

普陀区 2025 学年第一学期八年级期末复习综合卷 (B)

数学试卷

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列说法中, 正确的是 ()

A. 8 的算术平方根是 4

B. $\frac{25}{49}$ 的算术平方根是 $\pm\frac{5}{7}$

C. $\sqrt{\frac{16}{81}}$ 的平方根是 $\pm\frac{2}{3}$

D. 64 的立方根是 ± 4

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了化简二次根式, 算术平方根、平方根和立方根的定义. 根据定义逐一判断各选项即可.

【详解】解: A、8 的算术平方根是 $2\sqrt{2}$, 故本选项错误;

B、 $\frac{25}{49}$ 的算术平方根是 $\frac{5}{7}$, 故本选项错误;

C、 $\sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}$ 的平方根是 $\pm\frac{2}{3}$, 故本选项正确;

D、64 的立方根是 4, 故本选项错误.

故选: C.

2. 下列二次根式里, 被开方数中各因式的指数都为 1 的是 ()

A. $\sqrt{x^2 y^2}$

B. $\sqrt{x^2 + y^2}$

C. $\sqrt{(x+y)^2}$

D. $\sqrt{xy^2}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次根式的定义判断即可.

【详解】解: A. x, y 的指数分别为 2, 2, 此选项错误;

B. $x^2 + y^2$ 的指数为 1, 此选项正确;

C. $x+y$ 的指数为 2, 此选项错误;

D. x, y 的指数分别为 1, 2. 此选项错误;

故选: B.

【点睛】本题主要考查了二次根式的定义, 分清因数和指数是解答此题的关键.

3. 爱国、拥军、爱民、胜利四位同学准备调查我县老年人的健康状况, 他们各自都设计了调查方案:

爱国：我准备在敬老院里调查100名老年人的健康状况；

拥军：我准备在医院里调查100名老年人的健康状况；

爱民：我准备在公园里调查100名老年人的健康状况：

胜利：我准备利用公安系统的户籍网随机抽出100名老年人，调查他们的健康情况；

能较好地获得我县老年人健康状况的方案是 ()

- A. 爱国 B. 拥军 C. 爱民 D. 胜利

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查抽样调查，数据收集和整理的过程和方法，理解抽取样本的广泛性、代表性和可靠性是正确判断的前提，根据抽取样本的广泛性、代表性和可靠性进行判断即可。

【详解】解：选项 A、B、C 的抽样方式不具有代表性和普遍性，选项 D 的抽样方式具有代表性和普遍性，故选项 D 正确。

4. 如果方程 $mx^2 - 6x + 1 = 0$ 有实数根, 那么 m 的取值范围是 ()

- A. $m < 9$ 且 $m \neq 0$;
B. $m \leq 9$ 且 $m \neq 0$;
C. $m < 9$;
D. $m \leq 9$.

【答案】D

【解析】

【分析】根据方程有实数根，分类讨论：当 $m=0$ 时， $-6x+1=0$ ；当 $m \neq 0$ 时， $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ ，分别进行求解即可。

【详解】解: $\because$ 方程 $mx^2 - 6x + 1 = 0$ 有实数根,

当 $m = 0$ 时, $-6x + 1 = 0$,

解得 $x = \frac{1}{6}$,

当 $m \neq 0$ 时, $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times m \times 1 \geq 0$,

解得 $m \leq 9$.

$\therefore m$ 的取值范围是 $m \leq 9$,

故选: D.

5. 某工厂第四季度的每月产值的增长率都是 x , 其中 12 月份的产值是 100 万元, 那么 10 月份的产值是 ()

- A. $100(1-x^2)$; B. $100(1-x)^2$; C. $\frac{100}{(1+x)^2}$; D. $\frac{100}{1+x^2}$.

【答案】C

【解析】

【分析】设9月份的产值为 a ，根据题意可得 $a(1+x)^3=100$ ，求得 $a=\frac{100}{(1+x)^3}$ ，即可求解.

【详解】解：设9月份的产值为 a ，

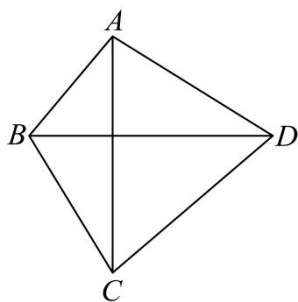
由题意可得， $a(1+x)^3=100$ ，

$$\therefore a = \frac{100}{(1+x)^3},$$

$$\therefore 10 \text{ 月份的产值是 } \frac{100}{(1+x)^3} \cdot (1+x) = \frac{100}{(1+x)^2},$$

故选：C.

6. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AC \perp BD$ ，那么下列结论正确的是（ ）



A. $AB^2 - CD^2 = BC^2 - AD^2$

B. $AB^2 - CD^2 = AD^2 - BC^2$

C. $AB^2 - BC^2 = CD^2 - AD^2$

D. $AB^2 - BC^2 = AD^2 - CD^2$

【答案】D

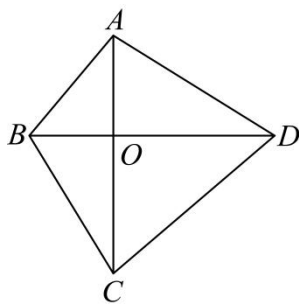
【解析】

【分析】本题考查勾股定理，设 AC 与 BD 交于点 O ，根据勾股定理得到 $AB^2 = OA^2 + OB^2$ ，

$AD^2 = OA^2 + OD^2$ ， $BC^2 = OC^2 + OB^2$ ， $CD^2 = OC^2 + OD^2$ ，则 $AB^2 + CD^2 = AD^2 + CB^2$ ，整理得

$AB^2 - BC^2 = AD^2 - CD^2$ ，据此求解即可.

【详解】解：设 AC 与 BD 交于点 O ，



$\because AC \perp BD,$

$$\therefore AB^2 = OA^2 + OB^2, \quad AD^2 = OA^2 + OD^2, \quad BC^2 = OC^2 + OB^2, \quad CD^2 = OC^2 + OD^2,$$

$$\therefore AB^2 + CD^2 = OC^2 + OD^2 + OA^2 + OB^2 = AD^2 + CB^2,$$

整理得 $AB^2 - BC^2 = AD^2 - CD^2,$

故选: D.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. 若二次根式 $\frac{\sqrt{2-3x}}{x}$ 有意义, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \leq \frac{2}{3}$ 且 $x \neq 0$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式有意义的条件, 分式有意义的条件, 二次根式有意义的条件是被开方数非负, 同时分母不能为零, 因此需满足 $2-3x \geq 0$ 和 $x \neq 0$, 联立求解即可.

【详解】 解: $\because$ 二次根式 $\frac{\sqrt{2-3x}}{x}$ 有意义,

$$\therefore \text{被开方数 } 2-3x \geq 0, \text{ 解得 } x \leq \frac{2}{3};$$

分母 $x \neq 0$.

$$\therefore x \text{ 的取值范围是 } x \leq \frac{2}{3} \text{ 且 } x \neq 0.$$

故答案为 $x \leq \frac{2}{3}$ 且 $x \neq 0$.

8. 方程 $(3x-2)^2 = 64$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = -2$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程, 用直接开平方法解一元二次方程即可.

【详解】解： $\because (3x-2)^2 = 64$,

$$\therefore 3x-2 = \pm 8,$$

$$\text{即 } 3x-2 = 8 \text{ 或 } 3x-2 = -8,$$

$$\text{解 } 3x-2 = 8, \text{ 得 } 3x = 10, \quad x = \frac{10}{3},$$

$$\text{解 } 3x-2 = -8, \text{ 得 } 3x = -6, \quad x = -2,$$

$$\therefore \text{方程 } (3x-2)^2 = 64 \text{ 的根是 } x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = -2,$$

$$\text{故答案为: } x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = -2.$$

9. 不等式 $\sqrt{3}x-5 > 2x$ 的解集是 _____.

【答案】 $x < -5\sqrt{3} - 10$

【解析】

【分析】根据解一元一次不等式基本步骤：移项、合并同类项、系数化为1进行计算即可得.

【详解】解： $\sqrt{3}x-5 > 2x$,

$$\text{移项得: } \sqrt{3}x-2x > 5,$$

$$\text{合并得: } (\sqrt{3}-2)x > 5,$$

$$\text{解得: } x < -5\sqrt{3}-10,$$

$$\text{故答案为: } x < -5\sqrt{3}-10.$$

【点睛】本题主要考查解一元一次不等式的基本能力，严格遵循解不等式的基本步骤是关键，尤其需要注意不等式两边都乘以或除以同一个负数不等号方向要改变.

10. 如果 $\sqrt{x^2(2+x)} = -x \cdot \sqrt{2+x}$ ，那么等式成立的条件是_____.

【答案】 $-2 \leq x \leq 0$ 或 $0 \geq x \geq -2$

【解析】

【分析】本题主要考查了二次根式的性质，求不等式组的解集，解题的关键是根据二次根式的性质得出 $x \leq 0$ ， $2+x \geq 0$ ，再求解即可.

