

2025 学年第一学期初二年级期末评价数学学科试卷

时间：100 分钟 满分：100 分

一、选择题：（每道题 3 分，共 18 分）

1. 在二次根式 $\sqrt{x+1}$ 中，字母 x 的取值范围是（ ）

- A. $x \geq 0$ B. $x \leq 0$ C. $x \geq -1$ D. $x \leq -1$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查二次根式有意义的条件，牢记二次根式被开方数是非负数是正确解决本题的关键。根据二次根式有意义的条件，被开方数为非负数，列不等式再解之即可。

【详解】解：被开方数为非负数，可得 $x+1 \geq 0$ ，
解得 $x \geq -1$ 。

故选 C。

2. 在 4 、 $\frac{2}{6}$ 、 $-\sqrt{12}$ 、 -0.01001001 这四个实数中，是无理数为（ ）

- A. 4 B. $\frac{2}{6}$ C. $-\sqrt{12}$ D. -0.01001001

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了无理数：无限不循环小数；分别对各数判断是否是无理数即可。

【详解】解：4 是整数，属于有理数； $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ，是分数，属于有理数； -0.01001001 是有限小数，属于有理数； $-\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$ ，而 $\sqrt{3}$ 是无理数， $-\sqrt{12}$ 是无理数。
所以无理数是 $-\sqrt{12}$ ，

故选：C。

3. 下列条件中，不能确定一个直角三角形的是（ ）

- A. 已知两条直角边 B. 已知两个锐角
C. 已知一条直角边和斜边 D. 已知一个锐角和斜边

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查直角三角形全等的判定方法，需结合边长信息才能唯一确定。根据直角三角形的性质，选项 B 只已知两个锐角但无边长信息，只能确定形状而不能确定大小，因此不能唯一确定一个直角三角形。

【详解】解：对于选项 B：

$\because$ 直角三角形中两个锐角互余，

$\therefore$ 已知两个锐角时，角度固定但边长未知，

$\therefore$ 三角形大小不唯一，只能得到形状相同的三角形，

故不能确定一个直角三角形.

其他选项均可通过三角形全等的判定定理确定唯一三角形.

4. 下列实数中，绝对值最小的数是 ()

A. $\sqrt{16}$

B. $(-2)^{-1}$

C. $(-5)^0$

D. $\sqrt[3]{-8}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了算术平方根与立方根、负整数指数幂与零指数幂、求绝对值等知识，掌握这些知识是关键；计算各选项的数值及绝对值，比较大小即可.

【详解】解： $\sqrt{16} = 4$ ， $|4| = 4$ ；

$$(-2)^{-1} = -\frac{1}{2} = -0.5, \quad |-0.5| = 0.5;$$

$$(-5)^0 = 1, \quad |1| = 1;$$

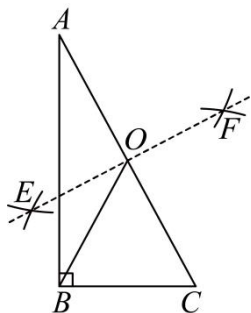
$$\sqrt[3]{-8} = -2, \quad |-2| = 2;$$

比较绝对值： $0.5 < 1 < 2 < 4$ ，

即 $(-2)^{-1}$ 的绝对值最小；

故选：B.

5. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle C = 62^\circ$ ，分别以点 A ， C 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AC$ 的长为半径画弧，两弧（所在圆的半径相等）相交于 E ， F 两点，连接 EF ， EF 与 AC 交于点 O ，则 $\angle ABO$ 的大小为 ()



A. 28°

B. 30°

C. 31°

D. 36°

【答案】A

【解析】

【分析】 本题主要考查了线段垂直平分线的尺规作图，等边对等角和线段垂直平分线的定义，直角三角形的性质等等，由作图方法可得 EF 垂直平分 AC ，则点 O 是 AC 的中点，再由直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半推出 $OB = OC$ ，则 $\angle OBC = \angle C = 62^\circ$ ，据此可得答案.

【详解】 解：由作图方法可得 EF 垂直平分 AC ，

$\therefore$ 点 O 是 AC 的中点，

$\because \angle ABC = 90^\circ$ ，

$$\therefore OB = OC = \frac{1}{2}AC,$$

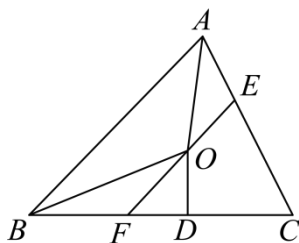
$\therefore \angle OBC = \angle C = 62^\circ$ ，

$\therefore \angle ABO = \angle ABC - \angle OBC = 28^\circ$ ，

故选：A.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 和 $\angle ABC$ 的平分线相交于点 O ，过点 O 作 $EF \parallel AB$ 交 BC 于 F ，交 AC 于 E ，过点 O 作 $OD \perp BC$ 于 D ，下列四个结论：

