾股定理, 求函数解析式等知识点.

先利用待定系数法求出反比例函数解析式, 由  $A(3, 4)$  得  $OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ , 又因为四边形  $OABC$  是菱形,

则  $AB = OA = 5$ , 得到  $B(8, 4)$ , 从而求出直线  $OB$  的解析式为  $y = \frac{1}{2}x$ , 然后联立  $\begin{cases} y = \frac{12}{x} \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$ , 即可求解.

【详解】 解: 把  $A(3, 4)$  代入  $y = \frac{k}{x}$ , 得  $k = 3 \times 4 = 12$ ,

$\therefore$  反比例函数解析式为  $y = \frac{12}{x}$ ,

$\because A(3, 4)$ ,

$\therefore OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ,

$\because$  四边形  $OABC$  是菱形,

$\therefore AB = OA = 5$ ,  $AB \parallel CO$ ,

$\therefore B(8, 4)$ ,

设直线  $OB$  的解析式为  $y = mx (m \neq 0)$ ,

把  $B(8, 4)$  代入得  $4 = 8m$ ,

$$\therefore m = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{直线 } OB \text{ 的解析式为 } y = \frac{1}{2}x,$$

$\because$  点  $D$  是反比例函数与正比例函数的交点,

$$\therefore \text{联立解析式 } \begin{cases} y = \frac{12}{x} \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases},$$

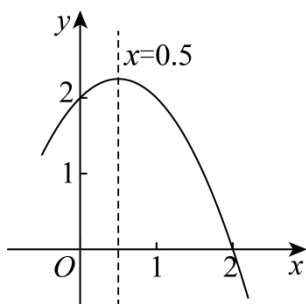
$$\text{解得 } \begin{cases} x = 2\sqrt{6} \\ y = \sqrt{6} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -2\sqrt{6} \\ y = -\sqrt{6} \end{cases},$$

$$\because x > 0,$$

$$\therefore D(2\sqrt{6}, \sqrt{6}),$$

故答案为:  $(2\sqrt{6}, \sqrt{6})$ .

16. 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图像过点  $(0, 2)$ , 其部分图像如图所示, 则关于  $x$  的方程  $ax^2 + bx + c = 2$  的根是\_\_\_\_\_.



**【答案】**  $x_1 = 0, x_2 = 1$

**【解析】**

**【分析】** 本题考查了根据函数图像求一元二次方程的根.

根据对称轴得到  $(0, 2)$  关于直线  $x = 0.5$  的对称点为  $(1, 2)$ , 结合函数图像作答即可.

**【详解】** 解: 由图可知对称轴为直线  $x = 0.5$ ,

则  $(0, 2)$  关于直线  $x = 0.5$  的对称点为  $(1, 2)$ ,

可知  $ax^2 + bx + c = 2$  的根是  $x_1 = 0, x_2 = 1$ .

故答案为:  $x_1 = 0, x_2 = 1$ .

17. 平面直角坐标系中，在  $x$  轴上，且到一条抛物线的顶点及该抛物线与  $y$  轴的交点的距离之和最小的点，称为这条抛物线与  $x$  轴的“亲密点”，那么抛物线  $y = 2x^2 + 4x + 5$  与  $x$  轴的“亲密点”的坐标是\_\_\_\_\_.

【答案】 $\left(-\frac{5}{8}, 0\right)$

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的性质，二次函数图象上点的坐标特征，轴对称的性质，求得抛物线的顶点坐标和与  $y$  轴的交点，然后根据题意求得顶点关于  $x$  轴的对称点，进一步求得过对称点和与  $y$  轴的交点的直线解析式，即可求得“亲密点”的坐标.

