

2025 学年第一学期期末质量调研卷八年级数学学科

(时间: 90 分钟 分值: 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分, 下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上)

1. 下列实数中, 无理数是 ()

A. $\sqrt{4}$

B. $\sqrt{3}$

C. $0.\dot{2}\dot{3}$

D. $\frac{22}{7}$

【答案】B

【解析】

【分析】无理数是无限不循环小数, 不能表示为两个整数之比.

本题考查了无理数的识别, 掌握基本概念是解题关键.

【详解】解: A. $\sqrt{4} = 2$, 为整数, 故不符合题意;

B. $\sqrt{3}$ 为无限不循环小数, 是无理数, 故符合题意;

C. $0.\dot{2}\dot{3}$ 表示为分数, 故不符合题意;

D. $\frac{22}{7}$ 是分数, 故不符合题意;

故选: B.

2. 如果在数轴上的点 A 到原点的距离是 $\sqrt{5}$, 那么表示点 A 的实数为 ()

A. $\sqrt{5}$

B. $-\sqrt{5}$

C. $\pm\sqrt{5}$

D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】根据数轴上点到原点的距离等于该点所表示实数的绝对值.

本题考查数轴上距离与绝对值的性质, 掌握基本概念是解题关键.

【详解】解: $\because$ 点 A 到原点的距离是 $\sqrt{5}$,

$$\therefore |A| = \sqrt{5},$$

$$\therefore A = \pm\sqrt{5}.$$

故选: C.

3. 下列根式中, 最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{0.2b}$

B. $\sqrt{12a}$

C. $\sqrt{x^2 - y^2}$

D. $\sqrt{5ab^2}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据最简二次根式的定义，被开方数中不含分母且每个因式的指数都小于2.

本题考查了最简二次根式，掌握基本概念是解题关键.

【详解】A. $\sqrt{0.2b}$ 被开方数含小数，等价于含分母，不是最简；

B. $\sqrt{12a} = 2\sqrt{3a}$ ，被开方数含平方因子4，不是最简；

C. $\sqrt{x^2 - y^2}$ 被开方数无分母且因式指数均为1，是最简；

D. $\sqrt{5ab^2} = |b|\sqrt{5a}$ ，被开方数含 b^2 指数为2，不是最简.

故选：C.

4. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 有两个相等的实数根，则实数 a 的值为（ ）

A. -4

B. -1

C. 1

D. 4

【答案】C

【解析】

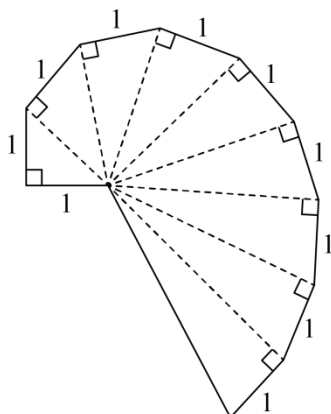
【分析】本题考查根的判别式，根据方程有两个相等的实数根，得到 $\Delta = 0$ ，进行求解即可.

【详解】解：由题意，得： $\Delta = 2^2 - 4a = 0$ ，

解得： $a = 1$ ；

故选C.

5. 如图，用9个直角三角形纸片拼成一个类似海螺的图形，其中每一个直角三角形都有一条直角边长为1. 记这个图形的周长（实线部分）为 l ，则下列整数与 l 最接近的是（ ）



A. 14

B. 13

C. 12

D. 11

【答案】B

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理，无理数的估算，掌握勾股定理的计算，无理数的估算方法是解题的关键.

根据勾股定理得到第九个直角三角形的斜边长, 得到该图形周长 $l = 10 + \sqrt{10}$, 根据无理数的估算即可求解.

【详解】 解: 每一个直角三角形都有一条直角边长为1, 如图所示,

$\therefore$ 左起第一个直角三角形的斜边长为 $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

第二个直角三角形的斜边长为 $\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$,

第三个直角三角形的斜边长为 $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$,

第四个直角三角形的斜边长为 $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,

,

$\therefore$ 第九个直角三角形的斜边长为 $\sqrt{10}$,

$\therefore$ 这个图形的周长 (实线部分) 为 $l = 1 \times 10 + \sqrt{10} = 10 + \sqrt{10}$,

$\because 9 < 10 < 10.89$, $3.3^2 = 10.89$,

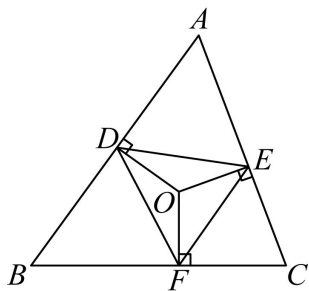
$\therefore \sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{10.89}$, 即 $3 < \sqrt{10} < 3.3$,

$\therefore 13 < 10 + \sqrt{10} < 13.3$,

$\therefore l$ 最接近的是 13,

故选: B.