① $\angle AOB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C$ ；② $AE + BF = EF$ ；③ 当 $\angle C = 90^\circ$ 时， E, F 分别是 AC, BC 的中点；④ 若 $OD = a, CE + CF = 2b$ ，则 $S_{\triangle CEF} = ab$ ．其中正确的结论有（ ）



A. ①②④

B. ①③

C. ②③④

D. ①②③④

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查角平分线的性质，三角形内角和，等腰三角形的判定．熟练掌握这些性质与判定，并能灵活运用是解决此题的关键．

根据角平分线的定义和三角形内角和定理可判断①；根据角平分线的定义和平行线的性质、等腰三角形的判定可判断②；根据三角形三边关系可判断③；根据角平分线的性质定理可判断④．

【详解】 解： $\because AO, BO$ 分别是 $\angle BAC$ 、 $\angle ABC$ 的平分线，

$$\therefore \angle ABO = \angle CBO = \frac{1}{2}\angle ABC, \quad \angle BAO = \angle CAO = \frac{1}{2}\angle BAC,$$

$$\because \angle ABC + \angle BAC = 180^\circ - \angle C,$$

$$\therefore \angle ABO + \angle BAO = \frac{1}{2} \angle ABC + \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle C) = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle C,$$

$$\therefore \angle AOB = 180^\circ - (\angle ABO + \angle BAO) = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle C,$$

故①正确;

$$\because EF \parallel AB,$$

$$\therefore \angle FOB = \angle ABO, \angle EOA = \angle BAO,$$

$$\because \angle ABO = \angle CBO, \angle BAO = \angle CAO,$$

$$\therefore \angle FOB = \angle CBO, \angle EOA = \angle CAO,$$

$$\therefore OF = BF, OE = AE,$$

$$\therefore EF = OF + OE = BF + AE,$$

故②正确;

$$\text{当 } \angle C = 90^\circ \text{ 时, } AE + BF = EF < CE + CF,$$

即 E 、 F 不是中点,

故③错误;

如图, 过点 O 作 $OH \perp AC$ 于点 H , 连接 OC ,

$$\text{则 } OH = OD,$$

$$\therefore S_{\triangle CEF} = S_{\triangle OCF} + S_{\triangle OCE}$$

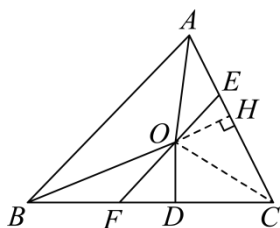
$$= \frac{1}{2} CF \cdot OD + \frac{1}{2} CE \cdot OH$$

$$= \frac{1}{2} (CF + CE) \cdot OD$$

$$= \frac{1}{2} \times 2b \times a$$

$$= ab,$$

故④正确;



综上, 正确的有①②④;

故选: A.

二、填空题：（每道题 2 分，共 24 分）

7. 已知 $\sqrt{a-3} + \sqrt{b-8} = 0$ ，则 $(a-b)^2$ 的平方根是_____.

【答案】 ± 5

【解析】

【分析】 本题考查了算术平方根的非负性，平方根的意义，先根据算术平方根的非负性求出 a, b 的值，然后代入 $(a-b)^2$ 求解即可.

【详解】 解： $\because \sqrt{a-3} + \sqrt{b-8} = 0, \sqrt{a-3} \geq 0, \sqrt{b-8} \geq 0,$

$$\therefore a-3=0, b-8=0,$$

$$\therefore a=3, b=8,$$

$$\therefore (a-b)^2 = (3-8)^2 = 25,$$

$$\therefore (a-b)^2 \text{ 的平方根是 } \pm\sqrt{25} = \pm 5.$$

故答案为： ± 5 .

8. 春节期间，电影《哪吒之魔童闹海》票房表现亮眼，截止到 3 月 20 日，累计票房已达 152 亿元，将数据“152 亿”用科学记数法表示为_____

【答案】

$$1.52 \times 10^{10}$$

【解析】

【分析】 本题考查了用科学记数法表示较大的数，熟记科学记数法的表示方法是解题的关键. 将“152 亿”转换为具体数值，再根据科学记数法的定义，表示为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数.

【详解】 解：152 亿 $= 15200000000 = 1.52 \times 10^{10}$.

故答案为 1.52×10^{10} .

9. 若关于 x 的方程 $(k-2)x^{|k|-2} + (k-3)x + 4 = 0$ 是一元二次方程，则 $k =$ _____.

【答案】 4 或 -4

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的定义，理解此定义是关键；根据一元二次方程的定义，最高次项指数为 2 且二次项系数不为零，即可求解.