【详解】解：∵  $y = 2x^2 + 4x + 5 = 2(x+1)^2 + 3$ ,

∴ 抛物线开口向上，顶点  $P$  为  $(-1, 3)$ ,

∴ 顶点关于  $x$  轴的对称点  $Q$  为  $(-1, -3)$ ,

当  $x = 0$  时， $y = 5$ ,

∴ 抛物线与  $y$  轴的交点  $M$  为  $(0, 5)$ ,

设直线  $MQ$  的解析式为  $y = kx + 5$ ,

代入  $(-1, -3)$  得， $-3 = -k + 5$ ,

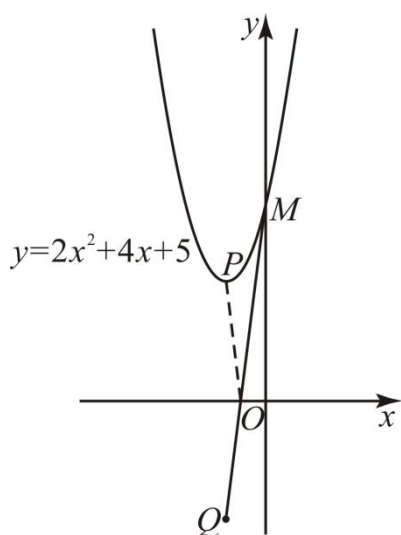
解得  $k = 8$ ,

∴ 直线  $MQ$  的解析式为  $y = 8x + 5$ ,

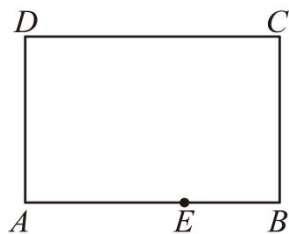
令  $y = 0$ ，则  $x = -\frac{5}{8}$

∴ 抛物线  $y = 2x^2 + 4x + 5$  与  $x$  轴的“亲密点”的坐标是  $\left(-\frac{5}{8}, 0\right)$ ,

故答案为： $\left(-\frac{5}{8}, 0\right)$ .



18. 如图是一张长方形纸片  $ABCD$ ，已知  $AB = 9$ ， $AD = 7$ ， $E$  为  $AB$  上一点， $AE = 6$ ，现要剪下一张以  $AE$  为一边的等腰三角形纸片 ( $\triangle AEP$ )，且使点  $P$  落在长方形  $ABCD$  的某一条边上，则等腰三角形  $AEP$  的底边长是\_\_\_\_\_.



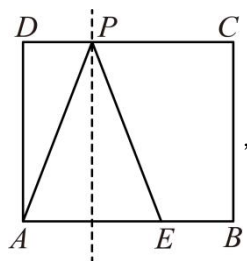
**【答案】** 6 或  $6\sqrt{2}$  或  $6\sqrt{3}$

**【解析】**

**【分析】** 本题考查了矩形的性质、等腰三角形的性质、勾股定理，由矩形的性质可得  $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ，结合等腰三角形的性质分三种情况计算即可得解，熟练掌握以上知识点并灵活运用，采用分类讨论的思想是解此题的关键.

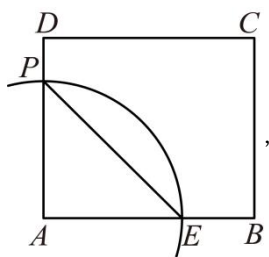
**【详解】** 解：由矩形的性质可得：  $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ，

如图， $AE$  的垂直平分线交  $CD$  于点  $P$ ，



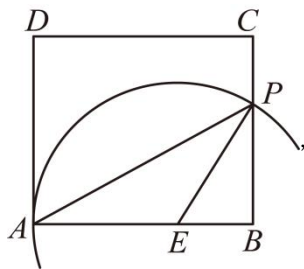
此时  $\triangle AEP$  为等腰三角形，底边为  $AE = 6$ ；

如图，以点  $A$  为圆心，以 6 为半径画弧交  $AD$  于点  $P$ ，



此时  $\triangle AEP$  为等腰三角形，底边为  $PE = \sqrt{AE^2 + AP^2} = 6\sqrt{2}$ ；

如图，以点  $E$  为圆心，以 6 为半径画弧交  $BC$  于点  $P$ ，



此时  $\triangle AEP$  为等腰三角形， $PE = AE = 6$ ， $BE = AB - AE = 3$ ，

$$\therefore BP = \sqrt{PE^2 - BE^2} = 3\sqrt{3}，$$

$$\therefore \text{底边 } AP = \sqrt{AB^2 + BP^2} = 6\sqrt{3}；$$

综上所述：等腰三角形  $AEP$  的底边长是 6 或  $6\sqrt{2}$  或  $6\sqrt{3}$ ，

故答案为：6 或  $6\sqrt{2}$  或  $6\sqrt{3}$ 。

### 三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. 已知反比例函数  $y = \frac{k}{x} (x > 0)$  的图像与正比例函数  $y = 3x (x \geq 0)$  的图像交于点  $A(2, a)$ ，点  $B$  是线段  $OA$  上（不与点  $A$  重合）的一点。

