

2025 学年第一学期期末八年级数学学科自适应练习

(时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列各数中, 是无理数的是 ()

- A. $\sqrt{4}$ B. $\frac{22}{7}$ C. 0.010010001 D. $\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】 本题考查的是无理数的识别, 算术平方根, 掌握无理数的定义是关键. 根据无理数是无限不循环小数解答即可.

【详解】 解: A. $\sqrt{4} = 2$ 是整数, 属于有理数, 故本选项不符合题意;

B. $\frac{22}{7}$ 是分数, 属于有理数, 故本选项不符合题意;

C. 0.010010001 是有限小数, 属于有理数, 故本选项不符合题意;

D. $\sqrt{3}$ 是无理数, 故本选项符合题意.

故选: D.

2. 下列二次根式中, 与 $\sqrt{2a} (a > 0)$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{4a}$; B. $\sqrt{8a^2}$; C. $\sqrt{\frac{a}{2}}$; D. $\sqrt{\frac{2a}{3}}$.

【答案】C

【解析】

【分析】 本题主要考查同类二次根式的定义, 根据同类二次根式需化简后根号内的被开方数相同, 将各选项化为最简二次根式后比较被开方数即可.

【详解】 解: A、 $\sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$, 被开方数为 a , 与 $\sqrt{2a}$ 的被开方数 $2a$ 不同, 不符合题意;

B、 $\sqrt{8a^2} = 2a\sqrt{2}$, 被开方数为 2 , 与 $2a$ 不同, 不符合题意;

C、 $\sqrt{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{2a}}{2}$, 被开方数为 $2a$, 相同, 符合题意;

D、 $\sqrt{\frac{2a}{3}} = \frac{\sqrt{6a}}{3}$, 被开方数为 $6a$, 与 $2a$ 不同, 不符合题意;

故选: C.

3. 下列关于 x 的方程中，是一元二次方程的是 ()

A. $ax^2 + bx + c = 0$;

B. $x^2 = 0$;

C. $(2x-7)(x+1) = 2x^2 - 3$;

D. $x^2 + \frac{1}{2x^2} = 0$.

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查一元二次方程的定义，根据一元二次方程的定义（只含有一个未知数，且未知数的最高次数是 2 的整式方程），判断各选项是否符合条件.

【详解】解：一元二次方程需满足：①整式方程；②只含一个未知数；③未知数的最高次数为 2，

对于 A：当 $a=0$ 时，方程变为 $bx+c=0$ ，不是二次方程，故不一定是；

对于 B： $x^2=0$ ，满足所有条件，是一元二次方程；

对于 C：化简左边 $(2x-7)(x+1) = 2x^2 - 5x - 7$ ，右边 $= 2x^2 - 3$ ，

$\therefore$ 方程化为 $-5x - 7 = -3$ ，即 $-5x = 4$ ，是一元一次方程，不是二次；

对于 D：方程中含分式，分母有未知数，不是整式方程，故不是；

故选：B.

4. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2x + 3k = 0$ 有实数根，那么 k 的取值范围是 ()

A. $k \leq \frac{1}{3}$;

B. $k < \frac{1}{3}$;

C. $k > -\frac{1}{3}$;

D. $k \geq -\frac{1}{3}$.

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程根的判别式，掌握相关知识是解决问题的关键. 利用二次方程有实数根的条件，判别式非负，求解不等式.

【详解】解： $\because$ 方程 $x^2 - 2x + 3k = 0$ 有实数根，

$$\therefore \text{判别式 } \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3k = 4 - 12k \geq 0,$$

$$\therefore 4 \geq 12k,$$

$$\therefore k \leq \frac{1}{3}.$$

故 k 的取值范围是 $k \leq \frac{1}{3}$.

故选：A.

5. 小明的爸爸买了某银行的低风险理财产品（该理财产品分两次取回），本金为 10000 元，1 年后返还 5110

元，2年后返还5250元，设此理财产品的收益率为 x ，根据题意，为求解 x ，以下列出的方程中正确的是（ ）

A. $10000(1+x)^2 = 5110 + 5250$ ；

B. $10000(1+x) + 10000(1+2x) = 5110 + 5250$ ；

C. $\frac{5110 + 5250}{(1+2x)^2} = 10000$ ；

D. $\frac{5110}{1+x} + \frac{5250}{(1+x)^2} = 10000$ 。

【答案】D

【解析】

【分析】理财产品的收益率 x 为年化收益率，返还金额为未来值，需折现为现值后与本金相等。

本题考查了收益率，熟练掌握定义是解题的关键。

【详解】解： $\because$ 返还金额5110元和5250元分别发生在1年后和2年后，其现值需用 $(1+x)$ 折现，

$\therefore$ 1年后返还的现值为 $\frac{5110}{1+x}$ ，2年后返还的现值为 $\frac{5250}{(1+x)^2}$ ，现值之和应等于本金10000元，