【详解】解： $\because \sqrt{x^2(2+x)} = -x \cdot \sqrt{2+x}$,

$$\therefore \begin{cases} x \leq 0 \\ 2+x \geq 0 \end{cases},$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 0,$$

$\therefore$ 等式成立的条件是: $-2 \leq x \leq 0$,

故答案为: $-2 \leq x \leq 0$.

11. 关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - mx - 2 = 0$ 的根的情况是_____.

【答案】有两个不相等的实数根

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程根的判别式, 熟练掌握一元二次方程根的判别式是解题的关键. 通过计算一元二次方程根的判别式 Δ , 判断根的情况即可.

【详解】 解: 对于一元二次方程 $2x^2 - mx - 2 = 0$, 判别式 $\Delta = (-m)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = m^2 + 16$,

由于 $m^2 \geq 0$,

因此 $\Delta = m^2 + 16 \geq 16 > 0$,

所以方程有两个不相等的实数根,

故答案为: 有两个不相等的实数根.

12. 如果关于 x 的一元二次方程 $8x^2 - (k^2 - 4)x + k - 1 = 0$ 的两实数根互为相反数, 那么 k 的值为_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查了根与系数的关系, 根据根与系数的关系, 两实数根互为相反数则根之和为零, 由此得出 k 的可能值, 再通过判别式检验确保有实数根.

【详解】 解: 设方程的两根为 x_1 和 x_2 ,

由根与系数的关系, 得 $x_1 + x_2 = \frac{k^2 - 4}{8}$,

$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $8x^2 - (k^2 - 4)x + k - 1 = 0$ 的两实数根互为相反数,

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{k^2 - 4}{8} = 0,$$

解得 $k = \pm 2$,

$$\therefore \Delta = [-(k^2 - 4)]^2 - 4 \times 8 \times (k - 1) = (k^2 - 4)^2 - 32(k - 1),$$

$\therefore$ 当 $k = 2$ 时, $\Delta = (2^2 - 4)^2 - 32 \times (2 - 1) = -32 < 0$, 此时方程无解;

当 $k = -2$ 时, $\Delta = (4-4)^2 - 32 \times (-2-1) = 96 > 0$, 此时方程有两实数根;

$\therefore k = -2$

故答案为: -2 .

13. 在实数范围内因式分解: $2x^2 - 3xy - y^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\left(\frac{\sqrt{17}+3}{2}x+y\right)\left(\frac{\sqrt{17}-3}{2}x-y\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了实数范围内分解因式, 先配方, 再根据平方差公式分解因式即可.

【详解】 解: $2x^2 - 3xy - y^2$

$$= 2x^2 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{4}x^2 - 2 \times \frac{3}{2}xy - y^2$$

$$= \frac{17}{4}x^2 - \left(\frac{9}{4}x^2 + 2 \times \frac{3}{2}xy + y^2\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{17}}{2}x\right)^2 - \left(\frac{3}{2}x+y\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{17}}{2}x + \frac{3}{2}x+y\right)\left(\frac{\sqrt{17}}{2}x - \frac{3}{2}x-y\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{17}+3}{2}x+y\right)\left(\frac{\sqrt{17}-3}{2}x-y\right),$$

故答案为: $\left(\frac{\sqrt{17}+3}{2}x+y\right)\left(\frac{\sqrt{17}-3}{2}x-y\right)$.

14. 某厂加工了 200 个工件, 质检员从中随机抽取 10 个工件检测了它们的质量 (单位: g), 得到的数据如下:

第 1 个	第 2 个	第 3 个	第 4 个	第 5 个	第 6 个	第 7 个	第 8 个	第 9 个	第 10 个
50.3	49.88	50.00	49.99	50.02	49.99	50.01	49.97	50.00	50.02

当一个工件的质量 x (单位: g) 满足 $49.99 \leq x \leq 50.02$ 时, 评定该工件为一等品. 根据以上数据, 估计这 200 个工件中一等品的个数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 140

【解析】

【分析】本题考查样本估计总体，通过样本数据计算一等品的频率，并利用该频率估计总体中一等品的数量.

【详解】解：在抽取的 10 个工件中，质量满足 $49.99 \leq x \leq 50.02$ 的工件有第 3 个 (50.00)、第 4 个 (49.99)、第 5 个 (50.02)、第 6 个 (49.99)、第 7 个 (50.01)、第 9 个 (50.00)、第 10 个 (50.02)，共 7 个.

因此一等品的频率为 $\frac{7}{10}$.

估计总体一等品个数为 $200 \times \frac{7}{10} = 140$.

故答案为：140.