6. 如图, 点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心, 过点 O 作 $OD \perp AB$ 、 $OE \perp AC$ 、 $OF \perp BC$, 垂足分别为点 D 、 E 、 F , 下列结论一定成立的是 ()



- A. 点 O 是 $\triangle DEF$ 三条高的交点
- B. 点 O 是 $\triangle DEF$ 三条中线的交点
- C. 点 O 是 $\triangle DEF$ 三条角平分线的交点
- D. 点 O 是 $\triangle DEF$ 三边垂直平分线的交点

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题主要考查三角形的内心和垂直平分线的性质，掌握三角形的内心是解题的关键.

首先根据点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心知道点 O 是三条角平分线的交点，进而得到 $OD = OE = OF$ ，再根据 $OD = OE$ ， $OD = OF$ 得到点 O 在 DE 和 DF 的垂直平分线上，即可推断点 O 是 $\triangle DEF$ 三边垂直平分线的交点.

【详解】 解： $\because$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心， $OD \perp AB$ 、 $OE \perp AC$ 、 $OF \perp BC$ ，

$\therefore OD = OE = OF$ ，

$\therefore OD = OE$ ，

$\therefore$ 点 O 在 DE 的垂直平分线上，

$\therefore OD = OF$ ，

$\therefore$ 点 O 在 DF 的垂直平分线上，

$\therefore$ 点 O 是 $\triangle DEF$ 三边垂直平分线的交点，

故选：D.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 3 分，满分 36 分，请将结果直接填入答题纸的相应位置上)

7. 若二次根式 $\sqrt{2x-4}$ 有意义，则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq 2$

【解析】

【分析】 二次根式有意义，被开方数为非负数，列不等式求解.

【详解】 解： 根据二次根式的意义，得 $2x - 4 \geq 0$ ，

解得 $x \geq 2$.

故答案为： $x \geq 2$.

【点睛】 本题考查二次根式有意义的条件.

8. 计算： $\sqrt{12} \times \sqrt{\frac{1}{3}} =$ _____.

【答案】

2

【解析】

【分析】 利用平方根的乘法性质，将两个平方根合并为一个平方根，再计算根号内的表达式.

本题考查了二次根式的运算，熟练掌握二次根式乘法法则是解决关键.

【详解】 解： 根据平方根的性质， $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ ，

所以 $\sqrt{12} \times \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{12 \times \frac{1}{3}},$

计算 $12 \times \frac{1}{3} = 4,$

因此 $\sqrt{4} = 2.$

故答案为: 2.

9. 化简: $\sqrt{12a^3} =$ _____

【答案】 $2a\sqrt{3a}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质化简即得答案.

【详解】 解: $\sqrt{12a^3} = 2a\sqrt{3a},$

故答案为 $2a\sqrt{3a}.$

【点睛】 本题考查了二次根式的性质和化简, 属于常考题型, 掌握化简的方法是关键.

10. 方程 $x^2 = 2x$ 的根为_____

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = 2$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程, 熟练掌握直接开平方法, 因式分解法, 配方法和公式法是解题的关键.

利用因式分解法求解即可.

【详解】 解: $x^2 = 2x$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } x - 2 = 0,$$

$$\therefore x_1 = 0, x_2 = 2,$$

故答案为: $x_1 = 0, x_2 = 2.$

11. 在实数范围内因式分解: $x^2 - 4x - 2 =$ _____.

【答案】 $(x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6})$

【解析】

【分析】 此题考查了实数范围内因式分解，首先配成完全平方公式，然后利用平方差公式进行因式分解即可，配成完全平方公式及熟练掌握因式分解的方法是解题的关键.

【详解】 解： $x^2 - 4x - 2 = x^2 - 4x + 4 - 4 - 2$,

$$= (x-2)^2 - (\sqrt{6})^2,$$

$$= (x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6}),$$

故答案为： $(x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6})$.

12. 将方程 $\frac{x}{x^2+4x+3} - \frac{2}{x+3} = 1$ 去分母后，所得的整式方程的一般式是_____.