$$\therefore \frac{5110}{1+x} + \frac{5250}{(1+x)^2} = 10000,$$

故选：D。

6. 下列命题中，一定正确的是（ ）。

A. 如果一个直角三角形的两条边的长分别为6和8，那么第三条边的长为10；

B. 如果一个直角三角形的面积为20，那么斜边上的高可以为5；

C. 有一条直角边和斜边上的中线对应相等的两个直角三角形一定全等；

D. 在直角三角形中，如果一条直角边等于另一条边的一半，那么这条直角边所对的角等于30°。

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查直角三角形的性质。熟悉直角三角形的主要性质：勾股定理的应用，直角三角形面积公式与斜边、斜边上高的关系，全等三角形的判定（直角三角形全等的判定定理），含30°角的直角三角形的性质，是解题的关键。

A中第三条边可能不为10；B中斜边高为5时无实数解；D中“另一条边”指代不明，可能不成立；C利

用直角三角形斜边上中线性质的判定定理可证.

【详解】解: A 选项: 两条边长为 6 和 8 时, 第三边可能为 10 (直角边为 6 和 8 时) 或 $2\sqrt{7}$ (斜边为 8 时), 所以无法确定;

B 选项: 面积 20, 则两直角边的积为 40. 设斜边高 $h=5$, 则斜边 $c=40\div h=8$,

两直角边 a, b 满足 $a^2+b^2=c^2=64$, $ab=40$,

$$\therefore (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 64 + 80 = 144,$$

$\therefore a+b=12$, 设 a 为 x , 那么 b 为 $12-x$,

此时方程 $x^2-12x+40=0$ 判别式 $\Delta=144-160=-16<0$, 无实数解, $\therefore$ 不可能.

C 选项: 一条直角边和斜边中线相等时, 因为直角三角形斜边上的中线等于斜边一半, 所以它们的斜边也对应相等, 根据直角三角形全等的判定定理, 两直角三角形全等;

D 选项: 一条直角边等于另一条边一半时, 若为斜边一半, 则所对的角为 30° ; 若为直角边一半, 则所对的角不为 30° , 所以无法确定.

故选: C.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. 计算: $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{\frac{12}{x^2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $2\sqrt{3x}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的乘法法则计算解答即可.

本题考查了二次根式的乘法, 熟练掌握法则是解题的关键.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{\frac{12}{x^2}} &= \sqrt{x^3 \cdot \frac{12}{x^2}} \\ &= \sqrt{12x} \\ &= \sqrt{4 \times 3x} \\ &= 2\sqrt{3x}. \end{aligned}$$

故答案为: $2\sqrt{3x}$.

8. 如果 $\sqrt{2x+3}$ 有意义, 那么 x 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $x \geq -\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的被开方数是非负数得到 $2x+3 \geq 0$ ，即可得到答案.

【详解】 解： $\because \sqrt{2x+3}$ 有意义，

$$\therefore 2x+3 \geq 0,$$

$$\therefore x \geq -\frac{3}{2},$$

故答案为： $x \geq -\frac{3}{2}$.

【点睛】 此题考查了二次根式有意义的条件，熟记二次根式有意义的条件是解题的关键.

9. 比较大小： $4\sqrt{3}$ _____ $3\sqrt{5}$ （填“>”，“<”或“=”）.

【答案】 >

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式比较大小，根据 $\sqrt{48} > \sqrt{45}$ 即可得到 $4\sqrt{3} > 3\sqrt{5}$.

【详解】 解： $\because 48 > 45$,

$$\therefore \sqrt{48} > \sqrt{45},$$

$$\therefore 4\sqrt{3} > 3\sqrt{5},$$

故答案为： >.

10. 方程 $x^2 - 2x = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

【解析】

【分析】 通过因式分解法将方程化为两个一次因式的乘积，利用零乘积性质求解.

本题考查了一元二次方程的解法，熟练掌握解法是解题的关键.

【详解】 解： 原方程为 $x^2 - 2x = 0$,

提取公因式得 $x(x-2) = 0$,

由零乘积性质，得 $x = 0$ 或 $x-2=0$,

解得 $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

11. 1. 用配方法解一元二次方程 $x^2 + 4x - 3 = 0$ ，将原方程转化为 $(x+a)^2 = b$ 的形式，则 $a =$ _____,

$$b = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 ① 2 ② 7

【解析】

【分析】 本题考查配方法解一元二次方程，通过配方将方程转化为完全平方形式，从而求出 a 和 b 的值.