【详解】解：由题意，方程 $(k-2)x^{|k|-2} + (k-3)x + 4 = 0$ 为一元二次方程，

则满足 $|k|-2=2$ ，

解得 $|k|=4$ ，

即 $k=4$ 或 $k=-4$ 。

当 $k=4$ 时，二次项系数 $k-2=2 \neq 0$ ；当 $k=-4$ 时，二次项系数 $k-2=-6 \neq 0$ 。

故均符合条件。

故答案为：4 或 -4。

10. 化简： $\sqrt{48x^5y^9} =$ _____。

【答案】 $4x^2y^4\sqrt{3xy}$

【解析】

【分析】本题主要考查了二次根式化简，将平方根内的数字和变量分别化简，数字部分分解质因数后提取平方因子，变量部分根据指数奇偶性提取偶数次方。

【详解】解： $\sqrt{48x^5y^9} = \sqrt{16x^4y^8 \cdot 3xy} = \sqrt{(4x^2y^4)^2 \cdot 3xy} = 4x^2y^4\sqrt{3xy}$ 。

故答案为： $4x^2y^4\sqrt{3xy}$ 。

11. 已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 2x + 4 = 0$ 有实数根，则实数 k 的取值范围是_____。

【答案】 $k \leq \frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的定义，已知根的情况求参数。根据一元二次方程的定义，二次项系数 $k \neq 0$ ；再根据根的判别式，方程有实数根时 $\Delta \geq 0$ ，代入系数计算判别式并解不等式，即可作答。

【详解】解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 2x + 4 = 0$ 有实数根，

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ 且 $k \neq 0$ ，

其中 $a=k$ ， $b=-2$ ， $c=4$ ，代入得 $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot k \cdot 4 = 4 - 16k \geq 0$ ，

解得 $k \leq \frac{1}{4}$ ，

$\therefore k \neq 0$ ，

$\therefore k \leq \frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$ ，

故答案为: $k \leq \frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$.

12. 在实数范围内分解因式: $2x^2 + 4x - 3 =$ _____.

【答案】 $2\left(x + \frac{2 - \sqrt{10}}{2}\right)\left(x + \frac{2 + \sqrt{10}}{2}\right)$

【解析】

【分析】 令 $2x^2 + 4x - 3 = 0$, 先利用公式法求解一元二次方程的根, 再分解因式即可.

【详解】 解: 令 $2x^2 + 4x - 3 = 0$,

$$\therefore a = 2, b = 4, c = -3,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 2 \times (-3) = 40 > 0,$$

$$\therefore x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{10}}{4} = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}, x_2 = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2},$$

$$\therefore 2x^2 + 4x - 3 = 2\left(x - \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}\right)\left(x - \frac{-2 - \sqrt{10}}{2}\right)$$

$$= 2\left(x + \frac{2 - \sqrt{10}}{2}\right)\left(x + \frac{2 + \sqrt{10}}{2}\right)$$

故答案为: $2\left(x + \frac{2 - \sqrt{10}}{2}\right)\left(x + \frac{2 + \sqrt{10}}{2}\right)$

【点睛】 本题考查的是在实数范围内分解因式, 利用公式法解一元二次方程, 掌握“利用公式法求解一元二次方程的根, 再把代数式分解因式”是解本题的关键.

13. 在解一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$ 时, 小明看错了一次项系数 b , 得到的解为 $x_1 = -1, x_2 = 4$; 小颖看错了常数项 c , 得到的解为 $x_1 = 2\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}$. 请你写出正确的一元二次方程_____.

【答案】 $x^2 - 3\sqrt{3}x - 4 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了根与系数的关系, 牢记“两根之和等于 $-\frac{b}{a}$, 两根之积等于 $\frac{c}{a}$ ”是解题的关键.

由小明看错了一次项系数 b , 利用两根之积等于 $\frac{c}{a} (a=1)$, 可求出 c 值, 由小颖看错了常数项 c , 利用两根之和等于 $-\frac{b}{a} (a=1)$, 可求出 b 值, 进而可得出正确的一元二次方程.

【详解】解：∵小明看错了一次项系数 b ，得到的解为 $x_1 = -1, x_2 = 4$ ；

$$\therefore c = x_1 \cdot x_2 = -1 \times 4 = -4;$$

∵小颖看错了常数项 c ，得到的解为 $x_1 = 2\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}$ 。

$$\therefore -b = x_1 + x_2 = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore b = -3\sqrt{3}.$$

∴正确的一元二次方程为 $x^2 - 3\sqrt{3}x - 4 = 0$ 。

故答案为： $x^2 - 3\sqrt{3}x - 4 = 0$ 。

14. 下列条件：① $\angle A + \angle B = \angle C$ ；② $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 4 : 5$ ；③ $\angle A = 90^\circ - \angle B$ ；④ $b^2 = (a+c)(a-c)$ ；
⑤ $\angle A = 2\angle B = 3\angle C$ ，其中能确定 $\triangle ABC$ 是直角三角形的条件有_____（填序号）。