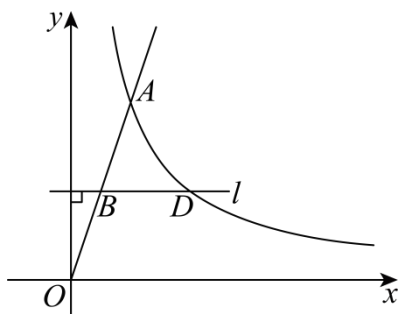


图1

(1) 求反比例函数的表达式；

(2) 如图 1，过点  $B$  作  $y$  轴的垂线  $l$ ， $l$  与  $y = \frac{k}{x} (x > 0)$  的图像交于点  $D$ ，当线段  $BD = 3$  时，求点  $B$  的坐标；

【答案】(1)  $y = \frac{12}{x}$

(2)  $B(1,3)$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题，熟知交点坐标满足两个函数关系式是关键.

(1) 待定系数法求出反比例函数解析式即可；

(2) 设点  $B(m, 3m)$ ，那么点  $D(m+3, 3m)$ ，利用反比例函数图象上点的坐标特征解出点  $B$  的坐标即可.

【小问 1 详解】

解：将  $A(2, a)$  代入  $y = 3x$  得  $a = 3 \times 2 = 6$ ,

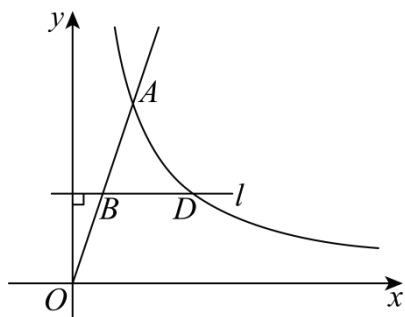
$\therefore A(2, 6)$ ,

将  $A(2, 6)$  代入  $y = \frac{k}{x}$  得  $6 = \frac{k}{2}$ ，解得  $k = 12$ ，

$\therefore$  反比例函数表达式为  $y = \frac{12}{x}$ ，

【小问 2 详解】

解：如图，设  $B(m, 3m)$ ，则  $D(m+3, 3m)$ ，

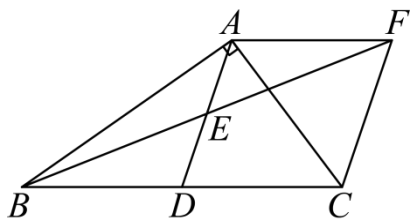


把  $D(m+3, 3m)$  代入  $y = \frac{12}{x}$  可得  $3m(m+3) = 12$ ，

解得  $m_1 = 1, m_2 = -4$  (舍)，

$\therefore B(1, 3)$ ；

20. 如图，在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $D$  是  $BC$  的中点， $E$  是  $AD$  的中点，延长  $BE$  至点  $F$ ，使得  $BE = EF$  .



(1) 求证：四边形  $ADCF$  是菱形.

(2) 若  $\angle ABC = 30^\circ$ ,  $AB = \sqrt{3}$ , 求四边形  $ADCF$  的周长.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 4

【解析】

【分析】(1) 证明  $\triangle AEF \cong \triangle DEB$  (SAS), 得到  $AF = DB$ ,  $\angle AFE = \angle DBE$ , 即可得  $AF \parallel DB$ ,  $AF = DC$ , 即得到四边形  $ADCF$  是平行四边形, 再根据直角三角形的性质得  $AD = CD = \frac{1}{2}BC$ , 即可求证;

(2) 由直角三角形的性质得  $BC = 2AC$ , 设  $AC = a$ , 则  $BC = 2a$ , 利用勾股定理可得  $a = 1$ , 得到  $BC = 2$ , 再根据直角三角形的性质得到  $AD = \frac{1}{2}BC = 1$ , 即可求解.

