

上海市民办新华初级中学 2025 – 2026 学年八年级上学期期末复习数学周测卷

一、选择题 (每题 2 分, 共 12 分)

1. 若 $a+b>0$, 下列各式中与 $\sqrt{a+b}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\frac{1}{a}\sqrt{(a+b)^2}$ B. $\frac{1}{3}\sqrt{3(a+b)}$ C. $\sqrt{\frac{a+b}{2}}$ D. $\sqrt{\frac{4}{a+b}}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的性质, 同类二次根式. 同类二次根式需化简后根号内表达式相同, 逐项判断即可.

【详解】 解: A. $\frac{1}{a}\sqrt{(a+b)^2} = \frac{1}{a}(a+b)$, 与 $\sqrt{a+b}$ 不是同类二次根式, 不合题意;

B. $\frac{1}{3}\sqrt{3(a+b)}$ 与 $\sqrt{a+b}$ 不是同类二次根式, 不合题意;

C. $\sqrt{\frac{a+b}{2}}$ 与 $\sqrt{a+b}$ 不是同类二次根式, 不合题意;

D. $\sqrt{\frac{4}{a+b}} = \frac{2\sqrt{a+b}}{a+b}$, 与 $\sqrt{a+b}$ 是同类二次根式, 符合题意;

故选: D.

2. 已知 $x=1$ 是一元二次方程 $(m-2)x^2+4x-m^2=0$ 的一个根, 则 m 的值为 ()

- A. 1 B. -1 或 2 C. -1 D. 0

【答案】 C

【解析】

【分析】 一元二次方程的根就是一元二次方程的解, 就是能够使方程左右两边相等的未知数的值. 即把 $x=1$ 代入方程求解可得 m 的值.

【详解】 把 $x=1$ 代入方程 $(m-2)x^2+4x-m^2=0$ 得到 $(m-2)+4-m^2=0$,

解得: $m=-1$ 或 $m=2$.

$\because m-2 \neq 0$,

$\therefore m=-1$.

故选: C.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解的定义，解题的关键是理解一元二次方程解的定义，属于基础题型.

3. 已知实数 x 满足 $(x^2 - x)^2 - 4(x^2 - x) - 12 = 0$ ，则代数式 $x^2 - x + 1$ 的值是()

A. 7

B. -1

C. 7 或 -1

D. -5 或 3

【答案】 A

【解析】

【分析】 将 $x^2 - x$ 看作一个整体，然后利用因式分解法解方程求出 $x^2 - x$ 的值，再整体代入进行求解即可.

【详解】 $\because (x^2 - x)^2 - 4(x^2 - x) - 12 = 0$,

$$\therefore (x^2 - x + 2)(x^2 - x - 6) = 0,$$

$$\therefore x^2 - x + 2 = 0 \text{ 或 } x^2 - x - 6 = 0,$$

$$\therefore x^2 - x = -2 \text{ 或 } x^2 - x = 6;$$

当 $x^2 - x = -2$ 时， $x^2 - x + 2 = 0$,

$$\therefore b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0,$$

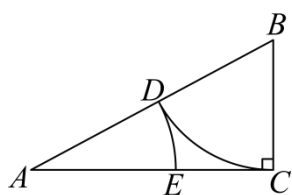
$\therefore$ 此方程无实数解;

当 $x^2 - x = 6$ 时， $x^2 - x + 1 = 7$,

故选 A.

【点睛】 本题考查了用因式分解法解一元二次方程，解本题的关键是把 $x^2 - x$ 看成一个整体.

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $BC = a$ ， $AC = b$. 以点 B 为圆心， BC 的长为半径画弧，交线段 AB 于点 D ，以点 A 为圆心， AD 长为半径画弧，交线段 AC 于点 E . 下列哪条线段的长度是方程 $x^2 + 2ax - b^2 = 0$ 的一个根 ()



A. 线段 AD 的长

B. 线段 BC 的长

C. 线段 EC 的长

D. 线段 AC 的长

【答案】 A

【解析】

【分析】 由方程 $x^2 + 2ax - b^2 = 0$ 的解结合线段的和差可以得到答案.

【详解】 解: $\because x^2 + 2ax - b^2 = 0$,

$$\therefore \Delta = (2a)^2 - 4 \times 1 \times (-b^2) = 4a^2 + 4b^2,$$

$$\therefore x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 + 4b^2}}{2},$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, BC = a, AC = b,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = AB^2,$$

$$\therefore x = \frac{-2a \pm 2AB}{2} = -a \pm AB,$$

$$\therefore x_1 = -a + AB, x_2 = -a - AB,$$

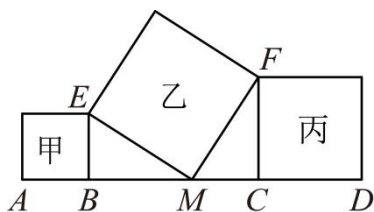
$$\because AB - a = AB - BC = AB - BD = AD,$$

$\therefore$ 线段 AD 的长是 $x^2 + 2ax - b^2 = 0$ 的根,

故选: A.

【点睛】本题考查一元二次方程的解法, 掌握公式法解一元二次方程是解题关键.

5. 将甲, 乙, 丙三个大小不同的正方形如图所示放置, 顶点 E, F 处分别两两相接, 顶点 A, B, M, C, D 在同一条直线上. 若正方形甲的边长为 2, 正方形丙的边长为 3, 则正方形乙的面积为 ()



A. $\sqrt{13}$

B. 5

C. 13

D. 25

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的性质和判定, 勾股定理的应用, 证明 $\triangle BME \cong \triangle CFM$, 得出 $BM = CF = 3$, 根据勾股定理求出 EM 即可.