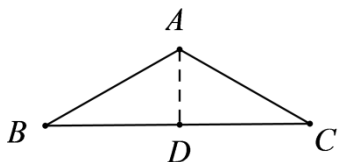
15. 定义：在一个三角形中，我们把一条边上的高与这条边的边长的比值叫做这条边的高比系数，记为 k . 如果 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 120^\circ$ ， $AB = AC$ ，那么边 BC 的高比系数 $k =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{6}$

【解析】

【分析】本题考查等腰三角形的性质， 30° 直角三角形的性质，勾股定理，分母有理化， AD 为 $\triangle ABC$ 的高，由等腰三角形的性质得到 $\angle ABC = \angle ACB = 30^\circ$ ， $BC = 2BD$ ，由 30° 直角三角形的性质得到 $AB = 2AD$ ，由勾股定理得到 $BD = \sqrt{3}AD$ ，最后得到边 BC 的高比系数 $k = \frac{AD}{BC} = \frac{AD}{2\sqrt{3}AD}$.

【详解】解：如图， AD 为 $\triangle ABC$ 的高，



$$\because \angle BAC = 120^\circ, AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 30^\circ, BC = 2BD,$$

$$\therefore AB = 2AD,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{(2AD)^2 - AD^2} = \sqrt{3}AD,$$

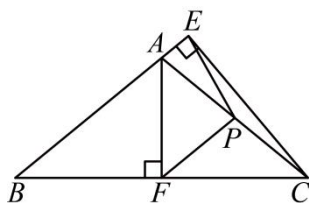
$$\therefore BC = 2BD = 2\sqrt{3}AD,$$

$$\therefore \text{边 } BC \text{ 的高比系数 } k = \frac{AD}{BC} = \frac{AD}{2\sqrt{3}AD} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

故答案为： $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

16. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 为钝角， AF ， CE 都是这个三角形的高， P 为 AC 的中点，若 $\angle B = 42^\circ$ ，则

$\angle EPF$ 的度数为_____.



【答案】 96°

【解析】

【分析】 本题考查了直角三角形中两锐角互余，直角三角形斜边中线等于斜边的一半，等边对等角，根据直角三角形中两锐角互余，先求出 $\angle BCE = 48^\circ$ ，再根据直角三角形斜边中线等于斜边的一半，可得到 $PF = PC$ ， $PE = PC$ ，根据等边对等角得到 $\angle PFC = \angle PCF$ ， $\angle PEC = \angle PCE$ ，最后根据 $\angle EPF = 2\angle BCE$ 求出结果.

【详解】 解： $\because CE \perp BA$ ， $\angle B = 42^\circ$ ，

$\therefore \angle BCE = 48^\circ$ ，

$\because AF \perp BC$ ， $CE \perp BA$ ， P 为 AC 的中点，

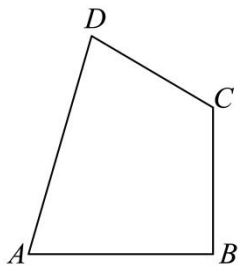
$\therefore PF = \frac{1}{2}AC = PC$ ， $PE = \frac{1}{2}AC = PC$ ，

$\therefore \angle PFC = \angle PCF$ ， $\angle PEC = \angle PCE$ ，

$\therefore \angle EPF = 2\angle PCF + 2\angle PCE = 2\angle BCE = 96^\circ$ ，

故答案为： 96° .

17. 如图，有一块四边形的绿地，其中 $AB = 20$ 米， $BC = 15$ 米， $CD = 14$ 米， $AD = 25$ 米，且 $\angle B = 90^\circ$ ，那么这块绿地的面积是_____平方米.



【答案】 318

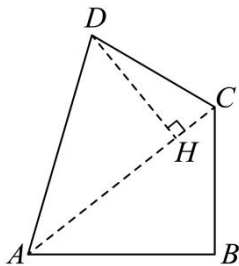
【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理的应用，先理解题意，求出 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 25$ 米，再运用 $CD = 14$ 米，

$AD = 25$ 米， $DH \perp AC$ ，故 $AD^2 - AH^2 = CD^2 - CH^2$ ，代入数值得 $AH = \frac{527}{25}$ ，然后计算

$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC \times DH = 168$, 故 $S_{\triangle ACB} + S_{\triangle ACD} = 318$ 平方米, 即可作答.