【小问 1 详解】

证明:  $\because E$  是  $AD$  的中点,

$$\therefore AE = DE,$$

$$\text{又} \because BE = EF, \angle AEF = \angle DEB,$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle DEB (\text{SAS}),$$

$$\therefore AF = DB, \angle AFE = \angle DBE,$$

$$\therefore AF \parallel DB,$$

$\because D$  是  $BC$  的中点,

$$\therefore DB = DC,$$

$$\therefore AF = DC,$$

$\therefore$  四边形  $ADCF$  是平行四边形,

$\because \angle BAC = 90^\circ$ ,  $D$  是  $BC$  的中点,

$$\therefore AD = CD = \frac{1}{2}BC,$$

$\therefore$  四边形  $ADCF$  是菱形;

【小问 2 详解】

解:  $\because$  在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ABC = 30^\circ$ ,

$$\therefore BC = 2AC,$$

设  $AC = a$ , 则  $BC = 2a$ ,

$$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

$$\therefore (\sqrt{3})^2 + a^2 = (2a)^2,$$

解得  $a = 1$ ,

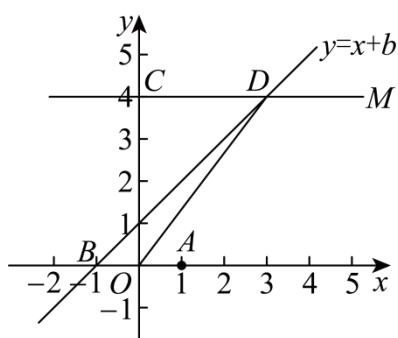
$$\therefore BC = 2,$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2}BC = 1,$$

$\therefore$  四边形  $ADCF$  的周长为  $1 \times 4 = 4$ .

**【点睛】** 本题考查了全等三角形的判定和性质, 平行四边形的判定, 菱形的判定和性质, 直角三角形的性质等, 掌握以上知识点是解题的关键.

21. 如图在直角坐标平面内,  $O$  为原点, 点  $A$  的坐标为  $(1, 0)$ , 点  $C$  的坐标为  $(0, 4)$ , 直线  $CM \parallel x$  轴. 点  $B$  与点  $A$  关于原点对称, 直线  $y = x + b$  ( $b$  为常数) 经过点  $B$ , 且与直线  $CM$  相交于点  $D$ .



(1) 求  $b$  的值和点  $D$  的坐标;

(2) 在  $x$  轴上有一点  $Q$ , 使  $\triangle BQD$  的面积为 8, 求  $Q$  点的坐标.

**【答案】** (1)  $b = 1, D(3, 4)$

(2)  $Q(3, 0)$  或  $Q(-5, 0)$

**【解析】**

**【分析】** 本题考查了待定系数法求函数解析式, 一次函数图像上点的坐标特征, 注意分情况讨论是解决本题的关键.

(1) 先求出点  $B$  的坐标, 由直线过点  $B$ , 把点  $B$  的坐标代入解析式, 可求得  $b$  的值; 点  $D$  在直线  $y = x + 1$  上, 其纵坐标为 4, 利用求得的解析式确定该点的横坐标即可;

(2) 过点  $D$  作  $DE \perp x$  轴, 垂足为  $E$ , 则  $DE$  是  $\triangle BQD$  在边  $BQ$  上的高,  $DE = 4$ , 根据三角形面积公式  
 求出  $BQ$  的长, 可得  $Q$  点坐标;

