

未来科技学校

2025 学年第一学期八年级数学期末评估练习问卷

(满分 150 分 答卷时间: 100 分钟)

一、选择题 (每题 4 分)

1. 在实数 3.14 , $1.\dot{2}\dot{3}$, $\sqrt{8}$, $1.1010010001\dots$ (每两个 1 之间依次增加一个 0), $\frac{\pi}{2}$, $\frac{22}{7}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$ 中, 无理数有 ()

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

【答案】D

【解析】

【分析】此题主要考查了无理数的定义, 其中初中范围内学习的无理数有: π , 2π 等; 开方开不尽的数; 以及像 $0.1010010001\dots$ (两个 1 之间依次多一个 0) 这样规律的数. 无理数就是无限不循环小数. 理解无理数的概念, 一定要同时理解有理数的概念, 有理数是整数与分数的统称. 即有限小数和无限循环小数是有理数, 而无限不循环小数是无理数. 由此即可得出答案.

【详解】解: $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$,

则 3.14 , $1.\dot{2}\dot{3}$, $\frac{22}{7}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$ 是有理数,

$\sqrt{8}$, $1.1010010001\dots$ (每两个 1 之间依次增加一个 0), $\frac{\pi}{2}$, 是无理数, 共 3 个;

故选: D.

2. 下列计算正确的是 ()

- A. $\sqrt{a^2} = a$ B. $\sqrt{(-a)^2} = \pm a$ C. $\sqrt{a^4} = a^2$ D. $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查二次根式的性质, 注意区分: $(\sqrt{a})^2 = a$ 和 $\sqrt{a^2} = |a|$ 是解题的关键.

根据二次根式的性质、绝对值的定义逐个选项判断即可.

【详解】A. $\sqrt{a^2} = |a|$, 选项错误, 不符合题意;

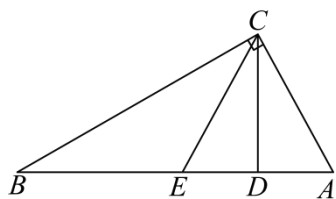
B. $\sqrt{(-a)^2} = |a|$, 选项错误, 不符合题意;

C. $\sqrt{a^4} = a^2$, 选项正确, 符合题意;

D. $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = |a| + |b|$, 选项错误, 不符合题意;

故选: C.

3. 如图: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, CD 是斜边 AB 上的高, CE 是斜边上的中线, 那么下列结论中错误的是 ()



A. $\angle ACD = \angle B$

B. $\angle ECB = \angle A - \angle ECD$

C. $\angle ACD = \angle ECB$

D. $\angle ECB = \angle DCE$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了直角三角形的性质, 掌握三角形外角的性质、等腰三角形的性质, 特殊三角形中边和角之间的关系是解决本题的关键. 根据特殊三角形中边和角之间的关系, 判断三角形中角之间的关系.

【详解】解: A. 因为 $\angle A + \angle B = 90^\circ$, $\angle A + \angle ACD = 90^\circ$, 根据同角的余角相等, 可得 $\angle ACD = \angle B$, 所以该选项正确;

B. 因为 $\angle ACD = \angle A - \angle ECD$, 又由选项 A 知 $\angle ACD = \angle B$, 且 CE 是中线, $AE = CE$, 所以 $\angle A = \angle ACE$, $\angle ECB = \angle ACB - \angle ACE = 90^\circ - \angle A$,

同时 $\angle ACD = \angle B$, $\angle BCD = 90^\circ - \angle ACD$, $\angle ECB = \angle BCD - \angle ECD$,

所以 $\angle ECB = \angle A - \angle ECD$,

该选项正确;

C. 由选项 A 知 $\angle ACD = \angle B$, 因为 $CE = BE$,

所以 $\angle B = \angle ECB$,

所以 $\angle ACD = \angle ECB$,

该选项正确;

D. 在一般情况下, 无法得出 $\angle ECB = \angle DCE$,

该选项错误.

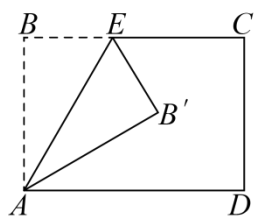
故选: D.

4. 有一张长方形纸片 $ABCD$, 按下面步骤进行折叠:

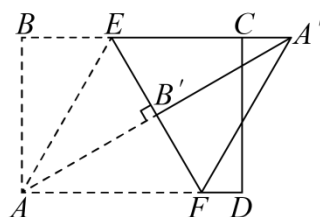
第一步: 如图①, 点 E 在边 BC 上, 沿 AE 折叠, 点 B 落在点 B' 处;

第二步: 如图②, 沿 EB' 折叠, 使点 A 落在 BC 延长线上的点 A' 处, 折痕为 EF .

下列结论中错误的是 ()



图①



图②

- A. $\triangle AEF$ 是等边三角形 B. EF 垂直平分 AA' C. $CA' = FD$ D. $EA' = AF$

【答案】C

【解析】

【分析】根据两次折叠，得出 $\angle AEB = \angle AEF = \angle A'EF = 60^\circ$ ，利用 $BC \parallel AD$ ，得到 $\angle EAF = 60^\circ$ ，从而判定 $\triangle AEF$ 为等边三角形， $EA' = AF$ ，可知选项 A、D 正确；由 $AE = A'E$ 、 $AF = A'F$ ，得出 EF 垂直平分 AA' ，验证选项 B 正确；因矩形边长未确定，故 $CA' = FD$ 不一定成立，选项 C 错误.

【详解】解：根据折叠的性质可知， $\angle AEB = \angle AEF = \angle A'EF$ ，

$$\because \angle AEB + \angle AEF + \angle A'EF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AEF = \angle A'EF = 60^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$$\therefore BC \parallel AD,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle EAF = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle AEF$ 是等边三角形，选项 A 正确，

$$\therefore AE = AF,$$

$\because$ 根据折叠可知 $\triangle AEF \cong \triangle A'EF$ ，

$$\therefore AE = A'E, \quad AF = A'F,$$

$$\therefore A'E = AF, \quad \text{选项 D 正确,}$$

$$\because AA' \perp EF,$$

$\therefore EF$ 垂直平分 AA' ，选项 B 正确，

$\because AB$ 、 BC 的长度不确定，

$\therefore CA'$ 不一定等于 FD ，选项 C 错误.