【详解】解: $\because$ 根据正方形的性质得 $EM = FM$, $\angle EBM = \angle EMF = \angle MCF = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BME + \angle CMF = 90^\circ, \quad \angle CMF + \angle CFM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BME = \angle CFM,$$

在 $\triangle BME$ 和 $\triangle CFM$ 中

$$\begin{cases} \angle EBM = \angle MCF \\ \angle BME = \angle CFM, \\ EM = FM \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BME \cong \triangle CFM (\text{AAS}),$$

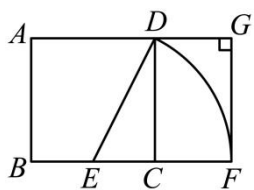
$$\therefore BM = CF = 3,$$

$$\because BE = 2,$$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle BME$ 中, 由勾股定理得 $EM = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, 即正方形乙的面积为 13,

故选 C.

6. 摄影中有一种拍摄手法叫黄金构图法. 原理加下, 如图、在正方形 $ABCD$ 的 BC 边上取中点 E , 以点 E 为圆心, 线段 DE 长为半径作圆. 交 BC 的延长线于点 F , 过点 F 作 $FG \perp AD$, 交 AD 的延长线于点 G , 得到矩形 $CDGF$, 若 $AB = 2$, 则 CF 的长是 ()



A. $\sqrt{3} - 1$

B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

C. $\sqrt{5} - 1$

D. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了勾股定理, 正方形的性质, 矩形的性质, 依据题意, 根据正方形的性质可得 $AB = BC = CD = 2$, $\angle BCD = 90^\circ$, 根据线段中点的定义求出 $CE = 1$, 根据勾股定理求出 $EF = DE = \sqrt{5}$, 即可求解.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = BC = CD = 2, \quad \angle BCD = 90^\circ,$$

$\because E$ 是 BC 中点,

$$\therefore CE = \frac{1}{2}BC = 1,$$

$$\therefore DE = \sqrt{CE^2 + CD^2} = \sqrt{5},$$

由题意知 $EF = DE = \sqrt{5}$,

$$\therefore CF = EF - CE = \sqrt{5} - 1,$$

故选: C.

二、填空题 (每题 3 分, 共 36 分)

7. 6 的平方根是_____.

【答案】 $\pm\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了平方根的定义，根据平方根的定义，一个正数的平方根有两个，它们互为相反数，即可求解，掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】 解：6 的平方根是 $\pm\sqrt{6}$ ，

故答案为： $\pm\sqrt{6}$.

8. 若 $\frac{\sqrt{x+7}}{x-3}$ 有意义，则 x 的取值范围为_____.

【答案】 $x \geq -7$ 且 $x \neq 3$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式和分式有意义的条件，熟练掌握二次根式和分式的概念是关键.

分式有意义的条件是分母不为零，二次根式则要求被开方数非负，结合在一起解不等式组即可.

【详解】 解： $\because \frac{\sqrt{x+7}}{x-3}$ 有意义，

$$\therefore \begin{cases} x+7 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases},$$

解得 $x \geq -7$ 且 $x \neq 3$ ，

故答案为： $x \geq -7$ 且 $x \neq 3$.

9. 化简： $\sqrt{-\frac{1}{a}}$ =_____.

【答案】 $-\frac{\sqrt{-a}}{a}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了化简二次根式，分母有理化，根据二次根式的性质得到 $\sqrt{-\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}$ ，再分母有

理化即可得到答案.

【详解】 解：由题意得， $-\frac{1}{a} > 0$ ，则 $a < 0$ ；

$$\therefore \sqrt{-\frac{1}{a}} = \sqrt{\frac{1}{-a}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} = \frac{\sqrt{-a}}{-a} = -\frac{\sqrt{-a}}{a};$$

故答案为: $-\frac{\sqrt{-a}}{a}$.

10. 计算: $0.\dot{3}\dot{1} = \underline{\hspace{1cm}}$. (填最简分数)

【答案】 $\frac{31}{99}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了小数化分数、一元一次方程的应用等知识点, 灵活运用一元一次方程解决实际问题 是解题的关键. 将循环小数设为未知数, 利用倍数相减消去循环部分, 然后得到一元一次方程求解即可.

【详解】 解: 设 $0.\dot{3}\dot{1} = x$, 则 $100x = 31.\dot{3}\dot{1}$,

$$\therefore 100x - x = 31.\dot{3}\dot{1} - 0.\dot{3}\dot{1} = 31,$$

$$\therefore 99x = 31,$$

$$\text{解得: } x = \frac{31}{99},$$

故答案为: $\frac{31}{99}$

11. 若关于 x 的一元二次方程 $mx^2 + (2m-1)x + m - \frac{1}{2} = 0$ 有实数根, 则 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $m \leq \frac{1}{2}$ 且 $m \neq 0$

【解析】

【分析】 根据判别式即可求出答案.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 + (2m-1)x + m - \frac{1}{2} = 0$ 有实数根,

$$\therefore m \neq 0 \text{ 且 } \Delta = (2m-1)^2 - 4m(m - \frac{1}{2}) = -2m+1 \geq 0,$$

则 m 的范围为 $m \leq \frac{1}{2}$ 且 $m \neq 0$.

故答案为: $m \leq \frac{1}{2}$ 且 $m \neq 0$.

【点睛】 此题考查一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系: (1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根; (2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根; (3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

12. 用配方法解一元二次方程 $x^2 - 8x - 4 = 0$ 时, 可将原方程配方成 $(x-n)^2 = m$, 则 $m+n$ 的值是 $\underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 24

【解析】

【分析】 本题主要考查了配方法的应用, 把常数项移到方程右边, 再把方程两边同时加上一半

的平方进行配方，据此可得 m 、 n 的值，再代值计算即可得到答案.