【小问 1 详解】

解:  $\because B$  与  $A(1,0)$  关于原点对称,

$$\therefore B(-1,0),$$

$\because y = x + b$  过点  $B$ ,

$$\therefore -1 + b = 0,$$

$$\therefore b = 1,$$

$$\therefore y = x + 1,$$

$\because$  点  $C$  的坐标为  $(0,4)$ , 直线  $CM \parallel x$  轴,

当  $y = 4$  时,  $x + 1 = 4$ ,

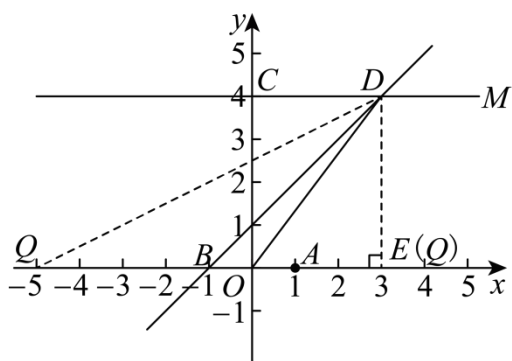
$$\therefore x = 3,$$

$$\therefore D(3,4),$$

$$\therefore b = 1, D(3,4).$$

【小问 2 详解】

解: 过点  $D$  作  $DE \perp x$  轴, 垂足为  $E$ , 则  $DE$  是  $\triangle BQD$  在边  $BQ$  上的高,  $DE = 4$ ,



$$\therefore S_{\triangle BQD} = \frac{1}{2} BQ \cdot DE = 8,$$

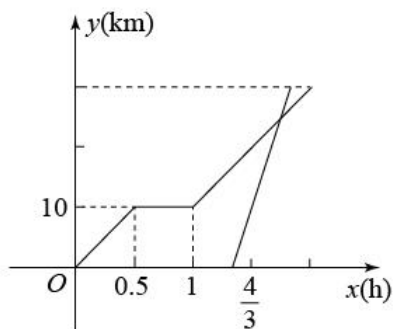
$$\therefore BQ = 4,$$

$$-1 - 4 = -5, -1 + 4 = 3,$$

$\therefore$  在  $x$  轴上存在两个  $Q$  点满足条件,

即:  $Q(3,0)$  或  $Q(-5,0)$ .

22. 周末, 小明骑电动自行车从家里出发到野外郊游. 从家出发 0.5 小时后到达甲地, 游玩一段时间后按原速前往乙地. 小明离家 1 小时 20 分钟后, 妈妈驾车沿相同路线前往乙地. 如图是他们离家的路程  $y$  (km) 与小明离家时间  $x$  (h) 的函数图象. 已知妈妈驾车的速度是小明骑电动自行车速度的 3 倍.



(1) 小明骑电动自行车的速度为\_\_\_\_\_千米/小时, 在甲地游玩的时间为\_\_\_\_\_小时;

(2) 小明从家出发多少小时的时候被妈妈追上? 此时离家多远?

【答案】 (1) 20; 0.5

(2) 小明出发 1.75 小时 (105 分钟) 被妈妈追上, 此时离家 25km

【解析】

【分析】 (1) 根据图象可以求出小明在甲地游玩的时间, 由速度 = 路程  $\div$  时间就可以求出小明骑车的速度;

(2) 直接运用待定系数法就可以求出直线  $BC$  和  $DE$  的解析式, 再由其解析式建立二元一次方程组, 求出点  $F$  的坐标就可以求出结论.

【小问 1 详解】

解: 由图象得

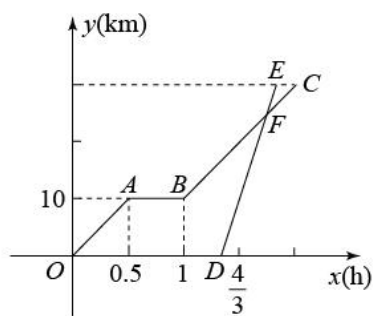
在甲地游玩的时间是  $1 - 0.5 = 0.5$  (h),

小明骑车速度:  $10 \div 0.5 = 20$  (km/h),

故答案为: 20; 0.5.

【小问 2 详解】

解: 如图,



妈妈驾车速度：  $20 \times 3 = 60$  (km/h)

设直线  $OA$  的解析式为  $y = kx$  ( $k \neq 0$ ),

则  $10 = 0.5k$ ,

解得：  $k = 20$ ,

故直线  $OA$  的解析式为：  $y = 20x$ .