【详解】解: 连接 AC , 过点 D 作 $DH \perp AC$, 如图所示:



$\because \angle B = 90^\circ$, $AB = 20$ 米, $BC = 15$ 米,

则 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{400 + 225} = 25$ (米),

$\therefore S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} \times 20 \times 15 = 150$ (平方米)

$\because CD = 14$ 米, $AD = 25$ 米, $DH \perp AC$,

$\therefore DH^2 = AD^2 - AH^2, DH^2 = CD^2 - CH^2$,

则 $AD^2 - AH^2 = CD^2 - CH^2$,

$\therefore 25^2 - AH^2 = 14^2 - (25 - AH)^2$,

解得 $AH = \frac{527}{25}$,

则 $DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{25^2 - \left(\frac{527}{25}\right)^2} = \frac{336}{25}$,

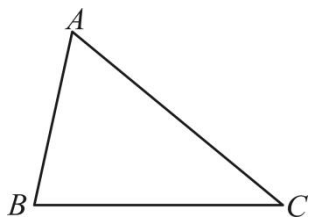
$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC \times DH = \frac{1}{2} \times 25 \times \frac{336}{25} = 168$ (平方米),

$\therefore S_{\triangle ACB} + S_{\triangle ACD} = 150 + 168 = 318$ (平方米),

那么这块绿地的面积是 318 平方米.

故答案为: 318.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 5$, $AC = 8$, $BC = 7$, 将 $\triangle ABC$ 绕着 BC 的中点旋转 m° 后 ($0 < m < 180$), 点 C 恰好落在 $\triangle ABC$ 的边 AC 上的点 D 处, 那么点 D 到顶点 A 的距离是_____.

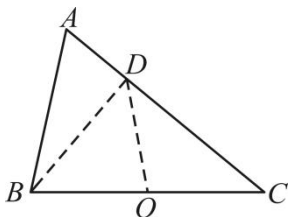


【答案】 2.5

【解析】

【分析】本题考查了勾股定理, 旋转的性质, 等腰三角形的性质, 关键作辅助线是构造直角三角形. 连接 BD , 设 BC 的中点为 O , 由旋转和中点得 $OC = OD = OB$, 由等腰三角形的性质得 $\angle OBD = \angle ODB$, $\angle C = \angle CDO$, 结合三角形内角和得到 $2\angle C + 2\angle DBO = 180^\circ$, 根据三角形的外角得到 $\angle ADB = \angle C + \angle DBO = 90^\circ$, 再根据勾股定理得到 $AB^2 - AD^2 = BD^2 = BC^2 - CD^2$, 据此列出方程求得 AD .

【详解】解: 连接 BD , 设 BC 的中点为 O , 如图,



由旋转的性质知, $OC = OD$,

$$\therefore \angle C = \angle CDO,$$

$\because$ 点 BC 的中点 O ,

$$\therefore OB = OC,$$

$$\therefore OB = OD,$$

$$\therefore \angle OBD = \angle ODB,$$

$$\because \triangle BDC \text{ 中}, \angle C + \angle CDO + \angle OBD + \angle ODB = 180^\circ,$$

$$\therefore 2\angle C + 2\angle DBO = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle C + \angle DBO = 90^\circ,$$

设 $AD = x$,

由勾股定理得, $AB^2 - AD^2 = BD^2 = BC^2 - CD^2$,

$$\because AB = 5, AC = 8, BC = 7,$$

$$\therefore 5^2 - x^2 = 7^2 - (8 - x)^2,$$

解得 $x = 2.5$,

$\therefore$ 点 D 到顶点 A 的距离是 $AD = x = 2.5$,

故答案为: 2.5.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 52 分)

19. 计算: $2\sqrt{12} + \frac{6}{1-\sqrt{3}} - \sqrt{6}\left(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$

【答案】 $-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的混合运算法则进行计算即可.

【详解】 解: 原式 $= 4\sqrt{3} - 3(1 + \sqrt{3}) - \sqrt{6} \times \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$

$$= 4\sqrt{3} - 3 - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3$$
$$= -\sqrt{3}.$$

20. 计算: $\left(4b\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{2}{a}\sqrt{a^3b} \right) - \left(3a\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{9ab} \right) (b < 0).$

【答案】 $-6\sqrt{ab}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算, 先确定 $b < 0$ 、 $a < 0$, 再根据二次根式的性质化简计算即可.

【详解】 解: $\because b < 0$ 、 $\sqrt{\frac{b}{a}}$ 中 $\frac{b}{a} \geq 0$,

$\therefore b < 0$ 、 $a < 0$,

$$\begin{aligned} & \therefore \left(4b\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{2}{a}\sqrt{a^3b} \right) - \left(3a\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{9ab} \right) \\ &= \left[4b \cdot \frac{\sqrt{ab}}{-b} + \frac{2}{a} \cdot (-a)\sqrt{ab} \right] - \left(3a \cdot \frac{\sqrt{ab}}{-a} + 3\sqrt{ab} \right) \\ &= (-4\sqrt{ab} - 2\sqrt{ab}) - (-3\sqrt{ab} + 3\sqrt{ab}) \\ &= -6\sqrt{ab}. \end{aligned}$$

21. 解方程: $(4x-1)^2 - 10(4x-1) - 24 = 0.$

【答案】 $x_1 = \frac{13}{4}, x_2 = -\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程, 通过换元法将方程转化为关于 y 的一元二次方程, 因式分解后求解 y , 再代回解 x .