故选：C.

【点睛】本题考查折叠的轴对称性质，矩形的性质，等边三角形的判定，垂直平分线的判定，理解折叠前后对应角相等、对应边相等是解题关键.

5. 对于实数 a 、 b ，定义运算“ $\star$ ”： $a \star b = \begin{cases} a^2 - b (a \leq b) \\ b^2 - a (a > b) \end{cases}$ ，关于 x 的方程 $(2x+1) \star (2x-3) = t$ 恰好有两个不相等的实数根，则 t 的取值范围是 ()

- A. $t < -\frac{15}{4}$ B. $t > -\frac{15}{4}$ C. $t < -\frac{17}{4}$ D. $t > -\frac{17}{4}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程根的判别式，新定义运算，由于 $2x+1 > 2x-3$ 恒成立，因此运算使用第二种情况，将方程化为二次方程，根据判别式大于零求解即可。

【详解】解： $\because a = 2x+1$ ， $b = 2x-3$ ，且 $1 > -3$ ，

$\therefore a > b$ ，

$\therefore a \star b = b^2 - a = (2x-3)^2 - (2x+1) = 4x^2 - 12x + 9 - 2x - 1 = 4x^2 - 14x + 8$ ，

$\therefore$ 方程化为 $4x^2 - 14x + 8 = t$ ，即 $4x^2 - 14x + (8-t) = 0$ ，

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根，

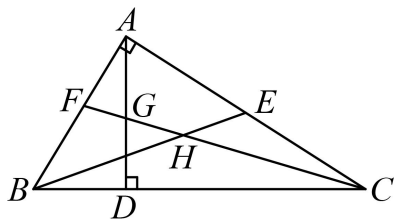
$\therefore \Delta = (-14)^2 - 4 \times 4 \times (8-t) = 196 - 128 + 16t = 68 + 16t > 0$ ，

解得 $t > -\frac{17}{4}$ ，

故选：D.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， AD 是高， BE 是中线， CF 是角平分线， CF 交 AD 于点 G ，交 BE 于点 H ，下面说法正确的是 ()

① $\triangle ABE$ 的面积 = $\triangle BCE$ 的面积；② $\angle AFG = \angle AGF$ ；③ $\angle FAG = 2\angle ACF$ ；④ $BH = CH$.



- A. ①②③④ B. ①②③ C. ②④ D. ①③

【答案】B

【解析】

【分析】根据等底等高的三角形的面积相等即可判断①，根据三角形内角和定理求出 $\angle ABC = \angle CAD$ ，根

据三角形的外角性质即可推出②，根据三角形内角和定理求出 $\angle FAG = \angle ACD$ ，根据角平分线定义即可判断③，根据等腰三角形的判定判断④即可。

本题考查了三角形内角和定理，三角形的外角性质，三角形的角平分线、中线、高，等腰三角形的判定等知识点，能综合运用定理进行推理是解此题的关键。

【详解】解： $\because BE$ 是中线，

$$\therefore AE = CE,$$

$\therefore \triangle ABE$ 的面积 $= \triangle BCE$ 的面积，故①符合题意；

$\because CF$ 是角平分线，

$$\therefore \angle ACF = \angle BCF,$$

$\because AD$ 为高，

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 90^\circ, \angle ACB + \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle CAD,$$

$$\because \angle AFG = \angle ABC + \angle BCF, \angle AGF = \angle CAD + \angle ACF,$$

$$\therefore \angle AFG = \angle AGF, \text{ 故②符合题意；}$$

$\because AD$ 为高，

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 90^\circ, \angle ABC + \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle BAD,$$

$\because CF$ 是 $\angle ACB$ 的平分线，

$$\therefore \angle ACB = 2\angle ACF,$$

$$\therefore \angle BAD = 2\angle ACF,$$

即 $\angle FAG = 2\angle ACF$ ，故③符合题意；

根据已知条件不能推出 $\angle HBC = \angle HCB$ ，即不能推出 $BH = CH$ ，故④不符合题意；

故选：B.

二、填空题（每题 4 分）

7. 已知 $\sqrt[3]{5.23} \approx 1.735$ ，如果 $\sqrt[3]{x} \approx 173.5$ ，则 $x \approx$ _____.

【答案】 5230000

【解析】

【分析】 本题考查立方根，掌握知识点是解题的关键.

通过比较已知立方根与未知立方根之间的倍数关系，利用立方根的性质进行求解.

【详解】 解：已知 $\sqrt[3]{5.23} \approx 1.735$ ，且 $\sqrt[3]{x} \approx 173.5$.

所以 $x \approx 100^3 \times 5.23 = 1000000 \times 5.23 = 5230000$.

故答案为：5230000.

8. 若二次根式 $\frac{\sqrt{x+1}}{2x-1}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围为_____.

【答案】 $x \geq -1$ 且 $x \neq \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件，分式有意义的条件，熟记二次根式的被开方数是非负数、分母不为零是解题的关键. 根据二次根式的被开方数是非负数、分母不为零分别列出不等式，解不等式，即可求解.

【详解】 解：由题意，二次根式 $\sqrt{x+1}$ 在实数范围内有意义，

故 $x+1 \geq 0$ ，

解得 $x \geq -1$ ；

$\therefore$ 分式 $\frac{1}{2x-1}$ 有意义，

故 $2x-1 \neq 0$ ，

解得 $x \neq \frac{1}{2}$ ；

因此， x 的取值范围为 $x \geq -1$ 且 $x \neq \frac{1}{2}$.

故答案为： $x \geq -1$ 且 $x \neq \frac{1}{2}$.

9. 若 a ， β 是方程 $x^2 - 2x - 5 = 0$ 的两个实数根，则 $a + \beta - a\beta$ 的值为_____.

【答案】 7

【解析】

【分析】 本题考查了代数式求值，一元二次方程根与系数的关系，准确的计算是解决本题的关键.