【详解】 解：由原方程 $x^2 + 4x - 3 = 0$,

$$\text{移项得, } x^2 + 4x = 3,$$

$$\text{配方得, } x^2 + 4x + 4 = 3 + 4,$$

$$\text{即 } (x + 2)^2 = 7,$$

$$\therefore a = 2, b = 7$$

故答案为：2, 7.

$$12. \text{ 在实数范围内因式分解: } 2x^2 + 4x + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{【答案】 } (\sqrt{2}x + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{2}x + \sqrt{2} - 1)$$

【解析】

【分析】 本题考查配方法将代数式变形为完全平方式及平方差公式进行因式分解，熟记公式结构是本题的解题关键.

先提取公因数，再配方，最后利用平方差公式求解即可.

$$\text{【详解】 解: } 2x^2 + 4x + 1$$

$$= 2(x^2 + 2x) + 1$$

$$= 2[(x+1)^2 - 1] + 1$$

$$= 2(x+1)^2 - 1$$

$$= [\sqrt{2}(x+1)]^2 - 1^2$$

$$= [\sqrt{2}(x+1) + 1][\sqrt{2}(x+1) - 1]$$

$$= (\sqrt{2}x + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{2}x + \sqrt{2} - 1),$$

$$\text{故答案为: } (\sqrt{2}x + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{2}x + \sqrt{2} - 1).$$

13. 某品牌喷墨打印机的耗材数据显示：每打印 1 页文档，平均消耗墨量约 0.000025 升，某公司一周平均

约打印 500 页办公文档，那么一周该打印机约消耗_____升墨。（结果用科学记数法表示）

【答案】 1.25×10^{-2}

【解析】

【分析】 计算一周总消耗墨量，需将每页消耗墨量乘以周打印页数，再将结果用科学记数法表示。

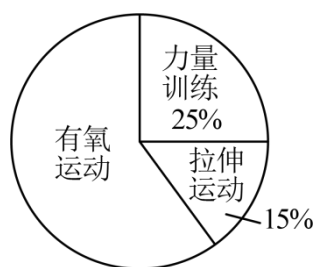
本题考查了科学记数法，熟练掌握乘法，科学记数法是解题的关键。

【详解】 解：每页消耗墨量为 0.000025 升，即 2.5×10^{-5} 升；周打印页数为 500 页，即 5×10^2 页。

总消耗墨量为 $2.5 \times 10^{-5} \times 5 \times 10^2 = 12.5 \times 10^{-3} = 1.25 \times 10^{-2}$ 升。

故答案为： 1.25×10^{-2} 。

14. 常见的运动健身方式有三种：有氧运动、力量训练和拉伸运动。为了解某社区 9000 名居民的运动健身情况，随机抽取部分居民调查他们的运动健身情况（每人只能选一种健身方式），根据收集到的数据绘制成如图所示的统计图（不完整），那么该社区爱好有氧运动的居民约有_____人。



【答案】 5400

【解析】

【分析】 根据题意，该社区爱好有氧运动的居民占比 $1 - 25\% - 15\% = 60\%$ ，根据样本容量计算即可。

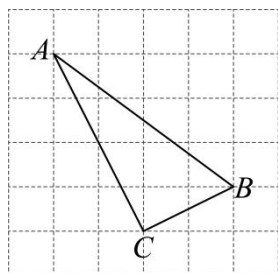
本题考查了扇形统计图的应用，熟练掌握统计图的意义是解题的关键。

【详解】 解：根据题意，得该社区爱好有氧运动的居民占比 $1 - 25\% - 15\% = 60\%$ ，

故该社区爱好有氧运动的居民约有 $9000 \times 60\% = 5400$ （人）。

故答案为： 5400。

15. 如图，网格中每个小正方形的边长均为 1， $\triangle ABC$ 的顶点 A 、 B 、 C 都在格点上，那么边 AB 上的高是_____。



【答案】2

【解析】

【分析】根据题意 $AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$, $BC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, 根据勾股定理逆定理判定 $\angle ACB = 90^\circ$, 设边 AB 上的高是 h , 结合 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times BC = \frac{1}{2} AB \cdot h$, 计算即可.

本题考查了网格与勾股定理, 掌握网格与勾股定理的关系是解题的关键.

【详解】解: 根据题意 $AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$, $BC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, 且

$$AB^2 = 25, AC^2 = 20, BC^2 = 5,$$

$$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

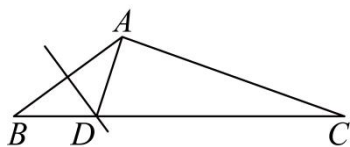
设边 AB 上的高是 h ,

$$\text{由 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times BC = \frac{1}{2} AB \cdot h,$$

$$\therefore h = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{5} = 2,$$

故答案为: 2.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 边 AB 的垂直平分线交 BC 于点 D , 连接 AD , 如果 $DA \perp AC$, $BC = 8$, $AC = 4\sqrt{2}$, 那么 $BD =$ ____.