$\because$  小明走  $OA$  段与走  $BC$  段速度不变,

$\therefore OA \parallel BC$ ,

设直线  $BC$  解析式为  $y = 20x + b_1$ ,

把点  $B(1, 10)$  代入得  $b_1 = -10$ ,

$\therefore y = 20x - 10$ ,

设直线  $DE$  解析式为  $y = 60x + b_2$ , 把点  $D(\frac{4}{3}, 0)$

代入得：  $b_2 = -80$ ,

$\therefore y = 60x - 80$ ,

$$\therefore \begin{cases} y = 20x - 10 \\ y = 60x - 80 \end{cases},$$

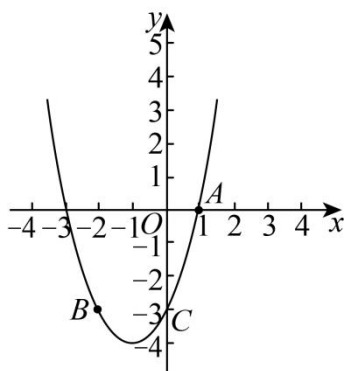
$$\text{解得: } \begin{cases} x = 1.75 \\ y = 25 \end{cases},$$

$\therefore F(1.75, 25)$ .

答：小明出发 1.75 小时（105 分钟）被妈妈追上，此时离家 25km.

【点睛】 本题考查一次函数的应用，考查了路程=速度 $\times$ 时间的运用，待定系数法求一次函数的解析式的运用，一次函数图象性质的运用，解题的关键是从实际问题中整理出一次函数模型.

23. 已知抛物线  $y = ax^2 + bx - 3$  经过点  $A(1, 0), B(-2, -3)$ ，顶点为点  $P$ ，与  $y$  轴交于点  $C$ .



(1) 求该抛物线的表达式以及顶点  $P$  的坐标;

(2) 将抛物线向上平移  $m$  ( $m > 0$ ) 个单位后, 点  $A$  的对应点为点  $M$ , 若此时  $MB \parallel AC$ , 求  $m$  的值.

**【答案】** (1)  $y = x^2 + 2x - 3$ ; 顶点  $P(-1, -4)$

(2)  $m = 6$

**【解析】**

**【分析】** 本题考查待定系数法求函数解析式, 二次函数图形平移, 熟练掌握函数性质是解决问题的关键.

(1) 利用待定系数法即可求解;

(2) 由题意可得  $C(0, -3)$ , 由此可求得直线  $AC$  的解析式为  $y = 3x - 3$ , 由  $MB \parallel AC$ , 可设直线  $MB$  解析式为  $y = 3x + b_2$ , 进而求得其解析式为  $y = 3x + 3$ , 由  $M_x = 1$ , 代入直线  $MB$  的表达式求得  $M(1, 6)$ , 即可求得  $m$  的值;

**【小问 1 详解】**

解:  $\because$  抛物线经过  $A, B$ , 代入得 
$$\begin{cases} a + b - 3 = 0 \\ 4a - 2b - 3 = -3 \end{cases},$$

解得 
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线解析式为  $y = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$ ,

$\therefore$  顶点  $P(-1, -4)$ ;

**【小问 2 详解】**

解: 令  $x = 0$ , 则  $y = -3$ , 即  $C(0, -3)$ ,

$\therefore$  直线  $AC$  经过点  $A, C$ ,

设其解析式为  $y = k_1x + b_1$ ,

$$\text{则} \begin{cases} k_1 + b_1 = 0 \\ b_1 = -3 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k_1 = 3 \\ b_1 = -3 \end{cases},$$

$\therefore$  直线  $AC: y = 3x - 3$ ,

$\therefore MB \parallel AC$ , 且直线  $MB$  经过点  $B(-2, -3)$ ,

设直线  $MB$  的解析式为  $y = 3x + b_2$ ,

则  $-3 = 3 \times (-2) + b_2$ , 解得:  $b_2 = 3$ ,

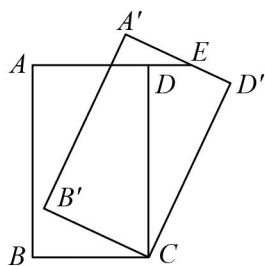
$\therefore$  直线  $MB: y = 3x + 3$ ,

$\therefore$  点  $M$  是点  $A$  向上平移  $m$  个单位所得,

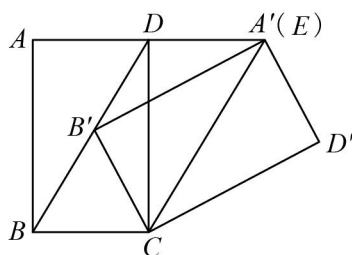
$\therefore M_x = 1$ , 代入直线  $MB$  的表达式, 得  $M(1, 6)$ ,

$\therefore m = 6$ .