【详解】解： $x^2 - 8x - 4 = 0$

$$x^2 - 8x = 4$$

$$x^2 - 8x + 16 = 4 + 16$$

$$(x - 4)^2 = 20, \text{ 则 } m = 20, n = 4,$$

$$\therefore m + n = 20 + 4 = 24,$$

故答案为： 24 .

13. 已知 x_1, x_2 为一元二次方程 $x^2 - \sqrt{2}x - 2025 = 0$ 的两个实数根，则 $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$ 的值为_____.

【答案】 $-\frac{4052}{2025}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系，分式的求值，根据根与系数的关系求出 $x_1 + x_2$ 和 $x_1 x_2$ 的值，再把所求式子通分变形为 $\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2}$ ，据此代值计算即可得到答案.

【详解】解： $\because x_1, x_2$ 为一元二次方程 $x^2 - \sqrt{2}x - 2025 = 0$ 的两个实数根，

$$\therefore x_1 + x_2 = \sqrt{2}, x_1 x_2 = -2025,$$

$$\therefore \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{(\sqrt{2})^2 - 2 \times (-2025)}{-2025} = -\frac{4052}{2025},$$

故答案为： $-\frac{4052}{2025}$.

14. 众友药店的某药品原价每盒 25 元，该药店经过连续两次降价，现在售价每盒 16 元，则该药品平均每次降价的百分率是_____.

【答案】 20%

【解析】

【分析】 设该药品平均每次降价的百分率为 x ，根据降价后的价格=降价前的价格 $(1-\text{降价的百分率})$ ，则第一次降价后的价格是 $25(1-x)$ ，第二次后的价格是 $25(1-x)^2$ ，据此即可列方程求解.

【详解】解： 设该药品平均每次降价的百分率为 x ，由题意可知经过连续两次降价，现在售价每盒 16 元，故 $25(1-x)^2 = 16$,

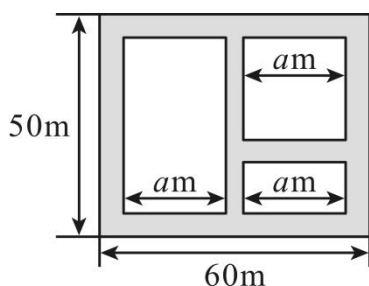
解得 $x=0.2$ 或 1.8 (不合题意, 舍去),

故该药品平均每次降价的百分率为 20% .

故答案为 20% .

【点睛】此题考查了一元二次方程的应用中数量平均变化率问题. 原来的数量 (价格) 为 a , 平均每次增长或降低的百分率为 x 的话, 经过第一次调整, 就调整到 $a(1\pm x)$, 再经过第二次调整就是 $a(1\pm x)(1\pm x) = a(1\pm x)^2$. 增长用“+”, 下降用“-”.

15. 如图, 某市近郊有一块长为 60m 、宽为 50m 的长方形荒地, 政府准备在此建一个运动场, 其中阴影部分为通道, 通道的宽度均相等, 中间的三个长方形区域将铺设塑胶地面作为运动场地. 若塑胶场地总占地面积为 2430m^2 , 则通道的宽为 _____ m .



【答案】2

【解析】

【分析】本题主要考查列代数式及一元二次方程的应用, 理解题意, 找准面积之间的关系是解题关键.

结合图形列代数式, 利用整个长方形面积减去黑色部分的面积可得方程, 求解即可.

【详解】解: 设通道的宽为 $x\text{m}$, 则 $a = \frac{60-3x}{2}$,

根据题意得 $(50-2x)(60-3x) - x \times \frac{60-3x}{2} = 2430$,

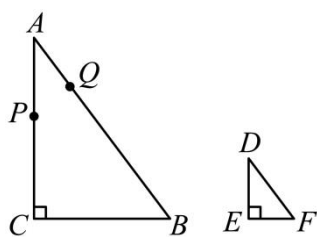
整理得 $x^2 - 40x + 76 = 0$,

解得 $x_1 = 2$, $x_2 = 38$ (不符合题意, 舍去).

即通道的宽为 2m .

故答案为: 2.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 9\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$, $\angle C = 90^\circ$, 现有两个动点 P 和 Q 同时从点 A 出发, 分别在三角形三边按照逆时针和顺时针方向围绕三角形运动一圈后回到初始位置, 其中点 P 的速度为 3cm/s , 设运动时间为 $t\text{s}$. 在 $\triangle DEF$ 中, $DE = 4\text{cm}$, $DF = 5\text{cm}$, $\angle D = \angle A$. 在两点运动过程中的某一时刻, 恰好有 $\triangle APQ \cong \triangle DEF$ (顶点 A 、 P 分别与顶点 D 、 E 对应), 则点 Q 的运动速度为 _____ cm/s .



【答案】 $\frac{15}{4}$ 或 $\frac{93}{32}$

【解析】

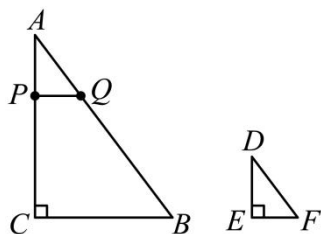
【分析】 本题主要考查了全等三角形的性质，勾股定理，根据题意分两种情况进行分析，利用全等三角形的性质得出点 P 、 Q 所走的路程，进而可求出 P 的运动时间，即 Q 的运动时间，再利用“速度 = 路程 $\div$ 时间”求解即可，掌握知识点的应用及分类讨论思想是解题关键.