利用一元二次方程根与系数的关系，求出两根之和与两根之积，再代入表达式计算即可.

【详解】解： $\because a, \beta$ 是方程 $x^2 - 2x - 5 = 0$ 的两个实数根，

$$\therefore a + \beta = -\frac{-2}{1} = 2, \quad a\beta = \frac{-5}{1} = -5,$$

$$\therefore a + \beta - a\beta$$

$$= 2 - (-5)$$

$$= 2 + 5$$

$$= 7.$$

故答案为：7.

10. 在实数范围内分解因式： $2x^2 - 3xy - y^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2\left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}y\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}y\right)$

【解析】

【分析】 本题考查在实数范围内分解因式，通过令二次表达式等于零，解关于 x 的二次方程，利用求根公式得到根，然后写出因式分解形式.

【详解】 解： 令 $2x^2 - 3xy - y^2 = 0$,

$$\therefore \Delta = (-3y)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-y^2) = 9y^2 + 8y^2 = 17y^2,$$

$$\text{则 } x = \frac{3y \pm \sqrt{17y^2}}{4} = \frac{3y \pm \sqrt{17}|y|}{4},$$

$$\text{当 } y \geq 0 \text{ 时, } x = \frac{(3 \pm \sqrt{17})y}{4},$$

$$\text{当 } y < 0 \text{ 时, } x = \frac{(3 \mp \sqrt{17})y}{4},$$

$$\text{所以根为 } x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}y, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{4}y,$$

$$\text{因此, } 2x^2 - 3xy - y^2 = 2\left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}y\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}y\right).$$

$$\text{故答案为: } 2\left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}y\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}y\right).$$

11. 已知 $m, n, 3$ 分别是等腰三角形（非等边三角形）三边的长，且 m, n 是关于 x 的一元二次方程

$x^2 - 4x + k + 2 = 0$ 的两个根，则 k 的值是_____.

【答案】 1 或 2 或 1

【解析】

【分析】 本题考查了根的判别式，一元二次方程的解，等腰三角形的性质等知识点，注意：等腰三角形的两腰相等. 已知一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ (a 、 b 、 c 为常数， $a \neq 0$)，①当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根，②当 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时，方程有两个相等的实数根，③当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时，方程没有实数根. 分为两种情况：① m 、 n 是腰，② m 、 n 其中一个是腰，另一个是底边，分别求出答案即可.

【详解】 解：①当 m 、 n 为腰时， $m = n$ ，

$\because m$ 、 n 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + k + 2 = 0$ 的两个根，

$\therefore$ 方程有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (k + 2) = 0,$$

解得： $k = 2$ ；

$$\therefore x^2 - 4x + 4 = 0,$$

解得 $x_1 = x_2 = 2$ ，

此时三角形三边长为：2、2、3，符合三角形三边关系，

②当 m 和 3 (或 n 和 3) 是腰时， $m = 3$ ，

$\because$ 三角形不是等边三角形，

$\therefore$ 此时方程有两个不相等的实数根，

$\because m$ 、 n 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + k + 2 = 0$ 的两个根，

$\therefore$ 把 $m = 3$ 代入方程得 $9 - 12 + k + 2 = 0$ ，

解得： $k = 1$ ；

$$\therefore x^2 - 4x + 3 = 0,$$

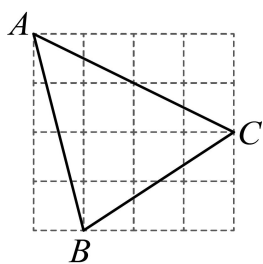
解得 $x_1 = 3$ ， $x_2 = 1$ ，

此时三角形三边长为：1、3、3，符合三角形三边关系，

$\therefore k = 1$ 或 2.

故答案为：1 或 2.

12. 如图，在 4×4 的网格中，每个小正方形的边长均为 2，则 B 到直线 AC 的距离为_____.

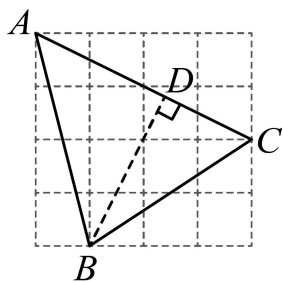


【答案】 $\frac{14\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】此题考查了勾股定理，二次根式的运算，三角形的面积，掌握相关知识是解本题的关键。根据小正方形的边长为1，利用勾股定理求出 AC ，由正方形面积减去三个直角三角形面积求出三角形 ABC 面积，利用面积法求出 AC 边上的高即可。

【详解】解：如图，作 $BD \perp AC$ ，



$$S_{\triangle ABC} = 8 \times 8 - \frac{1}{2} \times 4 \times 8 - \frac{1}{2} \times 4 \times 6 - \frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 28$$

由勾股定理得 $AC = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$ ，

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times BD = 28,$$

解得： $BD = \frac{14\sqrt{5}}{5}$ 。

故答案为： $\frac{14\sqrt{5}}{5}$ 。

13. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2 + 2mx + m - 3 = 0$ 有实数根，则 m 的取值范围为_____。

【答案】

$$m \geq -\frac{3}{2} \text{ 且 } m \neq -1$$

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根的判别式和一元二次方程的定义。直接利用一元二次方程根的判别式、

一元二次方程的定义求解即可得.

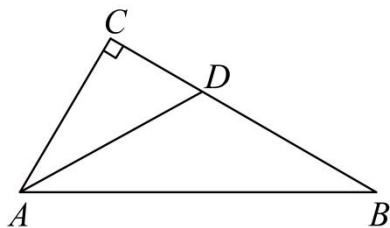
【详解】解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2 + 2mx + m - 3 = 0$ 有实数根,

$$\therefore \begin{cases} (2m)^2 - 4(m+1)(m-3) \geq 0 \\ m+1 \neq 0 \end{cases},$$

解得 $m \geq -\frac{3}{2}$ 且 $m \neq -1$.

故答案为: $m \geq -\frac{3}{2}$ 且 $m \neq -1$.

14. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AD 平分 $\angle CAB$. 若 $S_{\triangle ABD} = 24$, $AB = 12$, 则 $CD =$ _____.