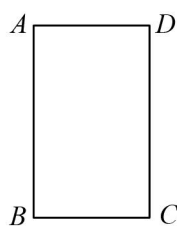
24. 将矩形  $ABCD$  绕点  $C$  顺时针旋转, 当旋转到如图①所示的位置时, 得到矩形  $A'B'CD'$ , 点  $A, B, D$  的对应点分别为点  $A', B', D'$ , 设直线  $AD$  与直线  $A'D'$  交于点  $E$ .



图①



图②



备用图

- (1) 猜想  $DE$  与  $D'E$  的数量关系, 并证明;
- (2) 如图②, 在旋转的过程中, 当点  $B'$  恰好落在矩形  $ABCD$  的对角线  $BD$  上时, 点  $A'$  恰好落在  $AD$  的延长线上 (即点  $A'$  与点  $E$  重合), 连接  $A'C$ , 求证: 四边形  $A'DBC$  是平行四边形;
- (3) 在矩形  $ABCD$  绕点  $C$  顺时针旋转的过程中, 若  $AB = 5$ ,  $BC = 3$ , 当  $A', B', D$  三点在同一条直线上时, 请求出  $A'D$  的值.

**【答案】** (1)  $DE = D'E$ , 见解析

(2) 见解析 (3) 1 或 9

**【解析】**

**【分析】** (1) 连接  $CE$ , 根据矩形的性质得出  $\angle ADC = \angle CD'E = 90^\circ$ , 推得  $\angle CDE = \angle CD'E$ , 根据旋转的性质得出  $CD = CD'$ , 根据全等三角形的判定与性质即可证明;

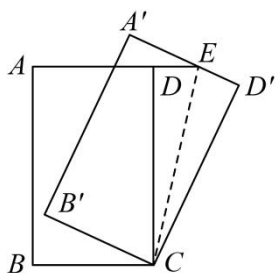
(2) 连接  $AC$ ，根据旋转的性质得出  $AC = A'C$ ，根据矩形的性质得出  $AD \parallel BC$ ， $AD = BC$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ，根据等腰三角形三线合一的性质得出  $AD = A'D$ ，推得  $A'D = BC$ ，根据平行四边形的判定定理即可证明；

(3) 分为：点  $A'$ ， $B'$  在  $CD$  的同一侧时和点  $A'$ ， $B'$  在  $CD$  的异侧时，两种情况分别求解，根据勾股定理求出  $B'D = 4$ ，结合图形求出  $A'D$  的值即可．

### 【小问 1 详解】

解：  $DE = D'E$ ，理由如下：

$\because$  四边形  $ABCD$  与四边形  $A'B'CD'$  都是矩形，如图①，连接  $CE$ ，



图①

$$\because \angle ADC = \angle CD'E = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = 180^\circ - \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle CDE = \angle CD'E,$$

$\because$  将矩形  $ABCD$  绕点  $C$  顺时针旋转，当旋转到如图①所示的位置时，得到矩形  $A'B'CD'$ ，

$$\therefore CD = CD',$$

在  $\text{Rt}\triangle CDE$  和  $\text{Rt}\triangle CD'E$  中，

$$\begin{cases} CD = CD' \\ CE = CE \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle CDE \cong \text{Rt}\triangle CD'E (\text{HL}),$$

$$\therefore DE = D'E;$$

### 【小问 2 详解】

证明：如图 2：连接  $AC$ ，





【分析】(1) 将  $A(0,3), B(-3,0)$ , 分别代入抛物线和直线的表达式中求解, 得出完整表达式即可;

(2) 根据图象即可求解;

(3) 分“点  $M$  在  $x$  轴的上方”和“点  $M$  在  $x$  轴的下方”两种情况讨论, 根据题意画出符合题意的图形, 设出点  $M$  的坐标, 依据解析式得出点  $N$  的坐标, 利用  $M, N$  的坐标表示出线段  $MN$ , 求出  $CE$  的长度, 利用平行四边形的对边相等得到  $CE = MN$ , 得出方程求解, 得出  $M$  的坐标即可.