【详解】 解： $\because BC = 9\text{cm}$ ， $AC = 12\text{cm}$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，
 $\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15(\text{cm})$ ，

同理得： $EF = 3\text{cm}$ ，

设点 Q 的运动速度为 $x\text{cm/s}$ ，分情况讨论如下：

① 当点 P 在 AC 上，点 Q 在 AB 上， $\triangle APQ \cong \triangle DEF$ 时，

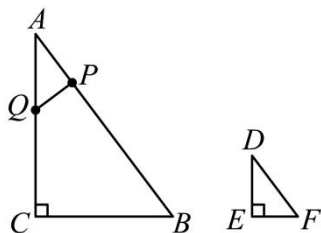


$\therefore AP = DE = 4\text{cm}$ ， $AQ = DF = 5\text{cm}$ ，

$\therefore 4 \div 3 = 5 \div x$ ，

解得： $x = \frac{15}{4}$ ；

② 当点 P 在 AB 上，点 Q 在 AC 上， $\triangle APQ \cong \triangle DEF$ 时，



$\therefore AP = DE = 4\text{cm}$ ， $AQ = DF = 5\text{cm}$ ，

$\therefore$ 点 P 的路程为 $9+12+15-4=32(\text{cm})$, 点 Q 的路程为 $9+12+15-5=31(\text{cm})$,

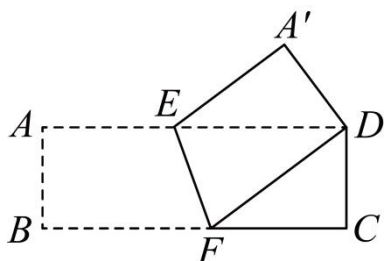
$$\therefore 32 \div 3 = 31 \div x,$$

解得: $x = \frac{93}{32}$,

故答案为: $\frac{15}{4}$ 或 $\frac{93}{32}$.

17. 把一张矩形纸片 $ABCD$ 按下图所示的方式折叠, 使顶点 B 和点 D 重合, 折痕为 EF . 若

$AB=3\text{cm}, BC=9\text{cm}$, 则重叠部分 $\triangle DEF$ 的面积为_____ cm^2 .



【答案】 $\frac{15}{2}$

【解析】

【分析】根据矩形的性质及折叠的性质可知 $AE = A'E$, $\angle EA'D = \angle ABC = 90^\circ$, 再根据勾股定理列方程即可解答.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AB = CD, AD = BC, \angle ABC = 90^\circ,$$

由折叠的性质可知: $AE = A'E$, $\angle EA'D = \angle ABC = 90^\circ$,

设 $AE = A'E = x\text{cm}$,

$$\therefore AB = 3\text{cm}, BC = 9\text{cm},$$

$$\therefore CD = AB = FH = 3\text{cm}, BC = AD = 9\text{cm},$$

$$\therefore DE = (9-x)\text{cm}, A'D = 3\text{cm},$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle A'ED \text{ 中, } A'E^2 + A'D^2 = DE^2,$$

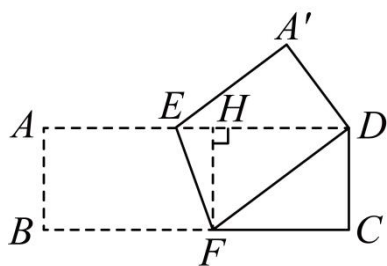
$$\therefore x^2 + 9 = (9-x)^2,$$

$$\therefore x = 4,$$

$$\therefore DE = 9 - 4 = 5 (\text{cm}),$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot FH = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 = \frac{15}{2} (\text{cm}^2),$$

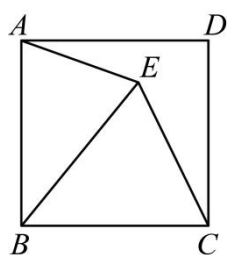
故答案为 $\frac{15}{2}$.



【点睛】本题考查了矩形的性质，折叠的性质，勾股定理，掌握矩形的

性质是解题的关键.

18. 如图，在边长为 3 的正方形 $ABCD$ 内取一点 E ，连接 AE, BE, CE ，若 $BE = AB$ ， $AE = 2$ ，则 BEC 的面积 = _____.

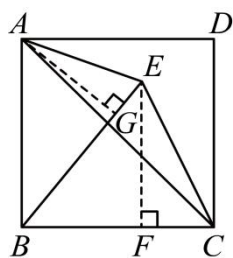


【答案】 $\frac{7}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，正确地作出辅助线是解题的关键. 根据正方形得到 $AB = BC = 3$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，过 A 作 $AG \perp BE$ 于 G ，求得 $\angle AGB = \angle AGE = 90^\circ$ ，根据勾股定理得到 $BG = \frac{7}{3}$ ，过 E 作 $EF \perp BC$ 于 F ，根据全等三角形的性质得 $EF = BG = \frac{7}{3}$ ，根据三角形面积公式即可得到结论.

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
 $\therefore AB = BC = 3$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，
 过 A 作 $AG \perp BE$ 于 G ，如图，



$\therefore \angle AGB = \angle AGE = 90^\circ$ ，

$\therefore AB^2 - BG^2 = AE^2 - EG^2$ ，

$$\because AB = BE = 3, \quad AE = 2,$$

$$\therefore 3^2 - BG^2 = 2^2 - (3 - BG)^2,$$

$$\therefore BG = \frac{7}{3},$$

过 E 作 $EF \perp BC$ 于 F ,

$$\therefore AB \parallel EF,$$

$$\therefore \angle ABG = \angle BEF,$$

$$\because \angle AGB = \angle EFB = 90^\circ, \quad AB = BE,$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle BEF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore EF = BG = \frac{7}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{7}{3} = \frac{7}{2}.$$

故答案为: $\frac{7}{2}$.