【详解】 解: 设 $y = 4x - 1$, 则原方程 $(4x-1)^2 - 10(4x-1) - 24 = 0$ 化为 $y^2 - 10y - 24 = 0$,

因式分解, 得 $(y-12)(y+2)=0$,

$$\therefore y_1=12, y_2=-2,$$

当 $y=12$ 时, $4x-1=12$, 解得 $x=\frac{13}{4}$,

当 $y=-2$ 时, $4x-1=-2$, 解得 $x=-\frac{1}{4}$,

$$\therefore \text{原方程的解为: } x_1=\frac{13}{4}, x_2=-\frac{1}{4}.$$

22. A, B 两地相距 18 公里, 甲工程队要在 A, B 两地间铺设一条输送天然气管道, 乙工程队要在 A, B 两地间铺设一条输油管道. 已知甲工程队每周比乙工程队少铺设 1 公里, 甲工程队提前 3 周开工, 结果两队同时完成任务, 求甲、乙两工程队每周各铺设多少公里管道?

【答案】2, 3.

【解析】

【详解】解: 设甲工程队每周铺设管道 x 公里, 则乙工程队每周铺设管道 $(x+1)$ 公里,

根据题意, 得 $\frac{18}{x} - \frac{18}{x+1} = 3$ 3'

解得 $x_1=2, x_2=-3$

经检验, $x_1=2, x_2=-3$ 都是原方程的根

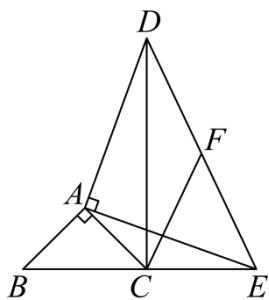
但 $x_2=-3$ 不符合题意, 舍去

$$\therefore x+1=3$$

5'

答: 甲工程队每周铺设管道 2 公里, 则乙工程队每周铺设管道 3 公里

23. 如图, 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, 点 E 在边 BC 的延长线上, $DA \perp AE$, $AD = AE$.



(1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle ACD$;

(2) 如果 F 是 DE 的中点, 求证: $CF = DF$.

【答案】(1) 见详解 (2) 见详解

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定与性质, 三角形内角和性质, 斜边上的中线等于斜边的一半, 正确

掌握相关性质内容是解题的关键.

(1) 先整理得 $\angle BAE = \angle CAD$, 再结合 $AB = AC$, $AD = AE$, 证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ (SAS);

(2) 结合 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$, 得 $\angle AEB = \angle ADC$, 又因为三角形内角和性质, 得出 $\angle DCE = \angle DAE = 90^\circ$, 根据 F 是 DE 的中点, 得 $CF = \frac{1}{2}DE = DF$, 即可作答.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle BAC = 90^\circ$, $DA \perp AE$,

$\therefore \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$,

则 $\angle BAC + \angle CAE = \angle DAE + \angle CAE$,

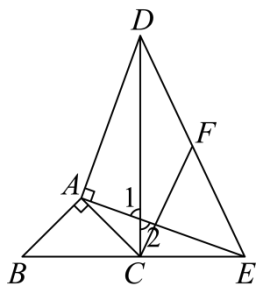
$\therefore \angle BAE = \angle CAD$,

$\because AB = AC$, $AD = AE$,

即 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ (SAS),

【小问 2 详解】

证明: 依题意, 如图所示:



由 (1) 得 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$,

$\therefore \angle AEB = \angle ADC$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$,

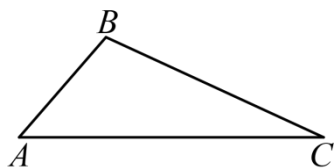
$\therefore 180^\circ - \angle 2 - \angle AEB = 180^\circ - \angle 1 - \angle ADC$,

即 $\angle DCE = \angle DAE = 90^\circ$,

$\because F$ 是 DE 的中点,

$\therefore CF = \frac{1}{2}DE = DF$.

24. 如图, 已知 $\triangle ABC$.



(1) 操作:

①在 $\angle A$ 内部找一点 P , 使点 P 到 $\angle A$ 两边所在直线的距离相等, 且 $PB = PC$;

②连接 PB 、 PC ;

(2) 猜想 $\angle PBA$ 与 $\angle PCA$ 之间满足怎样的数量关系, 并证明你的结论.