【答案】 $x^2 + 5x + 5 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程，首先将分母因式分解，然后确定最小公倍数，两边同乘去分母，再展开和整理得到整式方程的一般式.

【详解】 解： $\frac{x}{x^2+4x+3} - \frac{2}{x+3} = 1$,

方程可化为 $\frac{x}{(x+1)(x+3)} - \frac{2}{x+3} = 1$,

去分母，得 $x-2(x+1) = (x+1)(x+3)$,

整理，得 $x^2 + 5x + 5 = 0$,

故答案为： $x^2 + 5x + 5 = 0$.

13. 一件商品原价 300 元，连续两次降价后，现售价是 243 元，设平均每次降价的百分率为 x ，根据题意，可列方程为_____.

【答案】 $300(1-x)^2 = 243$

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程的实际应用，写出连续两次降价后的方程是解题的关键.

首先根据现售价与原价的关系为 $\text{原价} \times (1 - \text{降价率})^2 = \text{现售价}$ ，列出方程即可.

【详解】 解： 设平均每次降价的百分率为 x ,

则第一次降价后价格为 $300(1-x)$ 元, 第二次降价后价格为 $300(1-x)^2$ 元,

根据题意, 得 $300(1-x)^2 = 243$,

故答案为: $300(1-x)^2 = 243$.

14. 设 x_1 、 x_2 是方程 $2x^2 - 6x + 1 = 0$ 的两根, 则 $x_1 + x_2 =$ _____.

【答案】

3

【解析】

【分析】根据一元二次方程根与系数的关系, 两根之和等于 $-\frac{b}{a}$, 直接代入系数计算即可.

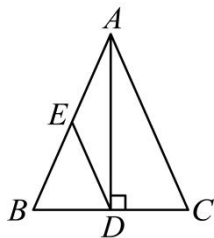
本题考查了一元二次方程的解、根与系数的关系, 掌握基本概念是解题关键.

【详解】解: 方程 $2x^2 - 6x + 1 = 0$ 中, $a = 2$, $b = -6$,

则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

故答案为: 3.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $AD \perp BC$ 于点 D , 点 E 为 AB 的中点, 连接 DE . 已知 $BC = 10$, $AD = 12$, 那么 $DE =$ _____.



【答案】 $\frac{13}{2}$

【解析】

【分析】本题主要考查等腰三角形“三线合一”、直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半是解题的关键.

首先根据等腰三角形“三线合一”求解 AB 的长度, 再利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半求解 DE 即可.

【详解】解: $\because AB = AC$, $AD \perp BC$ 于点 D ,

$\therefore BD = \frac{1}{2}BC = 5$,

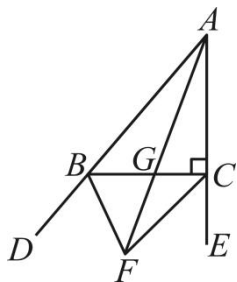
在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中, $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 13$,

∵ 点 E 为 AB 的中点,

$$\therefore DE = \frac{1}{2} AB = \frac{13}{2},$$

故答案为: $\frac{13}{2}$.

16. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle DBC$ 与 $\angle ECB$ 是 $\triangle ABC$ 的两个外角, BF 平分 $\angle DBC$, 交 $\angle ECB$ 的平分线于点 F , 连接 AF , 交 BC 于点 G . 若 $\angle ABC = 50^\circ$, 则 $\angle AGC = \underline{\quad\quad}^\circ$.



【答案】 70

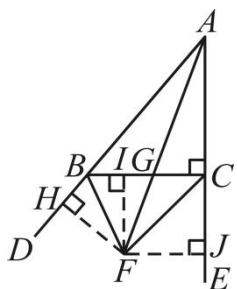
【解析】

【分析】 本题主要考查三角形的内角和定理、角平分线的性质和判定, 证明 AF 平分 $\angle BAC$ 是解题的关键. 首先在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中根据三角形的内角和定理求出 $\angle BAC$ 的度数, 再构造角平分线向角两边的垂线进而得到 $FH = FJ$ 即可证明 AF 平分 $\angle BAC$, 因此可以求出 $\angle GAC$ 的度数, 最后在 $\text{Rt}\triangle GAC$ 中根据三角形的内角和定理求出 $\angle AGC$ 的度数即可.