三、解答题 (第 19, 20 题每题 8 分, 第 21-26 题每题 6 分, 共 52 分)

19. 计算:

$$(1) \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2};$$

$$(2) (\sqrt{3}+1)^2 + 2 \times (\sqrt{3}+1) + 3 \times \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

【答案】 (1) $-3\sqrt{3}$

(2) $6+5\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的混合运算, 分母有理化, 熟知二次根式的相关运算法则是解题的关键.

(1) 先分母有理化, 再去分母后计算加减法即可;

(2) 先去括号和化简二次根式, 再计算加减法即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} \\ &= \frac{2\sqrt{3} \times (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1) \times (\sqrt{3}-1)} + \frac{\sqrt{3} \times (\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2) \times (\sqrt{3}+2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{6-2\sqrt{3}}{3-1} + \frac{3+2\sqrt{3}}{3-4}$$

$$= 3 - \sqrt{3} - 3 - 2\sqrt{3}$$

$$= -3\sqrt{3};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } (\sqrt{3}+1)^2 + 2 \times (\sqrt{3}+1) + 3 \times \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$= 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3} + 2 + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}$$

$$= 6 + 5\sqrt{3}.$$

20. 解方程:

$$(1) (x-2)^2 = 6-3x;$$

$$(2) 3x^2 + 7x - 1 = 0.$$

【答案】 (1) $x_1 = 2, x_2 = -1$

$$(2) x_1 = \frac{-7+\sqrt{61}}{6}, x_2 = \frac{-7-\sqrt{61}}{6}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程，熟知解一元二次方程的方法是解题的关键.

(1) 先移项，再把方程左边利用提公因式法分解因式，进而解方程即可；

(2) 利用公式法解方程即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } (x-2)^2 = 6-3x,$$

$$(x-2)^2 + (3x-6) = 0,$$

$$(x-2)^2 + 3(x-2) = 0,$$

$$(x-2)(x-2+3) = 0,$$

$$\therefore x-2=0 \text{ 或 } x-2+3=0,$$

解得 $x_1 = 2$, $x_2 = -1$;

【小问2详解】

解: $3x^2 + 7x - 1 = 0$

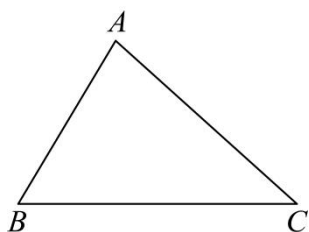
$\because a = 3, b = 7, c = -1$,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 61 > 0$,

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{61}}{6},$$

解得 $x_1 = \frac{-7 + \sqrt{61}}{6}$, $x_2 = \frac{-7 - \sqrt{61}}{6}$.

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 的边 AC 上作一点 P , 使点 P 到 $\triangle ABC$ 内心的距离等于线段 PC 的长度 (不要求写作法, 保留作图痕迹).

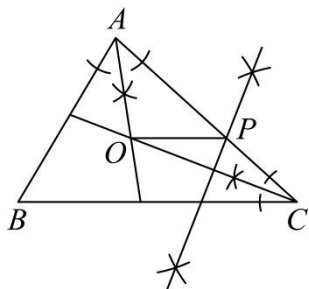


【答案】见解析.

【解析】

【分析】 本题考查了尺规作图——作已知角的角平分线, 作已知线段的垂直平分线, 分别作 $\angle BAC$ 和 $\angle ACB$ 的角平分线, 交于 O 点, 即点 O 为内心, 连接 CO , 然后作线段 CO 的垂直平分线, 交 AC 于点 P , 连接 PO , 由垂直平分线性质的可得 $PC = PO$, 点 P 即为所求, 掌握知识点的应用是解题的关键.

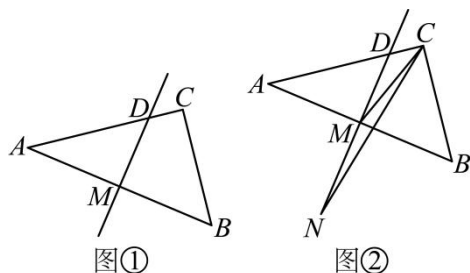
【详解】 解: 如图, 分别作 $\angle BAC$ 和 $\angle ACB$ 的角平分线, 交于 O 点, 即点 O 为内心, 连接 CO , 然后作线段 CO 的垂直平分线, 交 AC 于点 P , 连接 PO , 由垂直平分线性质的可得 $PC = PO$,



$\therefore$ 点 P 即为所求.

22. 如图①, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 3$, $AC = 4$, $AB = 5$, 直线 MD 是 AB 的垂直平分线, 分别交 AB , AC

于 M 、 D 两点.



(1) 求线段 DC 的长度:

(2) 如图②, 连接 CM , 作 $\angle ACB$ 的平分线交 DM 于点 N , 求证: $CM = MN$.

【答案】(1) 线段 DC 的长为 $\frac{7}{8}$;

(2) 见解析.

【解析】

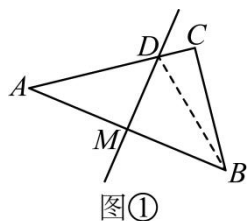
【分析】本题考查了垂直平分线的性质, 等腰三角形的判定与性质, 勾股定理及逆定理, 直角三角形的性质等知识, 掌握知识点的应用是解题的关键.