【答案】①③④

【解析】

【分析】本题考查直角三角形的判定，根据三角形内角和定理和勾股定理的逆定理，判断每个条件是否能使三角形有一个角为 90° 或满足两边平方和等于第三边的平方。

【详解】解：①∵ $\angle A + \angle B = \angle C$ 且 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，

$$\therefore 2\angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形，故①符合题意；

②设 $\angle A = 3k$ ， $\angle B = 4k$ ， $\angle C = 5k$ ，则 $3k + 4k + 5k = 12k = 180^\circ$ ，

解得 $k = 15^\circ$ ，

$$\therefore \angle C = 75^\circ \neq 90^\circ,$$

∴ $\triangle ABC$ 不是直角三角形，故②不符合题意；

③∵ $\angle A = 90^\circ - \angle B$ ，

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形，故③符合题意；

④∵ $b^2 = (a+c)(a-c) = a^2 - c^2$ ，即 $a^2 = b^2 + c^2$ ，满足勾股定理的逆定理，

∴ ABC 是直角三角形, 故④符合题意;

⑤设 $\angle C = k$, 则 $\angle A = 3k$, $\angle B = 1.5k$,

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore 3k + 1.5k + k = 5.5k = 180^\circ,$$

$$\text{解得 } k = \frac{360^\circ}{11},$$

$$\therefore \angle A = \frac{1080^\circ}{11} \neq 90^\circ,$$

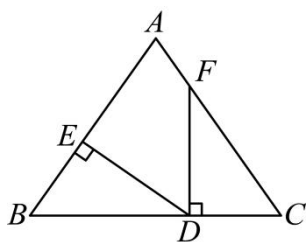
∴ ABC 不是直角三角形.

故能确定 ABC 是直角三角形的条件有①③④.

故答案为: ①③④.

15. 如图, 点 D 在 BC 上, $\angle BED = \angle CDF = 90^\circ$, $BD = CF$, $BE = CD$. 若 $\angle A = 40^\circ$. 则

$$\angle EDF = \underline{\hspace{2cm}}.$$



【答案】 70°

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定与性质, 证明 $\text{Rt}\triangle BDE \cong \text{Rt}\triangle CFD$, 可得 $\angle B = \angle C = 70^\circ$, 即可求解.

【详解】 解: $\because \angle BED = \angle CDF = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 与 $\text{Rt}\triangle CFD$ 中,

$$\begin{cases} BE = CD \\ BD = CF \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BDE \cong \text{Rt}\triangle CFD (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\because \angle A = 40^\circ,$$

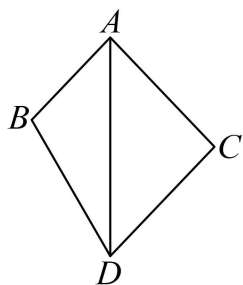
$$\therefore \angle B = \angle C = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ,$$

$$\because \angle BDE + \angle B = \angle BDE + \angle EDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDF = \angle B = 70^\circ,$$

故答案为: 70° .

16. 如图, 已知四边形 $ABDC$ 的面积为 14, AD 平分 $\angle BAC$, $AB + AC = 7$. 则点 D 到 AB 的距离是 _____.



【答案】 4

【解析】

【分析】本题考查了角平分线的性质, 过点 D 作 $DE \perp AB$, 交 AB 的延长线于点 E , 作 $DF \perp AC$, 交 AC 的延长线于点 F , 根据角平分线的性质可得 $DE = DF$, 结合四边形 $ABDC$ 的面积 $= S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}(AB + AC) \cdot DE$, 即可求解.

【详解】解: 如图, 过点 D 作 $DE \perp AB$, 交 AB 的延长线于点 E , 作 $DF \perp AC$, 交 AC 的延长线于点 F ,
 $\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore DE = DF$,

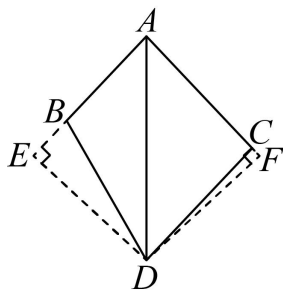
$\because$ 四边形 $ABDC$ 的面积为 14, $AB + AC = 7$, 四边形 $ABDC$ 的面积

$$= S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AB \cdot DE + \frac{1}{2} AC \cdot DF = \frac{1}{2} (AB + AC) \cdot DE,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 7 \cdot DE = 14,$$

$$\therefore DE = 4,$$

故答案为: 4.



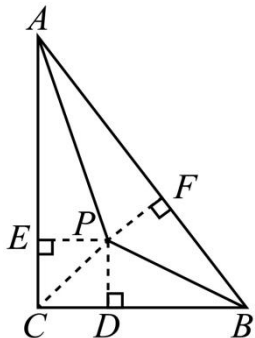
17. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 两锐角的角平分线交于点 P , 当 $AC = 6$, $BC = 8$, $AB = 10$ 时, 则点 P 到边 AB 的距离为 _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】本题考查了三角形的角平分线的性质定理,连接 PC , 过点 P 作 $PD \perp BC$, $PE \perp AC$, $PF \perp AB$, 垂足分别为 D, E, F , 点 P 为三角形 ABC 的内心, 利用角平分线的性质和等面积法求解.