【详解】 解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 50^\circ$,

$$\therefore \angle BAC = 40^\circ,$$

如图, 作 $FH \perp AD$ 于点 H , 作 $FI \perp BC$ 于点 I , 作 $FJ \perp AE$ 于点 J ,



∵ BF 平分 $\angle DBC$, 交 $\angle ECB$ 的平分线于点 F ,

$$\therefore FH = FI, \quad FJ = FI,$$

$$\therefore FH = FJ,$$

∴ AF 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle GAC = \frac{1}{2} \angle BAC = 20^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle GAC$ 中, $\angle GCA = 90^\circ$, $\angle GAC = 20^\circ$,

$$\therefore \angle AGC = 70^\circ,$$

故答案为：70.

17. 《九章算术》中提出了如下问题：今有户不知高、广，竿不知长短，横之不出四尺，从之不出二尺，邪之适出，问户高、广、邪各几何？这段话的意思是：今有门不知其高宽：有竿，不知其长短，横放，竿比门宽长出4尺：竖放，竿比门高长出2尺：斜放，竿与门对角线恰好相等．问门高、宽和对角线的长各是多少？则该问题中的门高是_____尺．

【答案】8

【解析】

【分析】设门高 x 尺，则竿长为 $(x+2)$ 尺，门的对角线长为 $(x+2)$ 尺，门宽为 $(x-2)$ 尺，根据勾股定理即可求解．

【详解】解：设门高 x 尺，依题意，竿长为 $(x+2)$ 尺，门的对角线长为 $(x+2)$ 尺，门宽为 $x+2-4=(x-2)$ 尺，

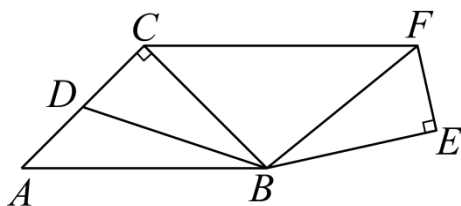
$$\therefore (x+2)^2 = x^2 + (x-2)^2,$$

解得： $x=8$ 或 $x=0$ （舍去），

故答案为：8．

【点睛】本题考查了勾股定理，根据题意建立方程是解题的关键．

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 2\sqrt{2}$ ，点 D 是 AC 的中点，连接 BD ，将 $\triangle BCD$ 绕点 B 旋转，得到 $\triangle BEF$ ．连接 CF ，当 $CF \parallel AB$ 时， $CF = \underline{\hspace{2cm}}$ ．



【答案】 $2 + \sqrt{6}$ 或 $\sqrt{6} - 2$

【解析】

【分析】本题主要考查等腰直角三角形的性质，勾股定理，平行线的性质，全等三角形的性质的综合，掌握等腰直角三角形的性质，勾股定理，旋转的性质是解题的关键．

根据等腰直角三角形的性质可得 AB ， CD ， BD ， BF 的值，作 $BG \perp CF$ ，根据平行线的性质可得 $\triangle BCG$ 是等腰直角三角形，可求出 CG ， BG 的长，在直角 $\triangle BFG$ 中，根据勾股定理可求出 FG 的长度，由此即可求解．

【详解】解：∵在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 2\sqrt{2}$ ，

$$\therefore \angle CAB = \angle CBA = 45^\circ, \quad AB = \sqrt{2}AC = 4,$$

∵点 D 是 AC 的中点，

$$\therefore AD = CD = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BCD \text{ 中}, \quad BD = \sqrt{CD^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{10},$$

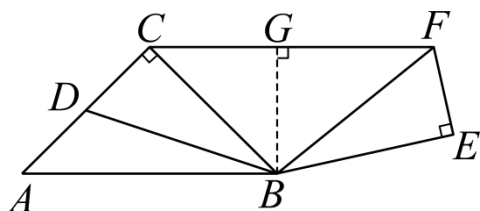
∵将 $\triangle BCD$ 绕点 B 旋转得到 $\triangle BEF$ ，

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle BEF,$$

$$\therefore BD = BF = \sqrt{10}, \quad EF = CD = \sqrt{2}, \quad BC = BE = 2\sqrt{2},$$

分情况讨论：

①如图所示，过点 B 作 $BG \perp CF$ ，垂足为点 G ，



$$\therefore CF \parallel AB,$$

$$\therefore \angle FCB = \angle CBA = 45^\circ,$$

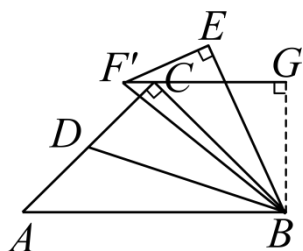
$$\therefore \triangle BCG \text{ 是等腰直角三角形, 且 } BC = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore CG = BG = \frac{\sqrt{2}}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\sqrt{2} = 2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BFG \text{ 中}, \quad FG = \sqrt{BF^2 - BG^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 2^2} = \sqrt{6},$$

$$\therefore CF = CG + FG = 2 + \sqrt{6},$$

②如图所示，当点 D 运动到点 F 时，此时 $CF' \parallel AB$ ，



$$\text{同理可得, } GF' = \sqrt{6}, CG = 2,$$

$$\therefore CF' = \sqrt{6} - 2$$

故答案为: $2 + \sqrt{6}$ 或 $\sqrt{6} - 2$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 46 分)