(1) 连接 BD , 由垂直平分线性质的可得 $AD = BD$, 设 $DC = x$, 则 $BD = AD = 4 - x$, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 25 = AB^2$, 则有 $\angle C = 90^\circ$, 然后通过勾股定理得 $DC^2 + BC^2 = BD^2$, 即 $x^2 + 3^2 = (4 - x)^2$, 求出 x 的值即可;

(2) 作 $CE \perp AB$ 于 E , 所以 $DM \parallel CE$, 得 $\angle ECN = \angle DNC$, 又 $\angle ACB = 90^\circ$, CM 是 AB 边上的中线, 所以 $AM = CM = BM$, 根据等边对等角得 $\angle A = \angle ACM = \angle BCE$, 由 CN 平分 $\angle ACB$, 则 $\angle ACN = \angle BCN$, 所以 $\angle ACM + \angle MCN = \angle BCE + \angle ECN$, $\angle MCN = \angle ECN$, 从而可得 $\angle DNC = \angle MCN$, 最后通过等角对等边即可求证.

【小问 1 详解】

解: 如图①, 连接 BD ,



$\therefore$ 直线 MD 是 AB 的垂直平分线,

$\therefore AD = BD$,

设 $DC = x$, 则 $BD = AD = 4 - x$,

在 $\triangle ABC$ 中, $AC^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 25 = AB^2$,

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $DC^2 + BC^2 = BD^2$,

$$\therefore x^2 + 3^2 = (4-x)^2,$$

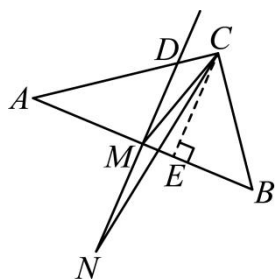
$$\text{解得 } x = \frac{7}{8},$$

$$\therefore DC = \frac{7}{8},$$

$$\therefore \text{线段 } DC \text{ 的长为 } \frac{7}{8};$$

【小问 2 详解】

证明: 如图②, 作 $CE \perp AB$ 于 E ,



图②

$$\because DM \perp AB,$$

$$\therefore DM \parallel CE,$$

$$\therefore \angle ECN = \angle DNC,$$

$$\because CE \perp AB,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle CEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE + \angle B = \angle A + \angle B,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle A,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \text{ } CM \text{ 是 } AB \text{ 边上的中线},$$

$$\therefore AM = CM = BM,$$

$$\therefore \angle A = \angle ACM = \angle BCE,$$

$$\because CN \text{ 平分 } \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ACN = \angle BCN,$$

$$\therefore \angle ACM + \angle MCN = \angle BCE + \angle ECN,$$

$$\therefore \angle MCN = \angle ECN,$$

$$\therefore \angle DNC = \angle MCN,$$

$$\therefore CM = MN.$$

23. 今年中秋节期间，节令商品销售非常火爆，某超市推出了 A 、 B 两款月饼礼盒. 已知 A 礼盒售价为 100 元/盒， B 礼盒售价为 200 元/盒，该超市 9 月 16 日销售 A 、 B 两款礼盒共 350 盒，销售额为 50000 元.

(1) 该超市 9 月 16 日 A 、 B 款礼盒的销量分别为多少盒？

(2) 9 月 17 日正好是中秋佳节，超市为减少库存，开展了“情满中秋·礼迎国庆”的促销活动， A 礼盒按原价八折出售，销量在 9 月 16 日的基础上增加了 50%，超市调研发现， B 礼盒每降价 1 元，日销量就在 9 月 16 日的基础上增加 1 盒，若要使得 9 月 17 日超市的销售额达到 54000 元， B 款礼盒的促销价应定为多少元？

【答案】 (1) 该超市 9 月 16 日 A 礼盒的销量是 200 盒， B 礼盒的销量是 150 盒

(2) B 款礼盒的促销价应定为 150 元

【解析】

【分析】 本题考查了二元一次方程组的应用以及一元二次方程的应用，解题的关键是：(1) 找准等量关系，正确列出二元一次方程组；(2) 找准等量关系，正确列出一元二次方程.

(1) 设该超市 9 月 16 日 A 礼盒的销量是 x 盒， B 礼盒的销量是 y 盒，利用销售总额=销售单价×销售数量，结合“该超市 9 月 16 日销售 A 、 B 两款礼盒共 350 盒，销售额为 50000 元”，可列出关于 x 、 y 的二元一次方程组，解之即可得出结论；

(2) 设 B 款礼盒的促销价应定为 m 元，则 9 月 17 日 B 款礼盒的销售量为 $(350 - m)$ 盒，根据 9 月 17 日超市的销售额达到 54000 元，可列出关于 m 的一元二次方程，解之取其符合题意的值，即可得出结论.

【小问 1 详解】

解：设该超市 9 月 16 日 A 礼盒的销量是 x 盒， B 礼盒的销量是 y 盒，

$$\text{根据题意得：} \begin{cases} x + y = 350 \\ 100x + 200y = 50000 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x = 200 \\ y = 150 \end{cases}.$$

答：该超市 9 月 16 日 A 礼盒的销量是 200 盒， B 礼盒的销量是 150 盒；

【小问 2 详解】

解：设 B 款礼盒的促销价应定为 m 元，则 8 月 17 日 B 款礼盒的销售量为 $150 + (200 - m) = (350 - m)$ 盒，

$$\text{根据题意得：} 100 \times 0.8 \times 200 \times (1 + 50\%) + m(350 - m) = 54000,$$

化简得: $m^2 - 350m + 30000 = 0$,

解得: $m_1 = 150, m_2 = 200$ (不符合题意, 舍去).

答: B 款礼盒的促销价应定为 150 元.

24. 关于 x 的一元二次方程 $a(1-x^2) - 2\sqrt{2}bx + c(1+x^2) = 0$ 中, a, b, c 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的三条边, 其中 $\angle C = 90^\circ$.

(1) 求证此方程有两个不相等的实数根;

(2) 若方程的两个根是 x_1, x_2 , 且 $x_1^2 + x_2^2 = 12$, 求 $a:b:c$.