【答案】(1) ①见解析; ②见解析

(2) $\angle PBA + \angle PCA = 180^\circ$, 理由见解析

【解析】

【分析】本题考查了角平分线的性质定理, 垂直平分线的性质, 全等三角形的判定和性质.

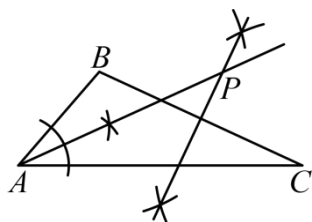
(1) ①作 $\angle A$ 的角平分线, 交 BC 的垂直平分线于点 P 即可;

②连接 PB 、 PC 即可;

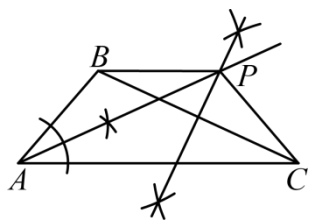
(2) 根据作图得到 $PE = PF$, $PB = PC$, 证明 $\triangle PBE \cong \triangle PCF$ (HL), 得到 $\angle PBE = \angle PCF$, 即可得到 $\angle PBA + \angle PCA = 180^\circ$.

【小问 1 详解】

解: ①如图, 点 P 即为所求;



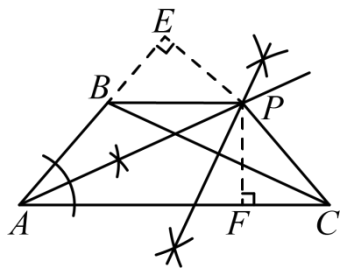
②如图, PB 、 PC 即为所求;



【小问 2 详解】

解: $\angle PBA + \angle PCA = 180^\circ$, 理由如下:

如图, 过点 P 作 $PE \perp AB$ 交 AB 延长线于 E , 作 $PF \perp AC$ 交 AC 于 F , 则 $\angle E = \angle PFC = 90^\circ$,



$\because AP$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore PE = PF$,

$\because$ 点 P 在 BC 的垂直平分线上,

$\therefore PB = PC$,

$\therefore \triangle PBE \cong \triangle PCF$ (HL),

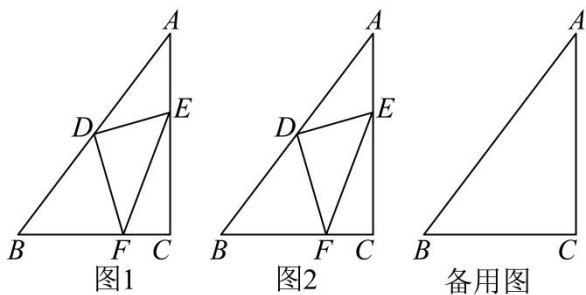
$\therefore \angle PBE = \angle PCF$,

$\because \angle PBA + \angle PBE = 180^\circ$,

$\therefore \angle PBA + \angle PCA = 180^\circ$.

25. 用基本图形的运动把分散信息集中起来, 是突破几何难题的一个好办法.

已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 4$, D 为 AB 的中点, 点 E 、 F 分别在射线 CA 、 BC 上, $\angle EDF = 90^\circ$.



(1) 当点 E 、 F 分别在边 CA 、 BC 上时,

①如图 1, 求证: $BF^2 + AE^2 = EF^2$;

②如图 2, $BF = x$, 请用 x 的代数式表示 AE ;

(2) 当 $AE = 1$ 时, 求 BF 的长.

【答案】 (1) ①见详解② $AE = \frac{25-6x}{8}$

(2) $\frac{17}{6}$ 或 $\frac{33}{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理, 全等三角形的判定与性质, 正确掌握相关性质内容是解题的关键.

(1) ①运用倍长中线法证明 $\triangle ADN \cong \triangle BDF$ (SAS), 再证明 $\triangle EDN \cong \triangle EDF$ (SAS), 得 $EN = EF$, 即 $EF^2 = BF^2 + AE^2$;

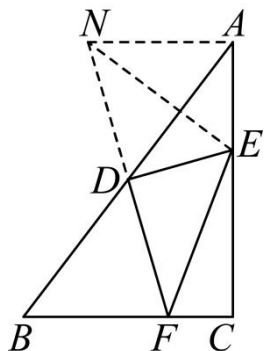
②运用勾股定理得出在 $\text{Rt}\triangle EFC$ 中, $EF^2 = CF^2 + CE^2$, $x^2 + AE^2 = 9 - 6x + x^2 + 16 - 8AE + AE^2$, 即

$$AE = \frac{25-6x}{8}.$$

(2) 理解题意，再进行分类讨论，逐个情况作图，运用倍长中线法和勾股定理，进行分析列式计算，即可作答.