【答案】2

【解析】

【分析】设 $BD = AD = x$, 则 $DC = BC - BD = 8 - x$, 由 $DA \perp AC$, $AC = 4\sqrt{2}$, 根据勾股定理, 得 $(8 - x)^2 = x^2 + (4\sqrt{2})^2$, 解答即可.

本题考查了线段的垂直平分线, 勾股定理, 熟练掌握性质和定理是解题的关键.

【详解】解: 边 AB 的垂直平分线交 BC 于点 D ,

故 $BD = AD$

设 $BD = AD = x$,

则 $DC = BC - BD = 8 - x$,

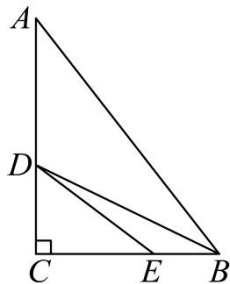
由 $DA \perp AC$, $AC = 4\sqrt{2}$,

根据勾股定理, 得 $(8-x)^2 = x^2 + (4\sqrt{2})^2$,

解得 $x = 2$,

故答案为: 2.

17. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D , 点 E 在边 BC 上, 连接 DE , $\angle CED = \angle A$, 如果 $AB = 7$, $CE = 2$, 那么 $BE = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】3

【解析】

【分析】过点 D 作 $DF \perp AB$ 于点 F , 证明 $\triangle CDB \cong \triangle FDB$, 得到 $BC = BF$, 接着再根据已知证明 $\triangle AFD \cong \triangle ECD$ (AAS), 得到 $EC = AF = 2$, $BC = BF = AB - AF = 5$, 解答即可.

本题考查了角的平分线的性质, 直角三角形的全等判定和性质, 三角形全等的判定和性质, 熟练掌握三角形全等的判定和性质是解题的关键.

【详解】解: 过点 D 作 $DF \perp AB$ 于点 F ,

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$, $\angle C = 90^\circ$,

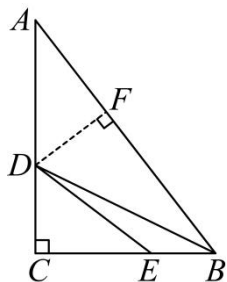
$\therefore DC = DF$,

在 $\text{Rt}\triangle CDB$ 和 $\text{Rt}\triangle FDB$ 中

$$\therefore \begin{cases} DC = DF \\ DB = DB \end{cases},$$

$\therefore \triangle CDB \cong \triangle FDB$,

$\therefore BC = BF$,



在 $\text{Rt}\triangle AFD$ 和 $\text{Rt}\triangle ECD$ 中

$$\therefore \begin{cases} \angle A = \angle CED \\ \angle AFD = \angle ECD, \\ DF = DC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AFD \cong \triangle ECD (\text{AAS}),$$

$$\therefore EC = AF,$$

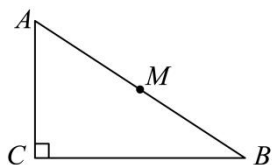
$$\therefore AB = 7, CE = 2,$$

$$\therefore EC = AF = 2, BC = BF = AB - AF = 5,$$

$$\therefore BE = BC - EC = 5 - 2 = 3,$$

故答案为: 3.

18. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, M 是边 AB 的中点, 将 $\triangle ABC$ 绕点 M 旋转, 使得点 C 与点 A 重合, 点 A 、 B 的对应点分别是点 A' 、 B' , AB' 与 BC 交于点 N , 如果 $AC = 2, BC = 3$, 那么 $CN = \underline{\hspace{2cm}}$.



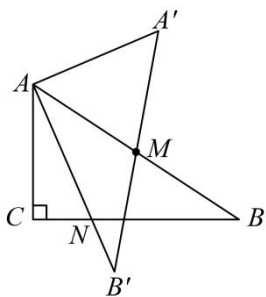
【答案】 $\frac{5}{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了旋转的性质, 直角三角形的性质, 勾股定理, 熟练掌握直角三角形的性质, 勾股定理是解题的关键. 先证明 $NA = NB$, 设 $CN = x$, 则 $NA = NB = BC - CN = 3 - x$, 根据勾股定理得到

$$(3 - x)^2 = 2^2 + x^2, \text{ 解得 } x = \frac{5}{6} \text{ 即可.}$$

【详解】 解: 如图,



$\therefore \angle C = 90^\circ$, M 是边 AB 的中点,

$$\therefore AM = A'M = \frac{1}{2} AB, \quad \angle C = \angle B'AA' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle A' = \angle MAA',$$

$$\therefore 90^\circ - \angle CAB = 90^\circ - \angle MAA',$$

$$\therefore \angle NAB = \angle NBA,$$

$$\therefore NA = NB,$$

设 $CN = x$ ，则 $NA = NB = BC - CN = 3 - x$ ，

$$\therefore (3 - x)^2 = 2^2 + x^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{5}{6},$$

$$\text{故答案为: } \frac{5}{6}.$$

三、解答题 (本大题共 7 题, 第 19、20、21 题每题 6 分, 第 22、23 题每题 7 分, 第 24 题 8 分, 第 25 题 12 分, 共 52 分)

$$19. \text{ 计算: } 2\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{24} \times \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 \div \sqrt{6} + \frac{1}{\sqrt{3}-2}.$$