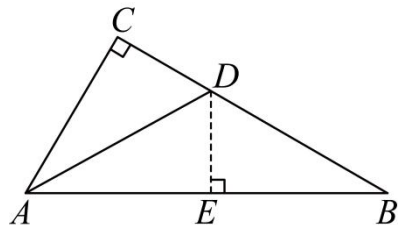


【答案】4

【解析】

【分析】本题考查了角平分线的性质及三角形面积公式的灵活运用. 过 D 点作 $DE \perp AB$, 垂足为 E , 由已知 $S_{\triangle ABD} = 24$, $AB = 12$, 可求 DE , 再利用角平分线性质的证明 $CD = DE$ 即可.

【详解】解: 过 D 点作 $DE \perp AB$, 垂足为 E ,



$$\because S_{\triangle ABD} = 24, \quad AB = 12,$$

$$\therefore \frac{1}{2} AB \times DE = 24,$$

解得 $DE = 4$,

又 $\because AD$ 平分 $\angle CAB$, $\angle C = 90^\circ$, $DE \perp AB$,

$$\therefore CD = DE = 4.$$

故答案为: 4.

15. 我们把两条对角线长度之比为1:2的菱形叫做“钻石菱形”, 如果一个“钻石菱形”的面积为8, 那么它的边长是_____.

【答案】 $\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 设 $BD = x$, $AC = 2x$, 由菱形 $ABCD$ 的面积 $= \triangle DAC$ 的面积 $+ \triangle BAC$ 的面积 $= \frac{1}{2} AC \cdot BD = 8$, 得到 $x^2 = 8$, 求出 $x = 2\sqrt{2}$, 得到 $OD = \sqrt{2}$, $AO = 2\sqrt{2}$, 由勾股定理得到 $AD = \sqrt{OD^2 + OA^2} = \sqrt{10}$, 即可得到菱形的边长是 $\sqrt{10}$.

【详解】 解: 如图, 菱形 $ABCD$ 中, $BD : AC = 1 : 2$,

设 $BD = x$, $AC = 2x$,

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的面积 $= \triangle DAC$ 的面积 $+ \triangle BAC$ 的面积 $= \frac{1}{2} AC \cdot OD + \frac{1}{2} AC \cdot OB = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 8$,

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2x \cdot x = 8,$$

$$\therefore x^2 = 8,$$

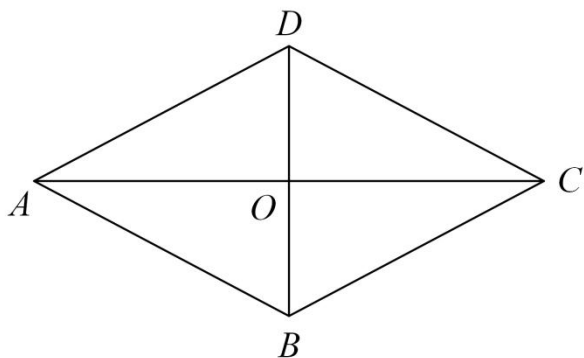
$$\therefore x = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore OD = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} x = \sqrt{2}, \quad AO = \frac{1}{2} AC = x = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore AD = \sqrt{OD^2 + OA^2} = \sqrt{10},$$

$\therefore$ 菱形的边长是 $\sqrt{10}$.

故答案为: $\sqrt{10}$.



【点睛】 本题考查菱形的性质, 勾股定理, 关键是由菱

形的性质求出 OD , AO 的长.

16. 如图 (b) 将一个由 5 个边长为 1cm 的小正方形组成的长方形, 通过剪拼组成了一个大的正方形 (没有重叠和空隙). 图 (c) 是一个数轴, 把图 (b) 中大正方形旋转使得边 AB 落到数轴上, 且点 A 与 -2 重合, 点 B 在点 A 右侧, 点 P 表示数 1, 将数轴沿着点 P 所在的某条直线翻折使得点 B 恰好落在数轴上的点 B' 处, 此时点 B' 所表示的数为_____.

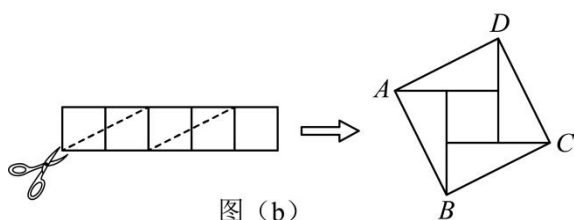


图 (b)

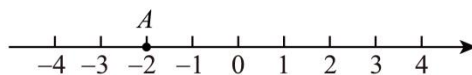


图 (c)

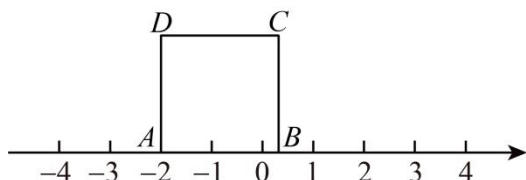
【答案】 $4 - \sqrt{5}$ 和 $-\sqrt{5} + 4$

【解析】

【分析】 本题考查图形剪拼的面积不变性，实数与数轴的对应关系，数轴的对称性质，利用“剪拼前后面积不变”求正方形边长是解题关键.

先由剪拼前后面积不变求出正方形边长为 $\sqrt{5}$ ，确定点 B 表示的数为 $-2 + \sqrt{5}$ ，再根据翻折的对称性，利用中点公式求出点 B' 表示的数.

【详解】 解：大正方形旋转后如图所示.



设拼成的正方形边长为 a ,

根据题意可知长方形的面积为 $1 \times 5 = 5\text{cm}^2$,

$\because$ 长方形与拼成的正方形面积相同,

$\therefore a^2 = 5$, 则 $a = \sqrt{5}\text{cm}$,

$\because$ 点 A 与 -2 重合,

$\therefore$ 点 B 在数轴上表示的数为 $-2 + \sqrt{5}$,

$\because$ 点 P 表示数 1 , 将数轴沿着点 P 所在的某条直线翻折使得点 B 恰好落在数轴上的点 B' 处,

设点 B' 表示的数为 x ,

$$\therefore \frac{-2 + \sqrt{5} + x}{2} = 1,$$

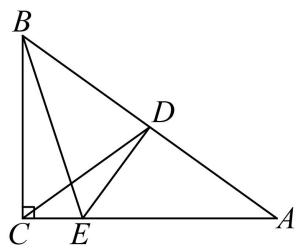
$$\therefore -2 + \sqrt{5} + x = 2,$$

解得 $x = 4 - \sqrt{5}$,

故点 B' 所表示的数为 $4 - \sqrt{5}$.