19. 计算: $\frac{4}{\sqrt{5}+1} - \sqrt{20} + |2 - \sqrt{5}| + \sqrt[3]{8}$.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算, 立方根, 先进行分母有理化, 化简二次根式和绝对值, 计算立方根, 最后算加减法即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \frac{4}{\sqrt{5}+1} - \sqrt{20} + |2 - \sqrt{5}| + \sqrt[3]{8} \\ &= \frac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} - 2\sqrt{5} + \sqrt{5} - 2 + 2 \\ &= \sqrt{5} - 1 - 2\sqrt{5} + \sqrt{5} - 2 + 2 \\ &= -1. \end{aligned}$$

20. 解方程: $2x^2 + 6x - 1 = 0$.

【答案】 $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{11}}{2}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{11}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程-公式法, 正确计算是解题的关键. 用公式法解一元二次方程.

【详解】 解: $2x^2 + 6x - 1 = 0$,

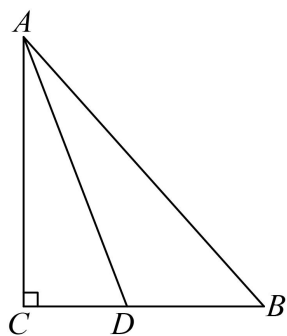
$$\therefore a = 2, b = 6, c = -1,$$

$$\therefore b^2 - 4ac = 36 + 8 = 44 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{-6 \pm \sqrt{44}}{2 \times 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{-3 + \sqrt{11}}{2}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{11}}{2}.$$

21. 如图, 在直角三角形 ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 在边 BC 上, 且 AD 平分 $\angle BAC$. 求证: $BD > CD$.



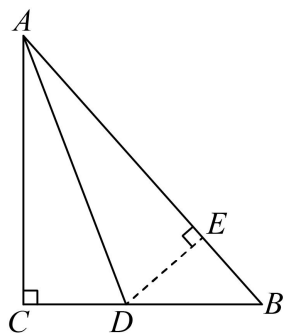
【答案】证明见详解

【解析】

【分析】本题主要考查角平分线的性质、三角形中三边的关系，利用三角形中三边的关系判断边长的关系是解题的关键。

首先根据 AD 平分 $\angle BAC$ 结合角平分线的性质得到 $CD = DE$ ，再在 $\triangle DEB$ 中， DB 是斜边， DE 是直角边，判断 BD ， CD 的长度关系即可。

【详解】解：如图，作 $DE \perp AB$ 于点 E ，



$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$ ，

$\therefore CD = DE$ ，

在 $\triangle DEB$ 中， $\angle DEB = 90^\circ$ ，

$\therefore DB$ 是斜边， DE 是直角边，

$\therefore DB > DE$ ，

$\therefore BD > CD$ 。

22. 在“理财小课堂”中，小明了解到某理财产品按年计息，有单利和复利两种不同的计息方式：

单利法是指每年依据最初本金计算利息，不考虑前期利息所产生的利息；

复利法是指每年依据本金和前期利息之和计算利息。

小明准备将 10000 元购买该理财产品，银行提供如下两种方案（年利率相同）：

方案一：按单利法存 2 年；

方案二：按复利法存 2 年.

两年后，方案二得到的本利和比方案一多 100 元，请计算年利率.

【答案】 10%

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键. 设年利率为 x ，根据“两年后，方案二得到的本利和比方案一多 100 元”，可列出关于 x 的一元二次方程，解之取其符合题意的值，即可得出结论.

【详解】 解：设年利率为 x ，

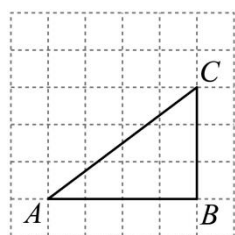
根据题意得： $10000(1+x)^2 - 10000(1+2x) = 100$ ，

整理得： $100x^2 = 1$ ，

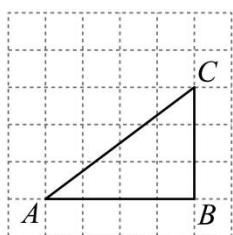
解得： $x_1 = 0.1 = 10\%$ ， $x_2 = -0.1$ （不符合题意，舍去）.