【小问 1 详解】

解：①延长 FD 至点 N ，使得 $DN = DF$ ，连接 AN ， EN ，如图所示：



$\because D$ 为 AB 的中点,

$$\therefore AD = BD,$$

$$\because \angle ADN = \angle BDF, \quad DN = DF,$$

$$\therefore \triangle ADN \cong \triangle BDF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore BF = AN, \angle B = \angle NAD,$$

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NAD + \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NAC = 90^\circ,$$

$$\therefore NE^2 = NA^2 + AE^2 = BF^2 + AE^2,$$

$$\because \angle EDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NDE = 90^\circ,$$

$$\because DE = DE, \quad DN = DF,$$

$$\therefore \triangle EDN \cong \triangle EDF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore EN = EF,$$

$$\text{即 } EF^2 = BF^2 + AE^2;$$

$$\textcircled{2} \because BC = 3, \quad AC = 4,$$

$$\therefore CF = BC - BF = 3 - x, \quad CE = 4 - AE$$

$$\text{由}\textcircled{1}\text{得 } EF^2 = BF^2 + AE^2,$$

$$\because BF = x,$$

$$\therefore EF^2 = x^2 + AE^2,$$

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

则在 $\text{Rt}\triangle EFC$ 中, $EF^2 = CF^2 + CE^2$,

$$\therefore EF^2 = (3-x)^2 + (4-AE)^2,$$

$$\because EF^2 = x^2 + AE^2,$$

$$\therefore x^2 + AE^2 = (3-x)^2 + (4-AE)^2,$$

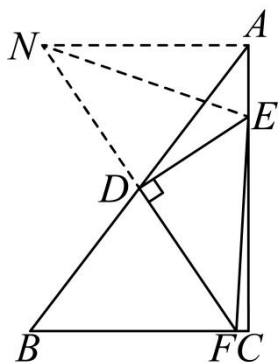
$$\therefore x^2 + AE^2 = 9 - 6x + x^2 + 16 - 8AE + AE^2,$$

整理得 $0 = 9 - 6x + 16 - 8AE$,

$$\text{即 } AE = \frac{25-6x}{8}.$$

【小问 2 详解】

解: 依题意, 当 E 在 AC 上时, 如图所示:



与 (1) ①同理, 证明 $\triangle ADN \cong \triangle BDF$ (SAS), $\triangle EDN \cong \triangle EDF$ (SAS), 得 $EF^2 = BF^2 + AE^2$

设 $BF = x$, 与 (1) 的②同理, 得 $AE = \frac{25-6x}{8}$,

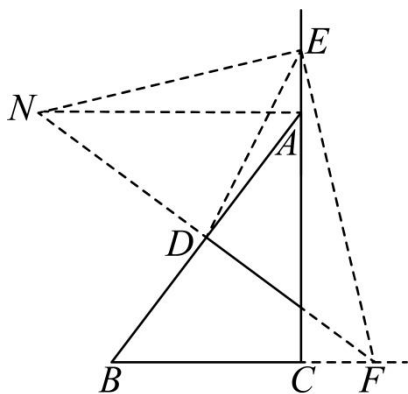
$$\because AE = 1,$$

$$\therefore 1 = \frac{25-6x}{8}$$

$$\text{解得 } x = \frac{17}{6},$$

$\because$ 点 E 、 F 分别在射线 CA 、 BC 上,

$\therefore$ 当点 E 在 CA 的延长线上, 如图所示:



与 (1) ①同理, 证明 $\triangle ADN \cong \triangle BDF$ (SAS), $\triangle EDN \cong \triangle EDF$ (SAS), 得 $NE^2 = AN^2 + AE^2$,

即 $EF^2 = BF^2 + AE^2$,

设 $BF = x$,

$$\therefore EF^2 = x^2 + 1^2,$$

$$\therefore CF = x - 3, \quad CE = AC + AE = 4 + 1 = 5,$$

在 $\text{Rt}\triangle ECF$ 中, $EF^2 = CE^2 + CF^2$,

$$\therefore EF^2 = 5^2 + (x - 3)^2,$$

$$\therefore x^2 + 1^2 = 5^2 + (x - 3)^2,$$

$$\therefore x^2 + 1^2 = 25 + x^2 - 6x + 9,$$

$$\text{整理得 } 1 = 25 - 6x + 9,$$

$$\text{解得 } x = \frac{33}{6}.$$

综上: 当 $AE = 1$ 时, 则 BF 的长为 $\frac{17}{6}$ 或 $\frac{33}{6}$.