【详解】解: 如图, 连接 PC , 过点 P 作 $PD \perp BC$, $PE \perp AC$, $PF \perp AB$, 垂足分别为 D, E, F .



由于点 P 是 $\angle BAC$ 和 $\angle ABC$ 的角平分线的交点,

根据角平分线的性质, 点 P 到各边的距离相等, 即 $PD = PE = PF$.

设 $PD = x$, 则 $PE = PF = x$.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$, $AB = 10$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24.$$

$$\text{又 } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PAC}$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot PF + \frac{1}{2} BC \cdot PD + \frac{1}{2} AC \cdot PE$$

$$= \frac{1}{2} \times 10x + \frac{1}{2} \times 8x + \frac{1}{2} \times 6x$$

$$= 12x.$$

因此 $12x = 24$,

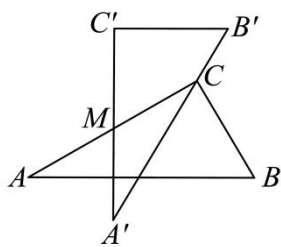
解得 $x = 2$.

故点 P 到 AB 的距离为 2.

故答案为 2.

18. 如图, 两块完全一样的含 30° 角的三角板重叠在一起, 若绕长直角边中点 M 转动, 使上面一块的斜边刚好过下面一块的直角顶点, 如图, $\angle A = 30^\circ$, $AC = 10$, 则此时两直角顶点 C, C' 间的距离是

_____.



【答案】5

【解析】

【分析】本题考查等边三角形的判定与性质，等边对等角，旋转的性质；得到 $\triangle MC'C$ 是等边三角形是解答此题的关键；连接 CC' ，因为点 M 为 AC 的中点，也是 $A'C'$ 的中点，由旋转的性质可知， $MC = MC' = MA'$ ，而 $\angle A' = \angle A = 30^\circ$ ，从而可证 $\triangle MC'C$ 为等边三角形，即可求 $CC' = MC'$ 。

【详解】解：连接 CC' ，如图，

$\because$ 点 M 为 AC 的中点，

$\therefore$ 点 M 为 $A'C'$ 的中点，

$$\therefore C'M = \frac{1}{2} A'C' = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 10 = 5,$$

由旋转的性质可知， $MC = MC' = MA'$ ，

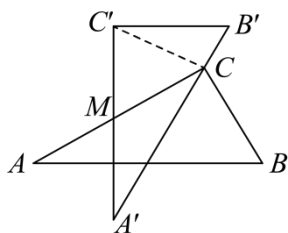
$$\therefore \angle MCA' = \angle A',$$

$$\because \angle A' = \angle A = 30^\circ, \quad A'C' = AC = 10,$$

$$\therefore \angle CMC' = \angle A' + \angle MCA' = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle MC'C$ 为等边三角形，

$$\therefore CC' = C'M = \frac{1}{2} \times 10 = 5.$$



故答案为：5.

三、计算题：（每道题 4 分，共 8 分）

19. 计算

$$(1) \quad |\sqrt{3} - 2| - (2026 - \sqrt{2026})^0 + \sqrt[3]{-8}$$

$$(2) \quad \sqrt{xy} \div \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y} + \sqrt{2xy} \div \sqrt{\frac{1}{2x}}$$

【答案】(1) $-\sqrt{3}-1$

(2) $3x\sqrt{y}-y\sqrt{x}$

【解析】

【分析】本题考查了零次幂，立方根，求一个数的绝对值，二次根式的混合运算，分母有理化，正确掌握相关性质内容是解题的关键.

(1) 先运算零次幂，立方根，求一个数的绝对值，再运算加减法，即可作答.

(2) 先把除法化为乘法，再运算乘法，最后运算加减法，即可作答.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: } & \left| \sqrt{3}-2 \right| - \left(2026 - \sqrt{2026} \right)^0 + \sqrt[3]{-8} \\ &= 2 - \sqrt{3} - 1 + (-2) \\ &= -\sqrt{3} - 1;\end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: } & \sqrt{xy} \div \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x-y} + \sqrt{2xy} \div \sqrt{\frac{1}{2x}} \\ &= \sqrt{xy} \times \frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \sqrt{2xy} \times \sqrt{2x} \\ &= \sqrt{xy} \times (\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 2x\sqrt{y} \\ &= x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + 2x\sqrt{y} \\ &= 3x\sqrt{y} - y\sqrt{x}.\end{aligned}$$

四、解方程：（每道题 5 分，共 10 分）

20. 解方程

(1) $(x-2)(3x-5)=x+25$

(2) $4x^2-20x+19=0$

【答案】(1) $x_1=5$, $x_2=-1$

(2) $x_1=\frac{5+\sqrt{6}}{2}$, $x_2=\frac{5-\sqrt{6}}{2}$;

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，正确掌握相关性质内容是解题的关键.