【答案】(1) 见解析 (2) $1:2\sqrt{2}:3$

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的根的判别式, 根与系数的关系以及勾股定理的应用, 熟练掌握根与系数关系是解题的关键.

(1) 先把方程变为一般式, 得到 $\Delta = 4(2b^2 + a^2 - c^2)$, 根据勾股定理, 即可得出 $\Delta = 4b^2 > 0$, 即可证明结论;

(2) 由 $x_1^2 + x_2^2 = 12$, 得出 $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 12$, 根据根与系数的关系得出 $\frac{8b^2}{(c-a)^2} - \frac{2(a+c)}{c-a} = 12$,

结合 $b^2 = c^2 - a^2$ 化简得到 $c = 3a$, 再代入 $b^2 = c^2 - a^2$ 得出 $b = 2\sqrt{2}a$, 即得答案.

【小问 1 详解】

证明: 化简一元二次方程得, $(c-a)x^2 - 2\sqrt{2}bx + a+c = 0$,

$$\Delta = (-2\sqrt{2}b)^2 - 4(c-a)(a+c) = 4(2b^2 + a^2 - c^2),$$

$\because a, b, c$ 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的三条边,

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2, \quad b > 0,$$

$$\therefore \Delta = 4[(2b^2 + a^2 - (a^2 + b^2))] = 4b^2 > 0,$$

$\therefore$ 此方程有两个不相等的实数根;

【小问 2 详解】

$\because$ 方程的两个根是 x_1, x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{2\sqrt{2}b}{c-a}, \quad x_1x_2 = \frac{a+c}{c-a},$$

$$\because x_1^2 + x_2^2 = 12,$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 12,$$

$$\text{即 } \left(\frac{2\sqrt{2}b}{c-a}\right)^2 - \frac{2(a+c)}{c-a} = 12,$$

$$\therefore \frac{8b^2}{(c-a)^2} - \frac{2(a+c)}{c-a} = 12,$$

$$\because b^2 = c^2 - a^2,$$

$$\therefore \frac{8(c^2 - a^2)}{(c-a)^2} - \frac{2(a+c)}{c-a} = 12,$$

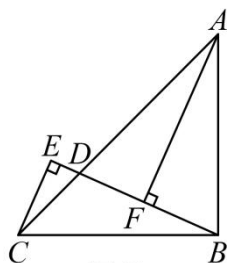
化简得 $c = 3a$,

$$\therefore b^2 = (3a)^2 - a^2 = 8a^2,$$

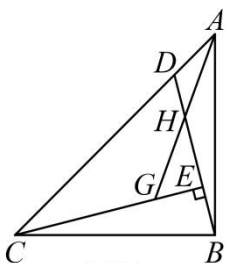
$$\therefore b = 2\sqrt{2}a,$$

$$\therefore a:b:c = 1:2\sqrt{2}:3.$$

25. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, 点 D 是边 AC 上一点, 连接 DB . 过点 C 作直线 BD 的垂线, 垂足为点 E .



图①



图②

(1) 如图①, 若 $AF \perp BD$ 于点 F , 求证: $CE = BF$;

(2) 如图②, 在线段 EC 上截取 $EG = EB$, 连接 AG 交 BD 于点 H , 求证: $CG = 2EH$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题属于三角形综合题, 考查全等三角形的判定和性质, 等腰直角三角形的性质, 添加恰当辅助线构造全等三角形是解题的关键.

(1) 先证 $\angle BAF = \angle CBE$, 再证 $\triangle BAF \cong \triangle CBE$ (AAS), 即可得出 $CE = BF$;

(2) 过点 A 作 $AF \perp BD$ 交 BD 的延长线于点 F , 同 (1) 可证 $\triangle BAF \cong \triangle CBE$ (AAS), 推出 $CE = BF$,

$AF = BE$ ，结合 $EG = EB$ 可得 $AF = GE$ ，进而证明 $\triangle AFH \cong \triangle GEH$ (AAS)，推出 $EF = 2EH$ ，即可得出 $CG = CE - GE = BF - BE = EF = 2EH$ ；

【小问 1 详解】

(1) 证明： $\because AF \perp BD$ ，

$$\therefore \angle ABF + \angle BAF = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle ABC = \angle ABF + \angle CBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle CBE,$$

在 $\triangle BAF$ 和 $\triangle CBE$ 中，

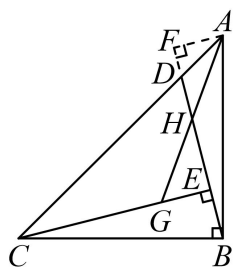
$$\begin{cases} \angle BAF = \angle CBE \\ \angle AFB = \angle BEC = 90^\circ, \\ AB = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAF \cong \triangle CBE \text{ (AAS)},$$

$$\therefore CE = BF;$$

【小问 2 详解】

证明：如图 2，过点 A 作 $AF \perp BD$ 交 BD 的延长线于点 F ，



图②

同 (1) 可证 $\triangle BAF \cong \triangle CBE$ (AAS)，

$$\therefore CE = BF, \quad AF = BE,$$

$$\text{又} \because EG = EB,$$

$$\therefore AF = GE,$$

在 $\triangle AFH$ 和 $\triangle GEH$ 中，

$$\begin{cases} \angle AHF = \angle GHE \\ \angle AFH = \angle GEH = 90^\circ, \\ AF = GE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AFH \cong \triangle GEH \text{ (AAS)},$$