【答案】

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} - 3$$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的混合运算, 掌握二次根式的运算法则是关键, 根据二次根式的性质化简, 分母有理化的计算得到结果, 最后再计算和差.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & 2\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{24} \times \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 \div \sqrt{6} + \frac{1}{\sqrt{3}-2} \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{24} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{6}} - \sqrt{3} - 2 \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 - \sqrt{3} - 2 \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3} - 3. \end{aligned}$$

$$20. \text{ 解方程: } \frac{(y+3)(y-3)}{2} = \frac{y^2}{3} - y.$$

【答案】

$$y_1 = -9, y_2 = 3$$

【解析】

【分析】 本题主要考查运用平方根解方程，掌握平方根的计算方法是关键，根据题意，去分母，去括号，移项，整理为 $(y+3)^2 = 36$ ，再运用平方根的计算即可求解.

【详解】 解： $\frac{(y+3)(y-3)}{2} = \frac{y^2}{3} - y$,

去分母得， $3(y+3)(y-3) = 2y^2 - 6y$,

去括号得， $3y^2 - 27 = 2y^2 - 6y$,

整理得， $y^2 + 6y - 27 = 0$,

$$\therefore y^2 + 6y = 27,$$

$$\therefore y^2 + 6y + 9 = 36, \text{ 即 } (y+3)^2 = 36,$$

$$\therefore (\pm 6)^2 = 36,$$

$$\therefore y+3 = \pm 6, \text{ 即 } y = -3 \pm 6,$$

解得， $y_1 = -9, y_2 = 3$.

21. 先化简，再求值：已知 $x = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ ，求 $\frac{(1-x)^2}{x-1} + \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$ 的值.

【答案】

$$\sqrt{2}-3$$

【解析】

【分析】 本题主要考查分式的化简求值，掌握分式的性质是关键，根据分式的性质化简，代入计算即可.

【详解】 解： $x = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1$,

$$\therefore x-2 < 0,$$

$$\frac{(1-x)^2}{x-1} + \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$$

$$= \frac{(x-1)^2}{x-1} + \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}$$

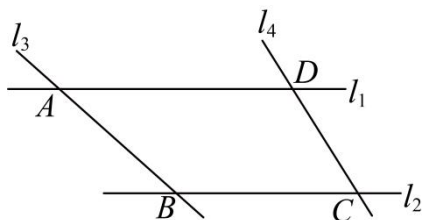
$$= x-1 + \frac{-(x-2)}{x-2}$$

$$= x-1-1$$

$$= x-2,$$

把 $x = \sqrt{2} - 1$ 代入, 原式 $= \sqrt{2} - 1 - 2 = \sqrt{2} - 3$.

22. 如图, 某公共绿地内有四条道路 l_1 、 l_2 、 l_3 、 l_4 , 其中 $l_1 \parallel l_2$, l_3 与 l_1 、 l_2 分别交于 A 、 B , l_4 与 l_1 、 l_2 分别交于点 D 、 C , $AD = 180$ 米, $AB = 120$ 米, $BC = 140$ 米. 现规划在道路 l_1 上的点 A 、 D 之间建一个凉亭 P , 要求凉亭 P 到道路 l_2 、 l_3 的距离相等.



- (1) 用直尺和圆规作出满足上述条件的点 P ; (不写作法和结论, 仅保留作图痕迹, 图中清楚地标注点 P)
- (2) 后期规划在点 B 、 P 之间修一条路, 将四边形 $ABCD$ 以 BP 为分割线分为两个区域种花, 已知点 P 到 l_3 的距离为 80 米.

①求 PD 的长;

②求四边形 $PBCD$ 的面积. (忽略道路的宽度)

【答案】 (1) 见解析 (2) ①60 米; ②8000 平方米.

【解析】

【分析】 (1) 用尺规作 $\angle ABC$ 的平分线, 与 l_1 的交点就是所求点 P .

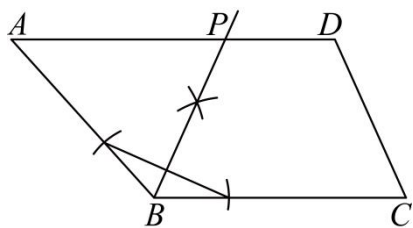
(2) ①证明 $AP = AB$, 后解答即可;

②根据梯形的面积公式计算即可.

本题考查了角的平分线的基本作图, 等腰三角形的证明, 梯形的面积, 熟练掌握作图是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: 根据题意, 用尺规作 $\angle ABC$ 的平分线, 与 l_1 的交点就是所求点 P .