故答案为: $4 - \sqrt{5}$.

17. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 斜边 AB 的垂直平分线 DE 分别交 AB 、 AC 于点 D 、 E , $\angle ACD = 2\angle CBE$, 则 $\angle A$ 的度数为_____.



【答案】 36° ##36 度

【解析】

【分析】 本题考查了直角三角形斜边中线性质的、垂直平分线性质及等腰三角形性质, 解题关键是利用这些性质将角度关系转化为方程求解.

利用直角三角形斜边中线性质的得 $CD = AD$, 故 $\angle ACD = \angle A$; 结合题设 $\angle ACD = 2\angle CBE$, 设 $\angle CBE = x$, 则 $\angle A = 2x$; 由垂直平分线性质得 $EB = EA$, 故 $\angle EBA = \angle A = 2x$; 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC + \angle A = 90^\circ$, 列方程即可解答.

【详解】 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 斜边 AB 的垂直平分线 DE 分别交 AB 、 AC 于点 D 、 E ,

$\therefore D$ 是斜边 AB 的中点, $EB = EA$

$\therefore CD = AD = \frac{1}{2}AB$, $\angle EBA = \angle A$, $\angle ACD = \angle A$,

设 $\angle CBE = x$,

$\therefore \angle ACD = 2\angle CBE$,

$\therefore \angle A = 2x$.

$\angle EBA = \angle A = 2x$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABC + \angle A = 90^\circ$

即 $\angle CBE + \angle EBA + \angle A = 90^\circ$,

$\therefore x + 2x + 2x = 90^\circ$

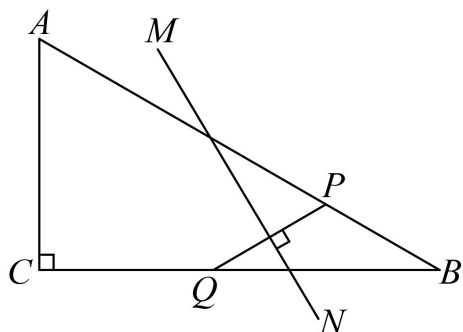
$\therefore x = 18^\circ$

$\therefore \angle A = 36^\circ$.

故答案为: 36° .

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $AC = 4$, 点 P 为 AB 上一点, 将线段 PB 绕点 P 顺时针

旋转得线段 PQ ，点 Q 在射线 BC 上，当 PQ 的垂直平分线 MN 经过 ABC 一边中点时， PB 的长为 _____.



【答案】 2 或 3 或 5

【解析】

【分析】 求出 $AB=8$ ， $BC=4\sqrt{3}$ ，设 MN 交 BC 于点 G ，连接 PG 。分三种情况，当 MN 经过 AB 的中点 D 时， $BD=4$ 。由旋转性质得到， $PQ=PB$ ，得到 $\angle PQB=\angle B=30^\circ$ ，得到 $\angle DPQ=60^\circ$ ，根据线段垂直平分线性质的得到 $PD=QD$ ，得到 $\triangle PQD$ 是等边三角形，得到 $PD=PB$ ，即得 $PB=2$ ；当 MN 经过 AC 的中点 E 时， $EC=2$ ，求出 $\angle CEG=30^\circ$ ，得到 $CG=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ ，得到 $BG=\frac{10}{3}\sqrt{3}$ ，根据 $\angle QPG=30^\circ$ ，求得 $\angle GPB=90^\circ$ ，即得 $PB=5$ ；当 MN 经过 BC 的中点 F 时， $BF=2\sqrt{3}$ ，可得 $PB=3$ 。

【详解】 $\because$ 在 ABC 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle B=30^\circ$ ， $AC=4$ ，

$$\therefore AB=2AC=8,$$

$$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=4\sqrt{3},$$

PQ 的垂直平分线 MN 经过 ABC 一边中点，可分为以下三种情况：

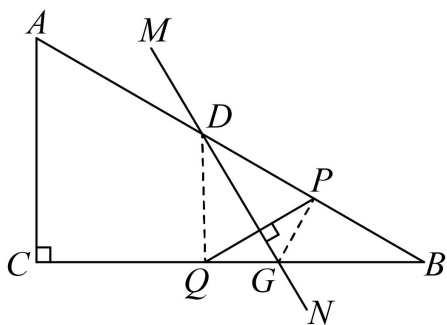
经过 AB 的中点 D ；经过 AC 的中点 E ；经过 BC 的中点 F 。

设 MN 交 BC 于点 G ，连接 PG ，

则 $PG=QG$ 。

当 MN 经过 AB 的中点 D 时，如图：

$$BD=\frac{1}{2}AB=4,$$



由旋转知, $PQ = PB$,

$$\therefore \angle PQB = \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DPQ = \angle B + \angle PQB = 60^\circ,$$