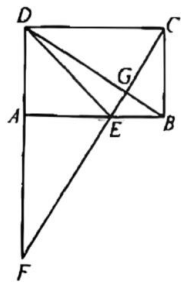
$$\therefore FH = EH,$$

$$\therefore EF = 2EH,$$

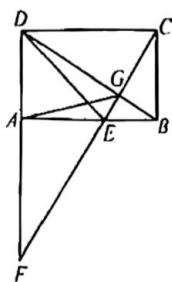
$$\text{又} \because CG = CE - GE = BF - BE = EF,$$

$$\therefore CG = 2EH;$$

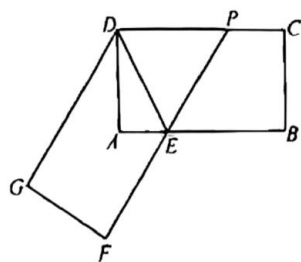
26. 如图①, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = CD, AD = BC, \angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = 90^\circ$, 点 E 是 AB 上一点, 连接 CE 交 BD 于点 G , 延长 CE 交 DA 的延长线于点 F .



图①



图②



图③

(1) 若 $AE = AD, CE \perp BD$, 求证: $AF = AB$;

(2) 如图②, 在 (1) 的条件下, 连接 AG , 求证: $EG + DG = \sqrt{2}AG$;

(3) 如图③, 四边形 $BCDE$ 关于直线 DE 的对称图形为四边形 $FGDE$, 延长 FE 交 CD 于点 P . 若

$AD = 2, AE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 求四边形 $ADPE$ 的面积.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle ABD \cong \triangle AFE$, 即可解答;

(2) 过点 A 作 $AM \perp AG$ 交 EF 于 M , 证明 $\triangle AGB \cong \triangle AMF$, 得到 $AM = AG$, 再证明 $\triangle AME \cong \triangle ADG$, 得到 $ME = DG$, 即可解答;

(3) 由勾股定理可得 DE 的值, 可得 $AE = \frac{1}{2}DE$, 证明 $\angle DAE = 30^\circ$, 再证明 $\triangle DEP$ 为等边三角形, 可得 $DP = DE$, 最后根据梯形面积公式即可解答.

【小问 1 详解】

证明: $\because AB = CD, AD = BC, \angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = 90^\circ$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

则 $\angle EAF = 90^\circ$,

$\therefore \angle AEF + \angle F = 90^\circ$,

$\because CE \perp BD$,

$\therefore \angle EGB = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABD + \angle GEB = 90^\circ$,

$\because \angle GEB = \angle AEF$,

$\therefore \angle ABD = \angle F$,

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle AFE$ 中,

$$\begin{cases} \angle DAB = \angle EAF \\ \angle ABD = \angle F \\ AD = AE \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AFE$ (AAS),

$\therefore AF = AB$;

【小问 2 详解】

证明: 过点 A 作 $AM \perp AG$ 交 EF 于 M , 如图 2 所示:

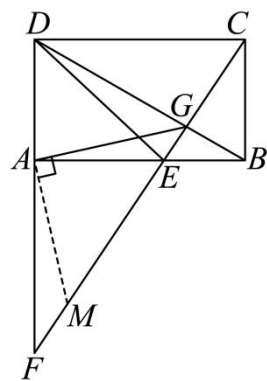


图2

则 $\angle GAM = 90^\circ$,

$\because \angle EAF = 90^\circ$,

$\therefore \angle GAB + \angle EAM = \angle FAM + \angle EAM$,

$\therefore \angle GAB = \angle MAF$,

在 $\triangle AGB$ 和 $\triangle AMF$ 中,

$$\begin{cases} \angle GAB = \angle MAF \\ AB = AF \\ \angle GBA = \angle MFA \end{cases},$$

$\therefore \triangle AGB \cong \triangle AMF$ (ASA),

$$\therefore AM = AG,$$

$$\because \angle GAM = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle AMG$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle AMG = \angle AGM = 45^\circ, \quad MG = \sqrt{2}AG,$$

$$\because \angle DAB = 90^\circ, \quad \angle GAM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAG = \angle EAM,$$

$$\because AD = AE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AMG = \angle DEA = 45^\circ,$$

$$\because CE \perp BD,$$

$$\therefore \angle DGE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DGA = 90^\circ - \angle AGM = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AME = \angle DGA,$$

在 $\triangle AME$ 和 $\triangle AGD$ 中,

$$\begin{cases} \angle AME = \angle DGA \\ \angle MAE = \angle GAD, \\ AE = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AME \cong \triangle AGD \text{ (AAS)},$$

$$\therefore ME = DG,$$

$$\therefore MG = GE + ME = GE + DG,$$

$$\because MG = \sqrt{2}AG,$$

$$\therefore EG + DG = \sqrt{2}AG;$$

【小问 3 详解】

解: 由 (1) 得四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AB \parallel CD, \quad \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle DAE \text{ 中, 由勾股定理得: } DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}DE,$$

$$\therefore \angle DAE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DEA = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$\because$ 四边形 $BCDE$ 与四边形 $FGDE$ 关于直线 DE 对称,

$$\therefore \angle DEF = \angle DEB,$$

$$\therefore \angle PEB = \angle AEF,$$

$$\therefore \angle DEA = \angle DEP = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle PEB = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle DPE = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle DEP$ 为等边三角形,

$$\therefore DP = DE = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{梯形 } ADPE \text{ 的面积为: } \frac{1}{2} \times (AE + DP) \cdot AD = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} \right) \times 2 = 2\sqrt{3},$$

故答案为: $2\sqrt{3}$.

【点睛】 本题为四边形综合题, 考查了矩形的性质, 平行线的性质, 等腰三角形的判定和性质, 等边三角形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 轴对称的性质, 勾股定理, 熟练掌握上述性质, 作出正确的辅助线是解题的关键.