故点 P 即为所求.

【小问 2 详解】

①解: $\because BP$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,

$$\therefore \angle ABP = \angle CBP,$$

$$\because l_1 \parallel l_2,$$

$$\therefore \angle APB = \angle CBP,$$

$$\therefore \angle APB = \angle ABP,$$

$$\therefore AP = AB,$$

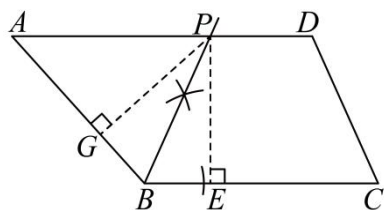
$$\because AD = 180 \text{ 米}, AB = 120 \text{ 米},$$

$$\therefore AP = AB = 120 \text{ 米},$$

$$\therefore PD = AD - AP = AD - AB = 60 \text{ (米)};$$

②解: 过点 P 作 $PG \perp AB$, $PE \perp BC$, 垂足分别为点 G, 点 E,

根据题意, 得 $PG = PE = 80$ 米,



$$\therefore \text{四边形 } PBCD \text{ 的面积为: } \frac{1}{2}(PD + BC) \cdot PE = \frac{1}{2} \times (60 + 140) \times 80 = 8000 \text{ (平方米)}.$$

23. 某新能源汽车的配件工厂向 A、B 两个汽车生产厂家供应某种配件, A 厂采购此配件的单价比 B 厂采购此配件的单价便宜 9 元, 如果 A 厂采购该配件用了 128 万元, B 厂采购该配件用了 272 万元, A、B 两厂共采购该配件 32 万件, 那么 A、B 两个汽车生产厂家采购此配件的单价各为多少元?

【答案】

A 厂采购单价为 8 元, B 厂采购单价为 17 元

【解析】

【分析】 本题主要考查分式方程的运用, 理解数量关系, 正确列式求解是关键, 设 A 厂采购单价为 x 元,

则 B 厂采购单价为 $(x+9)$ 元, 结合题意列分式方程求解即可.

【详解】解: 设 A 厂采购单价为 x 元, 则 B 厂采购单价为 $(x+9)$ 元,

$$\therefore \frac{1280000}{x} + \frac{2720000}{x+9} = 320000,$$

整理得, $2x^2 - 7x - 72 = 0$,

解得, $x_1 = 8$, $x_2 = -\frac{9}{2}$ (不符合题意, 舍去),

经检验, 当 $x = 8$ 时, 原方程有意义,

$\therefore A$ 厂采购单价为 8 元, 则 B 厂采购单价为 $x+9 = 8+9 = 17$ 元,

答: A 厂采购单价为 8 元, B 厂采购单价为 17 元.

24. 【阅读理解】如果三个实数中有两个数乘积的算术平方根等于第三个数, 那么我们把这三个实数称为“组合平方数”.

(1) 3、6、12_____“组合平方数”; (填“是”或“不是”)

(2) 如果 -2 、 n 、4 是“组合平方数”, 那么 $n =$ _____;

【问题探究】在学习一元二次方程时, 我们知道一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根的情况是由系数 a 、 b 、 c 确定的.

已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 有实数根, 请回答下列问题.

(3) 设 p (p 为有理数, 且 $p \neq 0$) 为该方程的两根之和, $-\frac{1}{p}$ 为该方程的两根之积. 求证: a 、 b 、 c 是“组合平方数”;

(4) 当 $a = 1$ 时, a 、 b 、 c ($b \cdot c \neq 1$) 是“组合平方数”, 且 $b^2 + 2c^2 = 15$. 求 b 和 c 的值.

【答案】(1) 是

(2) -8

(3) 证明过程见详解

$$(4) b = 3, c = \sqrt{3} \text{ 或 } b = \frac{\sqrt{10}}{2}, c = \frac{5}{2}$$

【解析】

【分析】本题主要考查算术平方根的运用, 理解题意, 正确列式计算是关键.

(1) 根据“组合平方数”的定义, 分类计算即可求解;

(2) 根据“组合平方数”的定义, 结合算术平方根中被开方数的特点, 算术平方根的结果, 分类计算即可

求解;

(3) 分别用含 a, b, c 的式子表示出 $p, -\frac{1}{p}$, 结合“组合平方数”的定义计算即可;

(4) 根据“组合平方数”的定义, 分类讨论即可.