连接 DQ ,

$\because MN$ 垂直平分 PQ ,

$$\therefore PD = QD,$$

$\therefore \triangle PQD$ 是等边三角形,

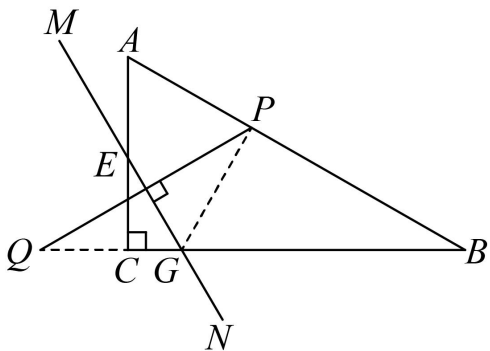
$$\therefore PD = QP,$$

$$\therefore PD = PB,$$

$$\therefore PB = \frac{1}{2}BD = 2;$$

当 MN 经过 AC 的中点 E 时, 如图:

$$EC = \frac{1}{2}AC = 2,$$



$\because MN$ 垂直 PQ ,

$$\therefore \angle CEG = 90^\circ - \angle EGQ = \angle PQB = 30^\circ,$$

设 $CG = x$,

则 $EG = 2x$,

$$\therefore CG^2 + EC^2 = EG^2,$$

$$\therefore x^2 + 2^2 = (2x)^2,$$

$$\therefore CG = \frac{2}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore BG = BC - CG = \frac{10}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore PG = QG,$$

$$\therefore \angle PQB = \angle QPG = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle APG = \angle APQ + \angle QPG = 90^\circ,$$

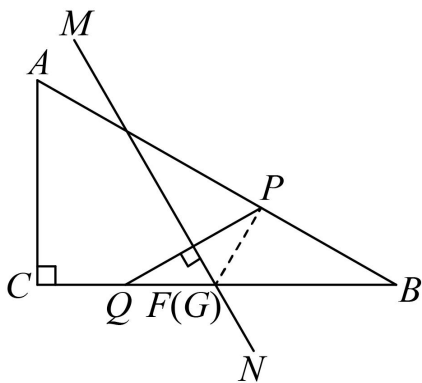
$$\therefore \angle GPB = 180^\circ - \angle APG = 90^\circ,$$

$$\therefore PG = \frac{1}{2}BG = \frac{5}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore PB = \sqrt{BG^2 - PG^2} = 5;$$

当 MN 经过 BC 的中点 F 时, 如图:

$$BF = \frac{1}{2}BC = 2\sqrt{3},$$



$$\therefore \angle BPF = 90^\circ$$

$$\therefore PF = \frac{1}{2}BF = \sqrt{3},$$

$$\therefore PB = \sqrt{BF^2 - PF^2} = 3.$$

综上: PB 的长为: 2 或 5 或 3.

故答案为: 2 或 3 或 5.

【点睛】 此题考查了旋转, 熟练掌握旋转的性质, 含 30° 直角三角形的性质, 等边三角形的判定与性质, 勾股定理, 直角三角形, 线段垂直平分线的性质, 三角形外角的性质, 分类讨论, 是解题的关键.

三、简答题 (第 19、20 题 12 分, 21、22 题各 8 分)

19. (1) 计算: $\sqrt{48} \times \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{12} \div \sqrt{2} + \sqrt{24}$

(2) 计算: $a\sqrt{8a} - 2a^2\sqrt{\frac{1}{8a}} + 3\sqrt{2a^3}$

【答案】 (1) $4 + \sqrt{6}$

(2) $\frac{9a}{2}\sqrt{2a}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算, 熟练掌握运算法则是解答本题的关键.

(1) 先根据二次根式的性质, 二次根式的除法和乘法法则计算, 再合并同类二次根式即可; (2) 先逐项化简, 再合并同类二次根式即可.

【详解】 解: (1) $\sqrt{48} \times \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{12} \div \sqrt{2} + \sqrt{24}$

$$= \sqrt{48 \times \frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{12}{2}} + \sqrt{24}$$
$$= 4 - \sqrt{6} + 2\sqrt{6}$$
$$= 4 + \sqrt{6};$$

(2) $a\sqrt{8a} - 2a^2\sqrt{\frac{1}{8a}} + 3\sqrt{2a^3}$

$$= a \cdot 2\sqrt{2a} - 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{2a}}{4a} + 3a\sqrt{2a}$$
$$= 2a\sqrt{2a} - \frac{a}{2}\sqrt{2a} + 3a\sqrt{2a}$$
$$= \frac{9a}{2}\sqrt{2a}.$$

20. (1) 解方程: $4x^2 - 12x - 7 = 0$

(2) 解方程: $\frac{x}{x-2} - 1 = \frac{4}{x^2 - 4x + 4}$

【答案】 (1) $x_1 = \frac{7}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$; (2) $x = 4$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程，解分式方程：

(1) 利用因式分解法求解；

(2) 去分母，将分式方程化为整式方程，求出解后代入检验即可.

【详解】 解：(1) $4x^2 - 12x - 7 = 0$,

$$(2x-7)(2x+1)=0,$$

$$2x-7=0 \text{ 或 } 2x+1=0,$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{7}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2};$$

$$(2) \quad \frac{x}{x-2} - 1 = \frac{4}{x^2 - 4x + 4},$$

$$\frac{x}{x-2} - 1 = \frac{4}{(x-2)^2},$$

$$\text{化为整式方程，得 } x(x-2) - (x-2)^2 = 4,$$

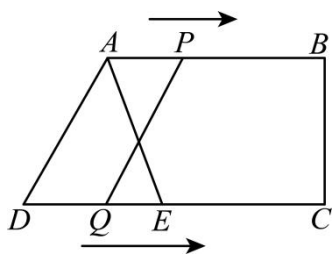
$$\text{整理得 } 2x - 4 = 4,$$

$$\text{解得 } x = 4,$$

$$\text{经检验：} x=4 \text{ 时，} (x-2)^2 = (4-2)^2 = 4 \neq 0,$$

因此 $x=4$ 是原分式方程的解.

21. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $BC \perp CD$ ， $AB = 8\text{cm}$ ， $DC = 10\text{cm}$ ， E 是 DC 上一点，且 $DE = 3$ ， P 从 A 点出发以 1cm/s 的速度向 B 点运动，同时 Q 从 D 点出发以 2cm/s 的速度向 C 点运动，当其中一点到达终点时，另一点也随之停止，设运动时间为 $t(\text{s})$ ，当以 A 、 P 、 E 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形时，求 t 的值.



【答案】 当以 A 、 P 、 E 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形时， t 的值为 1 或 3.

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的判定，一元一次方程的应用，熟练掌握一组对边平行且相等的四边形是平行四边形是解题的关键. 分点 Q 在 AE 的左侧和右侧两种情形，结合一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，建立等式求解即可.