(1) 先把 $(x-2)(3x-5)=x+25$ 化为一般式，再运用因式分解法进行解方程，即可作答.

(2) 运用公式法进行解方程，即可作答.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \because (x-2)(3x-5)=x+25,$$

$$\therefore 3x^2-5x-6x+10=x+25,$$

$$\therefore 3x^2-12x-15=0,$$

$$\therefore x^2-4x-5=0,$$

$$\therefore (x-5)(x+1)=0,$$

$$\therefore x_1=5, \quad x_2=-1;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } 4x^2-20x+19=0,$$

$$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-20)^2-4\times 4\times 19=400-304=96,$$

$$\text{则 } x=\frac{-(-20)\pm\sqrt{96}}{2\times 4}=\frac{20\pm 4\sqrt{6}}{8}=\frac{5\pm\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore x_1=\frac{5+\sqrt{6}}{2}, \quad x_2=\frac{5-\sqrt{6}}{2};$$

五、解答题: (第 21 题 6 分; 第 22 题 7 分; 第 23 题 7 分; 第 24 题 9 分; 第 25 题 11 分, 共 40 分)

21. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+m-2=0$ 有两个不相等的实数根.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若 a, b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+m-2=0$ 的两个根, 且 $m^2+a^2+b^2=16$, 求 m 的值.

【答案】 (1) $m<3$

(2) $m=-2$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式及一元二次方程根与系数的关系, 解一元二次方程, 掌握这些知识是关键.

(1) 根据一元二次方程根的判别式即可求解;

(2) 由根与系数的关系及完全平方公式变形运用, 得到关于 m 的方程, 解方程即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m - 2 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (m - 2) > 0,$$

$$\text{即 } 4 - 4m + 8 > 0,$$

解得: $m < 3$;

【小问 2 详解】

解: $\because a, b$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m - 2 = 0$ 的两个根,

$$\therefore a + b = 2, \quad ab = m - 2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 2^2 - 2(m - 2) = 8 - 2m, \quad m^2 + a^2 + b^2 = 16,$$

$$\therefore m^2 + 8 - 2m = 16,$$

$$\text{整理得: } m^2 - 2m - 8 = 0,$$

$$\text{解得: } m_1 = 4, \quad m_2 = -2,$$

由 (1) 知当 $m < 3$ 时, 方程才有实数根,

$$\therefore m = -2.$$

22. 为迎接马年的到来, 某校进行了大型的迎新慈善义卖活动. 八 (1) 班义卖善款 1900 元, 八 (2) 班义卖善款 2600 元. 已知 1 班人数是 2 班人数的一半多 7 人, 且 2 班比 1 班的人均义卖款多 5 元. 请问, 1 班和 2 班的人数各是多少人?

【答案】1 班人数是 20 人, 2 班人数是 26 人

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的应用, 根据 1 班人数是 2 班人数的一半多 7 人, 故设 2 班人数是 r 人, 则 1

班人数是 $\left(\frac{1}{2}r + 7\right)$ 人, 又因为八 (1) 班义卖善款 1900 元, 八 (2) 班义卖善款 2600 元, 2 班比 1 班的人

均义卖款多 5 元, 所以得 $\frac{2600}{r} - \frac{1900}{\frac{1}{2}r + 7} = 5$, 解得 $r_1 = 26, r_2 = -280 < 0$ (舍去), 然后验根作答即可.

【详解】解: 设 2 班人数是 r 人, 则 1 班人数是 $\left(\frac{1}{2}r + 7\right)$ 人,

∴ 八 (1) 班义卖善款 1900 元, 八 (2) 班义卖善款 2600 元, 2 班比 1 班的人均义卖款多 5 元,

$$\therefore \frac{2600}{r} - \frac{1900}{\frac{1}{2}r + 7} = 5,$$

整理得 $r^2 + 254r - 7280 = 0$,

解得 $r_1 = 26, r_2 = -280 < 0$ (舍去),

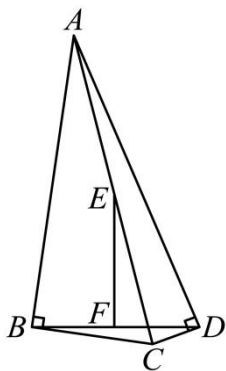
经检验: $r = 26$ 是原分式方程的解,

∴ 2 班人数是 26 人,

$$\therefore \frac{1}{2} \times 26 + 7 = 20,$$

则 1 班人数是 20 人.

23. 已知: 如图, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, E 、 F 分别是 AC 、 BD 的中点.



(1) 求证: $EF \perp BD$;

(2) 若 $\angle BAD = 30^\circ$, $AC = 8$, 求 BD 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) BD 的长为 4.