【详解】解: (1) $\because 3 \times 6 = 18, \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \neq 12, 3 \times 12 = 36, \sqrt{36} = 6, 6 \times 12 = 72, \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \neq 3,$
 $\therefore 3、6、12$ 是“组合平方数”;

故答案为: 是;

(2) 如果 $-2、n、4$ 是“组合平方数”,

$\therefore$ 当 $\sqrt{-2n} = 4$ 时,

解得, $n = -8$;

当 $\sqrt{-2 \times 4} = \sqrt{-8}$ 时, 被开方数小于 0, 不符合题意, 舍去;

当 $\sqrt{4n} = -2$ 时, 由算术平方根是大于等于 0 的数得到不符合题意, 舍去;

故答案为: -8 ;

(3) 证明: 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$) 有实数根,

$\therefore$ 设 p (p 为有理数, 且 $p \neq 0$) 为该方程的两根之和, $-\frac{1}{p}$ 为该方程的两根之积, 方程的两个根分别用 x_1, x_2

表示,

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = p, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{p},$$

$$\therefore \frac{b}{a} = -p, \text{ 则 } \frac{a}{b} = -\frac{1}{p},$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{a},$$

$$\therefore bc = a^2,$$

$$\because a > 0, a^2 > 0,$$

$$\therefore bc > 0,$$

$$\therefore \sqrt{bc} = a,$$

$\therefore a、b、c$ 是“组合平方数”;

(4) 当 $a=1$ 时, $a、b、c(b \cdot c \neq 1)$ 是“组合平方数”, 即 $1、b、c(b \cdot c \neq 1)$ 是“组合平方数”,

$\therefore$ 当 $\sqrt{1 \cdot b} = c$ 时, $b > 0, b = c^2, c > 0,$

$$\therefore b^2 + 2b = 15,$$

整理得, $b^2 + 2b - 15 = 0$, 则 $(b+5)(b-3) = 0$,

解得, $b_1 = -5$ (不符合题意, 舍去), $b = 3$,

$$\therefore 3 = c^2,$$

$$\therefore c = \pm\sqrt{3} \text{ (负值舍去), 即 } c = \sqrt{3},$$

$\therefore 1, 3, \sqrt{3}$ 是“组合平方数”;

当 $\sqrt{1 \cdot c} = b$ 时, $c > 0, c = b^2, b > 0,$

$$\therefore c + 2c^2 = 15,$$

整理得, $2c^2 + c - 15 = 0$, 则 $(c+3)(2c-5) = 0$,

解得, $c_1 = -3$ (不符合题意, 舍去), $c_2 = \frac{5}{2}$,

$$\therefore \frac{5}{2} = b^2,$$

$$\therefore b = \pm\frac{\sqrt{10}}{2} \text{ (负值舍去), 即 } b = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$\therefore 1, \frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{5}{2}$ 是“组合平方数”;

$$\therefore b \cdot c \neq 1,$$

$\therefore \sqrt{b \cdot c} = 1$ 不符合题意;

综上所述, $b=3, c=\sqrt{3}$ 或 $b=\frac{\sqrt{10}}{2}, c=\frac{5}{2}$.

25. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=BC$, 点 E 在边 AB 上, 连接 CE , 过点 B 作 $BF \perp CE$, 垂足为点 F , 过点 A 作 $AG \perp CE$, 交 CE 的延长线于点 G , $BF=CG$.

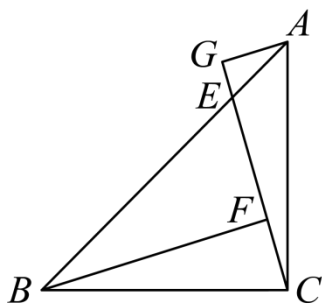


图1

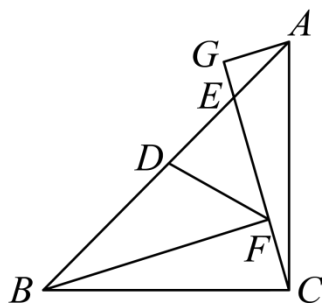
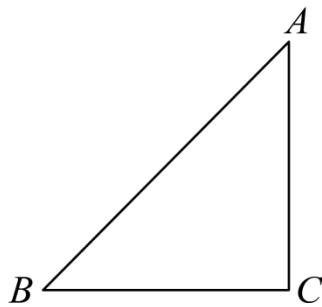


图2



备用图

(1) 求证: $\angle ACB = 90^\circ$;

(2) 如图 2, 点 D 是 AB 的中点, 点 E 在线段 AD 上, 连接 DF .

①当 $BE = BC$ 时, 求证: $\angle EDF = \angle BCF$;

②连接 AF , 设 $AC = a$, 如果 $AF \perp DF$, 用含 a 的代数式表示 DF 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) ①见解析; ② $DF = \frac{\sqrt{10}}{10}a$

【解析】

【分析】(1) 利用 HL 证明 $\text{Rt}\triangle ACG \cong \text{Rt}\triangle CBF$ (直角三角形全等的判定定理)

即可.

(2) ①连接 CD , 证明 $\angle BEF = \angle BCF$, $EF = FC$, $CD \perp AD$, 继而根据直角三角形斜边上的中线等于斜边一半, 得到 $\angle EDF = \angle BEF$, 等量代换证明即可.