【详解】解：当点 Q 在 AE 的左侧时，设运动时间为 $t(s)$ ，

根据题意，得 $AP = t\text{cm}$, $DQ = 2t\text{cm}$ ，

$$\because DE = 3\text{cm},$$

$$\therefore QE = (3 - 2t)\text{cm},$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore AP \parallel QE,$$

故当 $AP = QE$ 时，以 A 、 P 、 E 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形，

$$\therefore t = 3 - 2t$$

解得 $t = 1(s)$ 。

当点 Q 在 AE 的右侧时，设运动时间为 $t(s)$ ，

根据题意，得 $AP = t\text{cm}$, $DQ = 2t\text{cm}$ ，

$$\because DE = 3\text{cm},$$

$$\therefore QE = (2t - 3)\text{cm},$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore AP \parallel QE,$$

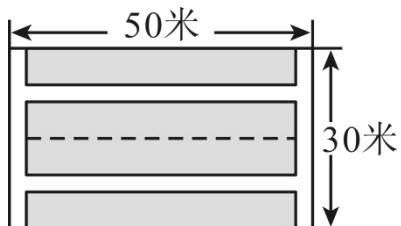
故当 $AP = QE$ 时，以 A 、 P 、 E 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形，

$$\therefore t = 2t - 3$$

解得 $t = 3(s)$ 。

则当以 A 、 P 、 E 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形时， t 的值为 1 或 3。

22. 某校新建一个三层停车楼，每一层布局如图所示。已知每层长为 50 米，宽 30 米。阴影部分设计为停车位，地面需要喷漆，其余部分是等宽的通道，已知喷漆面积为 1056 平方米。



(1) 求通道的宽是多少米。

(2) 据调查分析, 停车场多余 64 个车位可以对外出租, 当每个车位的月租金为 200 元时, 可全部租出; 每个车位的月租金每上涨 10 元, 就会少租出 1 个车位, 当每个车位的月租金上涨多少元时, 既能优惠大众, 又能使对外开放的月租金收入为 14400 元?

【答案】(1) 3 米 (2) 上涨 40 元

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用, 理解题意找准等量关系列出方程是解题的关键.

(1) 设通道的宽是 x 米, 根据题意列出方程, 解出 x 的值即可解答;

(2) 设每个车位的月租金上涨 y 元, 根据题意列出方程, 解出 y 的值, 结合优惠大众选择较小的 y 的值即可解答.

【小问 1 详解】

解: 设通道的宽是 x 米, 则每一层的停车位可合成长为 $(50-2x)$ 米, 宽为 $(30-2x)$ 米的长方形,

依题意, 得 $(50-2x)(30-2x)=1056$,

解得 $x_1=3, x_2=37$ (不合题意, 舍去).

答: 通道的宽是 3 米.

【小问 2 详解】

解: 设每个车位的月租金上涨 y 元, 则每个车位的月租金为 $(200+y)$ 元, 可租出 $\left(64-\frac{y}{10}\right)$ 个车位,

依题意, 得 $(200+y)\left(64-\frac{y}{10}\right)=14400$,

解得 $y_1=40, y_2=400$,

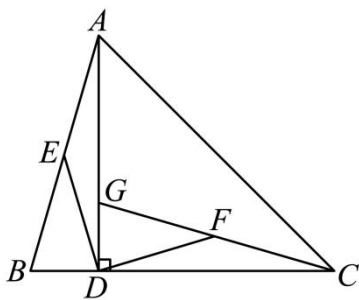
又 $\because$ 要优惠大众,

$\therefore y=40$.

答: 每个车位的月租金应上涨 40 元.

四、解答题 (第 23、24 题每题 12 分, 25 题 14 分)

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=45^\circ$, $AD \perp BC$, 垂足为点 D , G 是 AD 上一点, 且 $BD=DG$. 连接 CG , 点 E 、 F 分别是 AB 、 CG 的中点, 求证: $DE=DF$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定与性质，直角三角形斜边上的中线的性质，熟练掌握以上知识点是解题的关键. 根据 $\angle ACB = 45^\circ$ ， $AD \perp BC$ ，推出 $AD = CD$ ，从而证明 $\text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle CGD$ (SAS)，得出 $AB = CG$ ，再根据直角三角形斜边上的中线的性质即可证明.

【详解】 证明： $\because \angle ACB = 45^\circ$ ， $AD \perp BC$

$$\therefore \angle CAD = 45^\circ, \quad \angle ADC = \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle ACD$$

$$\therefore AD = CD,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 和 $\text{Rt}\triangle CGD$ 中

$$\begin{cases} AD = CD \\ \angle ADC = \angle ADB \\ BD = DG \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle CGD \text{ (SAS)}$$

$$\therefore AB = CG$$

又 $\because$ 点 E 、 F 分别是 AB 、 CG 的中点

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AB, \quad DF = \frac{1}{2}CG$$

$$\therefore DE = DF.$$

24. 我们知道一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两根为 x_1 ， x_2 ，若其中一个根是另一个根的 n 倍 (n 为正整数)，则称这样的方程为 n 倍“梅石花”方程，例如：方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 的两个根分别是 2 和 4，则这个方程就是二倍“梅石花”方程；若一元二次方程 $ay^2 + by + c = m$ ($a \neq 0, m \neq 0$) 的两根为 y_1 ， y_2 ，则称这样的方程为“状元来”方程.

(1) 根据上述定义，请判断： $2x^2 - 5x + 2 = 0$ 是_____倍“梅石花”方程；

(2) 若关于 x 的方程 $x^2 - bx + c = 0 (c \neq 0)$ 是 n 倍“梅石花”方程, 直接写出 $\frac{b^2}{4c}$ 的最小值是_____.

(3) 若方程 $-y^2 + 3y - 2 = m (m \neq 0)$ 为“状元来”方程, 求证: $\frac{(y_1 - 1)^2}{m} = \frac{y_2 - 2}{y_1 - 2}$.

【答案】(1) 4

(2) 1

(3) 证明见解析

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程、一元二次方程的根与系数的关系、完全平方公式等知识, 熟练掌握一元二次方程的根与系数的关系是解题关键.