【解析】

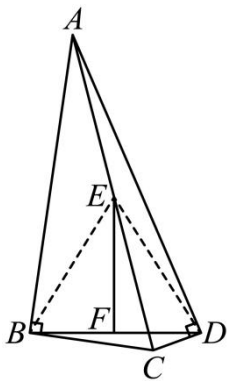
【分析】本题考查了直角三角形斜边中线等于斜边的一半的性质和等边三角形的判定和性质;

(1) 连接 BE 、 DE , 根据直角三角形斜边中线等于斜边一半得出 $BE = DE$, 再根据等腰三角形的性质证明即可;

(2) 先证明 $\triangle BED$ 是等边三角形, 再根据 $BE = \frac{1}{2}AC = 4$ 求解即可.

【小问 1 详解】

证明: 连接 BE 、 DE ,



$\therefore \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, E 是 AC 的中点,

$$\therefore BE = DE = \frac{1}{2} AC,$$

$\therefore F$ 是 BD 的中点,

$$\therefore EF \perp BD.$$

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 可知, $BE = AE = DE = \frac{1}{2} AC = 4$,

$$\therefore \angle EAB = \angle EBA, \angle EAD = \angle EDA,$$

$$\text{又 } \angle EAB + \angle EBA = \angle CEB, \angle EAD + \angle EDA = \angle CED,$$

$$\therefore 2\angle EAB = \angle CEB, 2\angle EAD = \angle CED,$$

$$\therefore \angle BAD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BED = 60^\circ,$$

$$\therefore BE = DE,$$

$\therefore \triangle BED$ 是等边三角形,

$$\therefore BD = BE = 4.$$

24. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2 - 2mx + 4 = 0$ (m 是不等于 1 的整数).

(1) 解这个关于 x 的一元二次方程;

(2) 如果这个方程有两个不相等的正整数根, 试求 m 的值;

(3) 在 (2) 的条件下, 如果一个三角形的三边 a 、 b 、 c 满足 $a^2 - (m+1)a + m = 1$, $b^2 - (m+1)b + m = 1$, $c = 2\sqrt{3}$, 且 $a \neq b$, 试求这个三角形的面积.

【答案】(1) $x = 2$, $x = \frac{2}{m-1}$

(2) $m = 3$

(3) 1

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式、一元二次方程的解法. 熟练掌握相关知识是解答本题的关键.

(1) 运用求根公式解一元二次方程即可;

(2) 根据方程有两个不相等的正整数根, 结合第 (1) 小题的根, 求符合条件的 m ;

(3) 代入 $m=3$, 得到 $\diamond\diamond$ 和 $\diamond\diamond$ 是二次方程的两个根, 利用根与系数的关系求出 a^2+b^2 和 ab , 结合 $\diamond\diamond$ 的值发现三角形是直角三角形, 从而求出面积.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \because (m-1)x^2 - 2mx + 4 = 0$$

$$\therefore \Delta = (-2m)^2 - 4(m-1) \times 4$$

$$= 4m^2 - 16(m-1)$$

$$= 4m^2 - 16m + 16$$

$$= 4(m^2 - 4m + 4)$$

$$= 4(m-2)^2 \geq 0$$

$$\therefore x = \frac{2m \pm \sqrt{4(m-2)^2}}{2(m-1)} = \frac{2m \pm 2|m-2|}{2(m-1)}$$

$\because m$ 是不等于 1 的整数,

$$\therefore x = \frac{2m \pm 2(m-2)}{2(m-1)} = \frac{m \pm (m-2)}{m-1},$$

$$\therefore x_1 = \frac{m + (m-2)}{m-1} = \frac{2m-2}{m-1} = 2, \quad x_2 = \frac{m - (m-2)}{m-1} = \frac{2}{m-1},$$

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 知方程的解为 2 和 $\frac{2}{m-1}$,

$\therefore$ 这个方程有两个不相等的正整数根,

$\therefore \frac{2}{m-1}$ 的值为不是 2 的正整数,

$\therefore m$ 是不等于 1 的整数,

$$\therefore m-1=2,$$

$$\therefore m=3;$$

【小问3详解】

$$\text{解: 当 } m=3 \text{ 时, } a^2 - (m+1)a + m = a^2 - (3+1)a + 3 = 1,$$

$$\text{整理得 } a^2 - 4a + 2 = 0,$$

$$\text{同理 } b^2 - (m+1)b + m = b^2 - 4b + 2 = 0 \text{ 且 } a \neq b,$$

$$\therefore a \text{ 和 } b \text{ 是方程 } x^2 - 4x + 2 = 0 \text{ 的两个根,}$$

$$\therefore a+b=4, \quad ab=2,$$

$$\text{又 } c=2\sqrt{3},$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 16 - 4 = 12, c^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2,$$

$\therefore$ 这个三角形是直角三角形,

$$\therefore S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 2 = 1.$$

25. 如图1, 在等腰直角 ABC 中, $AB=AC=2, \angle BAC=90^\circ$, 将点 B 绕点 A 逆时针旋转

$\alpha (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ 至点 D , 射线 BD 与 $\angle CAD$ 的平分线交于点 E , 连接 CE .