②过点 D 作 $DP \perp DF$ 交 BP 于点 P , 连接 DC , 证明 $\triangle DPB \cong \triangle DFC$, 则 $DP = DF$, 得 $\angle DFP = 45^\circ$, 从而得 $AG = GF = CF$, 则 $BF = 2CF$, 在 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中利用勾股定理求得 CF , 从而求得 AF , 再用三勾股定理解答即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because BF \perp CE$, $AG \perp CE$,

$\therefore \angle BFC = \angle CGA = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ACG$ 和 $\text{Rt}\triangle CBF$ 中,

$$\therefore \begin{cases} BC = CA \\ BF = CG \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ACG \cong \text{Rt}\triangle CBF$ (直角三角形全等的判定定理),

$\therefore \angle FBC = \angle GCA$,

$\therefore \angle FBC + \angle FCB = 90^\circ$,

$\therefore \angle GCA + \angle FCB = 90^\circ$,

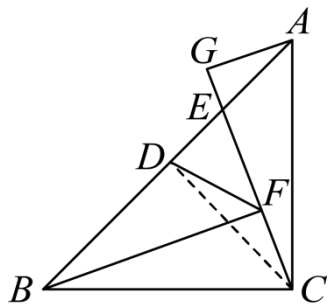
$$\therefore \angle ACB = 90^\circ.$$

【小问 2 详解】

$$\textcircled{1}\text{解: } \because BE = BC, \quad BF \perp CE,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle BCF, \quad EF = FC,$$

连接 CD , 如图,



$$\because BC = AC, \text{ 点 } D \text{ 是 } AB \text{ 的中点},$$

$$\therefore CD \perp AD,$$

$$\therefore \angle EDC = 90^\circ,$$

$$\because EF = FC,$$

$$\therefore DF = \frac{1}{2}EC = EF = FC,$$

$$\therefore \angle EDF = \angle BEF,$$

$$\because \angle BEF = \angle BCF,$$

$$\therefore \angle EDF = \angle BCF.$$

$\textcircled{2}\text{解:}$ 如图, 过点 D 作 $DP \perp DF$ 交 BP 于点 P , 连接 DC ,

则 $CD = BD$, $CD \perp AB$, $\angle FDP = 90^\circ$,

$$\therefore \angle FDP = \angle CDB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDP = \angle CDF,$$

$$\because BF \perp CG, \quad CD \perp AB,$$

$$\therefore \angle EBF + \angle BEF = \angle BEF + \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBF = \angle DCE, \text{ 即 } \angle DBP = \angle DCF,$$

$$\therefore \triangle DPB \cong \triangle DFC (\text{ASA}),$$

$$\therefore DP = DF, \quad BP = CF,$$

$$\because DP \perp DF,$$

$$\therefore \angle DFP = 45^\circ,$$

$$\because BF \perp CG, \quad AF \perp DF,$$

$$\therefore \angle DFE = \angle AFG = 45^\circ,$$

$$\because AG \perp GC,$$

$$\therefore \angle GAF = \angle AFG = 45^\circ,$$

$$\therefore AG = GF,$$

由 (1) 知, $\text{Rt}\triangle ACG \cong \text{Rt}\triangle CBF$,

$$\therefore AG = CF,$$

$$\therefore AG = GF = CF,$$

$$\therefore BF = CG = 2CF,$$

$$\because BC = AC = a,$$

$$\therefore AB = \sqrt{2}AC = \sqrt{2}a,$$

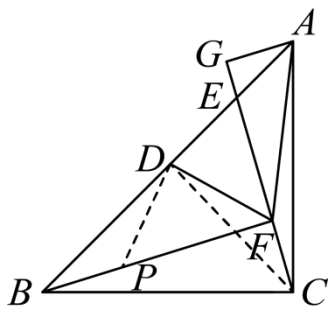
在 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中, 勾股定理得 $CF^2 + BF^2 = BC^2$,

$$\text{即 } CF^2 + (2CF)^2 = a^2,$$

$$\therefore CF = \frac{\sqrt{5}}{5}a,$$

$$\text{即 } AG = GF = \frac{\sqrt{5}}{5}a,$$

在 $\text{Rt}\triangle AGF$ 中, 由勾股定理得 $AF = \sqrt{2}AG = \frac{\sqrt{10}}{5}a$,



$\because$ 点 D 为线段 AB 的中点,

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中, 由勾股定理得 $AD^2 = DF^2 + AF^2$,

$$\therefore DF = \sqrt{AD^2 - AF^2} = \frac{\sqrt{10}}{10}a.$$

【点睛】 本题考查了三角形全等的判定与性质，直角三角形的性质，等腰三角形的性质与判定，勾股定理等知识，构造三角形全等是解题的关键.