(1) 利用因式分解法解方程可得 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$, 由此即可得;

(2) 设这个方程的两个根为 x_1, nx_1 , 则可得 $x_1 + nx_1 = b$, $x_1 \cdot nx_1 = c$, 将 $x_1 = \frac{b}{n+1}$ 代入 $x_1 \cdot nx_1 = c$ 化简即可得 $b^2 = \frac{c(n+1)^2}{n}$; 化简可得 $\frac{b^2}{4c} = \frac{1}{4} \left(n + \frac{1}{n} + 2 \right)$, 再根据 $\left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 = n + \frac{1}{n} - 2 \geq 0$ 可得 $n + \frac{1}{n} \geq 2$, 由此即可得;

(3) 根据一元二次方程的根与系数的关系可得 $y_1 + y_2 = 3$, $y_1 y_2 = 2 + m$, 则可得 $m = -(y_1 - 1)(y_1 - 2)$, 代入 $\frac{(y_1 - 1)^2}{m}$ 化简即可得证.

【小问 1 详解】

解: $2x^2 - 5x + 2 = 0$,

$(2x - 1)(x - 2) = 0$,

解得 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$,

$\therefore 2 \div \frac{1}{2} = 4$,

$\therefore 2x^2 - 5x + 2 = 0$ 是 4 倍“梅石花”方程,

故答案为: 4.

【小问 2 详解】

解: 设这个方程的两个根为 x_1, nx_1 ,

$$\therefore x_1 + nx_1 = b, \quad x_1 \cdot nx_1 = c,$$

$$\therefore n \cdot \left(\frac{b}{n+1} \right)^2 = c,$$

$$\therefore b^2 = \frac{c(n+1)^2}{n}, \quad n \text{ 为正整数},$$

$$\therefore \frac{b^2}{4c} = \frac{c(n+1)^2}{4cn}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4n}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{4n}$$

$$= \frac{1}{4} \left(n + \frac{1}{n} + 2 \right),$$

$$\therefore \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 = n + \frac{1}{n} - 2 \geq 0,$$

$$\therefore n + \frac{1}{n} \geq 2,$$

$$\therefore \frac{b^2}{4c} = \frac{1}{4} \left(n + \frac{1}{n} + 2 \right) \geq \frac{1}{4} \times (2 + 2) = 1,$$

$$\therefore \frac{b^2}{4c} \text{ 的最小值为 } 1,$$

故答案为：1.

【小问 3 详解】

证明： $\because -y^2 + 3y - 2 = m (m \neq 0)$ 可化成 $y^2 - 3y + 2 + m = 0$,

$$\therefore y_1 + y_2 = 3, \quad y_1 y_2 = 2 + m,$$

$$\therefore y_2 = 3 - y_1, \quad y_1 = 3 - y_2,$$

$$\therefore m = y_1 y_2 - 2 = y_1 (3 - y_1) - 2 = -y_1^2 + 3y_1 - 2 = -(y_1 - 1)(y_1 - 2),$$

$$\therefore \frac{(y_1 - 1)^2}{m} = \frac{(y_1 - 1)^2}{-(y_1 - 1)(y_1 - 2)} = \frac{1 - y_1}{y_1 - 2} = \frac{1 - (3 - y_2)}{y_1 - 2} = \frac{y_2 - 2}{y_1 - 2}.$$

25. 如图, 在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中, E 为 BC 边上一动点 (点 E 不与 B 、 C 重合), 连接 DE , 以 DE 为直角边作等腰直角三角形 DEF , DF 与正方形 AB 边相交于点 N , 连接 BD .

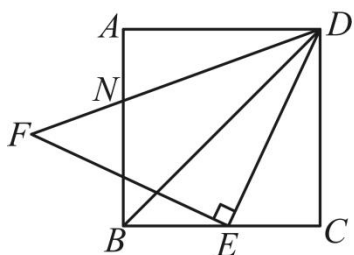


图1

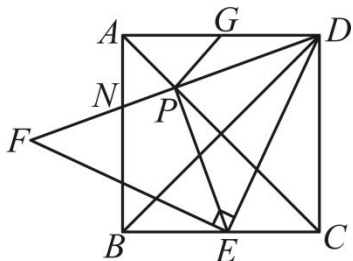


图2

- (1) 求证: $\angle BEF = \angle FDB$;
- (2) 当 E 运动到 BC 的中点时, 求线段 AN 的长;
- (3) 如图 2, 连接 AC 交 DF 于点 P , G 是 AD 的中点, 连接 PG 、 PE , 求 $PE + PG$ 的最小值.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{2}{3}$

(3) $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) 根据等腰直角三角形和正方形的性质, 得出 $\angle CDE = \angle FDB$, 根据同角的余角相等, 得到 $\angle BEF = \angle CDE$, 即可证明结论;

(2) 设 $AN = x$, 则 $BN = 2 - x$. 延长 BA 至 H , 使 $AH = CE = 1$, 连接 HD , NE . 先证明 $\triangle CDE \cong \triangle ADH$ (SAS), 再结合等腰直角三角形的性质, 证明出 $\triangle HDN \cong \triangle EDN$ (SAS), 则 $EN = NH = x + 1$, 再利用勾股定理列方程求解即可;

(3) 过 F 作 $FH \perp BC$ 于 H 点, 连接 FB , PB , GB , 设 AC 与 BD 交于 O 点. 先证明 $\triangle HEF \cong \triangle CDE$ (AAS), 进而证明 $\triangle BHF$ 是等腰直角三角形. 再证明出点 P 是 DF 的中点, 得到 $PB = PE$, 即 $PE + PG = PB + PG \geq BG$, 则当 B 、 P 、 G 共线时, $PE + PG$ 有最小值, 最小值为 BG 的长, 最后利用勾股定理求解即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because \triangle DEF$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle DEF = 90^\circ, \angle EDF = 45^\circ.$$

$\because$ 正方形 $ABCD$,

$$\therefore \angle C = 90^\circ, \angle CDB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = 45^\circ - \angle EDB = \angle FDB,$$

$$\therefore \angle DEF = 90^\circ,$$