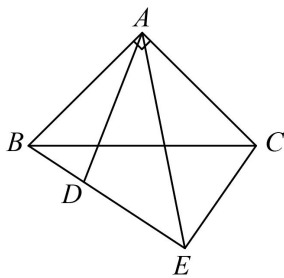
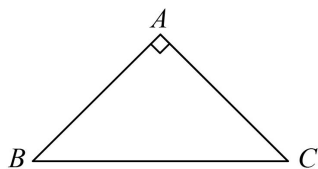


图1



备用图

(1) 当 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时,

①问 $\angle AEB$ 的大小是否变化? 如果不变, 求出这个大小; 如果变化, 用含有 α 的式子表示其大小;

②如果 $AC = \sqrt{2}CE$, 求 $\triangle BCE$ 的面积;

(2) 如果 $AE = 2\sqrt{2}CE$, 求 $\frac{DE}{DB}$ 的值.

【答案】(1) ① $\angle AEB$ 的大小不变, 45° ; ② $\sqrt{3}$

(2) $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】(1) ①由旋转的性质及角平分线的意义、三角形内角和、三角形外角的性质即可求得 $\angle AEB$ 的大小;

②先证明 $\triangle ADE \cong \triangle ACE$, 得 $\angle BEC = 90^\circ$, 即可求解;

(2) 分两种情况: $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ 及 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, 构造全等三角形, 利用三角形全等的性质即可求解.

【小问 1 详解】

解: ① $\angle AEB$ 的大小不变;

由旋转知: $AB = AD$, $\angle BAD = \alpha$,

$$\therefore \angle ADB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAD) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha;$$

$\because AE$ 是 $\angle CAD$ 的平分线,

$$\therefore \angle DAE = \angle CAE = \frac{1}{2}\angle DAC,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = 90^\circ - \angle BAD = 90^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle DAE = \frac{1}{2}\angle DAC = 45^\circ - \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle AEB + \angle DAE,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle ADB - \angle DAE = \left(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) - \left(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) = 45^\circ;$$

$$\textcircled{2} \because AB = AC = 2, AB = AD,$$

$$\therefore AD = AC = 2,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle CAE, AE = AE,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ACE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle AEC = \angle AEB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle AEB + \angle AEC = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = \sqrt{2}CE, AC = 2,$$

$$\therefore CE = \sqrt{2},$$

$$\therefore AB = AC = 2, \angle CAB = 90^\circ,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = \sqrt{6},$$

$$\therefore S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2}CE \cdot BE = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{6} = \sqrt{3};$$

【小问2详解】

解：当 $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ 时，如图，过点 A 作 AE 的垂线交 EB 的延长线于点 F ，

则 $\angle FAE = \angle BAC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle FAB = \angle EAC,$$

由 (1) ②知 $\angle BEC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle BEC + \angle BAC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle ACE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle ABF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle ACE,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ACE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AF = AE = 2\sqrt{2}CE, \quad BF = CE,$$

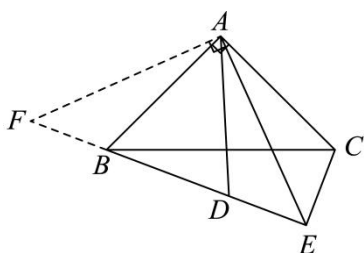
$$\therefore EF = \sqrt{AF^2 + AE^2} = 4CE,$$

$$\therefore BE = EF - BF = 3CE,$$

由 (1) ②知 $DE = CE$

$$\therefore BD = BE - DE = 2CE,$$

$$\therefore \frac{DE}{DB} = \frac{CE}{2CE} = \frac{1}{2};$$



当 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ 时，如图，过点 A 作 $AF \perp AE$ 交 BE 于点 F ，

则 $\angle BAC = \angle FAE = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAF = \angle CAE,$$

$$\therefore AB = AC, \quad AB = AD,$$

$$\therefore AD = AC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle CAE, \quad AE = AE,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ACE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle ACE = \angle D, \quad DE = CE,$$

$$\because AB = AD,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle D = \angle ACE,$$

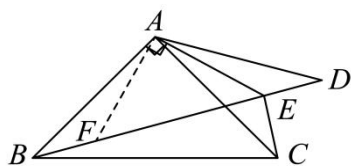
$$\therefore \triangle BAF \cong \triangle CAE (\text{ASA}),$$

$$\therefore AF = AE, \quad BF = CE,$$

$$\therefore EF = \sqrt{2}AE = 4CE,$$

$$\therefore BD = BF + EF + DE = CE + 4CE + CE = 6CE,$$

$$\therefore \frac{DE}{DB} = \frac{CE}{6CE} = \frac{1}{6};$$



综上, $\frac{DE}{DB}$ 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{6}$.

【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质, 全等三角形的判定与性质, 勾股定理及旋转的性质, 证明三角形全等是解题的关键, 注意分类讨论.