【小问 1 详解】

解:  $\because$  抛物线  $y_1 = ax^2 - 4x + c$  经过  $A(0,5), B(-5,0)$  两点,

$$\therefore \begin{cases} 25a + 20 + c = 0 \\ c = 5 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -1 \\ c = 5 \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线的表达式为  $y_1 = -x^2 - 4x + 5$ .

$\because$  直线  $y_2 = kx + b$  经过  $A(0,5), B(-5,0)$  两点,

$$\therefore \begin{cases} -5k + b = 0 \\ b = 5 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = 1 \\ b = 5 \end{cases},$$

$\therefore$  直线  $AB$  的表达式为  $y_2 = x + 5$ ;

【小问 2 详解】

解:  $\because A(0,5), B(-5,0)$ ,

$\therefore$  根据图象可得, 当  $y_1 > y_2$  时,  $-5 < x < 0$ ;

【小问 3 详解】

解: 存在,

$$\because y_1 = -x^2 - 4x + 5 = -(x+2)^2 + 9,$$

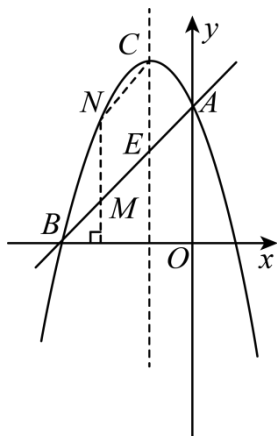
$\therefore$  抛物线的顶点  $C$  的坐标为  $(-2,9)$ .

$\because CE \parallel y$  轴,  $E$  在直线  $y_2 = x + 5$  上,

$\therefore -2 + 5 = 3$ , 点  $E$  的坐标为  $(-2,3)$ .

$$\therefore CE = 9 - 3 = 6.$$

情况一：如图 1，若点  $M$  在  $x$  轴的上方，连接  $CN$ ，



$\therefore$  四边形  $CEMN$  为平行四边形， $CE = MN$  .

设  $M(a, a+5)$ ，则  $N(a, -a^2 - 4a + 5)$  .

$$\therefore MN = (-a^2 - 4a + 5) - (a + 5) = -a^2 - 5a,$$

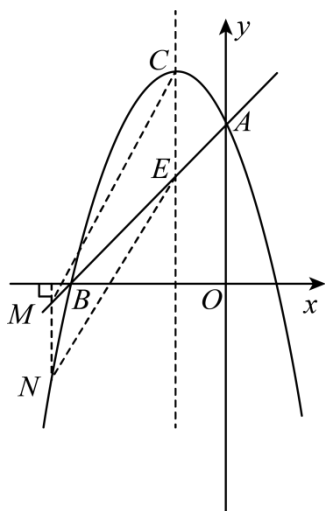
$$\therefore -a^2 - 5a = 6,$$

解得：  $a = -3$  或  $a = -2$  (舍去) .

$$\therefore a + 5 = -3 + 5 = 2,$$

$$\therefore M(-3, 2);$$

情况二：如图 2，若点  $M$  在  $x$  轴的下方，连接  $EN, CM, MN$ ，



$\therefore$  四边形  $CENM$  为平行四边形， $CE = MN$  .

设  $M(a, a+5)$ ，则  $N(a, -a^2 - 4a + 5)$  .

$$\therefore MN = (a+5) - (-a^2 - 4a + 5) = a^2 + 5a,$$

$$\therefore a^2 + 5a = 6,$$

解得:  $a = -6$  或  $a = 1$  (舍去).

$$\therefore a + 5 = -6 + 5 = -1,$$

$$\therefore M(-6, -1),$$

综上所述,  $M$  点的坐标为  $(-3, 2)$  或  $(-6, -1)$ .

**【点睛】** 本题主要考查了二次函数的综合运用, 求二次函数、一次函数的解析式, 解一元二次方程, 利用点的坐标的特征表示相应线段的长度、平行四边形的性质, 分类讨论、画出图形、数形结合是解题的关键.