答：年利率为 10%.

23. 如图，在边长均为 1 的正方形网格中， ABC 的顶点均在格点上.（在图中不能再另外补充网格）



图①



图②

(1) $AB =$ _____；（直接写出结果）

(2) 请只用无刻度的直尺，利用格点在图①中作出 $\angle ABC$ 的平分线 BQ ，并标注字母，进行证明；

(3) 请只用无刻度的直尺，在图②中利用格点，用不同于 (2) 的方法作出 $\angle ABC$ 的平分线 BQ ，并简单说明理由.（作出必要线段、标注字母辅助说理，保留作图痕迹，不要求证明）

【答案】 (1) 4； (2) 见详解；

(3) 见详解；

【解析】

【分析】 本题考查在网格中只用无刻度的直尺作角平分线，角平分线的性质；

(1) 观察图形即可解答；

(2) 过点 B 连接小正方形对角线即可解答；

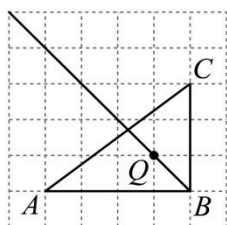
(3) 根据角平分线的性质即可解答.

【小问 1 详解】

解：由图可知小正方形的边长均为 1， AB 占 4 个边长则 $AB = 4$ ；

【小问 2 详解】

解：如图 BQ 即为所求，



图①

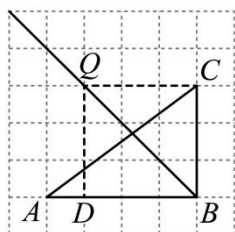
由图可知 $\angle ABC = 90^\circ$ ，且点 B 在格点上，

$\therefore$ 正方形对角线平分两个对角，

$\therefore$ 连接小正方形的对角线 BQ ，即为 $\angle ABC$ 的平分线；

【小问 3 详解】

解：如图，



图②

过点 C 作 $CQ \perp BC$ 于点 Q ，且 $CQ = 3$ ，再过点 Q 作 $DQ \perp AD$ 于点 D ，且 $DQ = 3$ ，

$\therefore CQ \perp BC$ ， $DQ \perp AD$ 且 $CQ = DQ$ ，

$\therefore BQ$ 是 $\angle ABC$ 的平分线。

24. 勾股定理是人类最伟大的十个科学发现之一，西方国家称之为毕达哥拉斯定理。

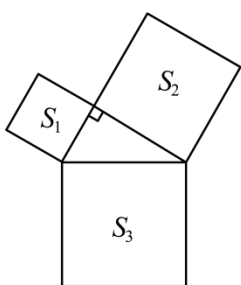


图1

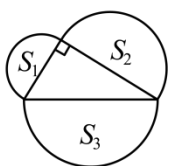


图2

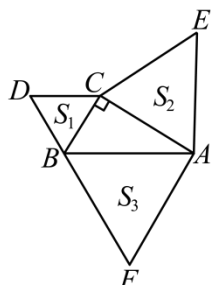


图3

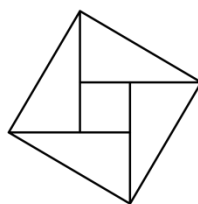


图4

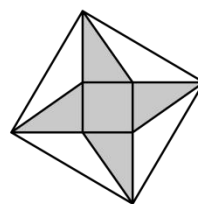


图5

(1) 如图 1、2、3，以直角三角形的三边为边或直径，分别向外部作正方形、半圆、等边三角形，这三个图形中面积关系满足 $S_1 + S_2 = S_3$ 的有_____个；

(2) 如图 3，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，分别以 BC 、 AC 、 AB 为边向外作等边三角形 $\triangle BCD$ 、 $\triangle ACE$ 、 $\triangle ABF$ 。记 $\triangle BCD$ 的边长为 a 、面积为 S_1 ， $\triangle ACE$ 的边长为 b 、面积为 S_2 ， $\triangle ABF$ 的边长为 c 、面积为 S_3 。请证明图 3 中 S_1 、 S_2 、 S_3 之间的数量关系；

(3) 如图 4，四个全等的直角三角形围成一个大正方形，中间是个小正方形，这个图形是我国汉代赵爽在注解《周髀算经》时给出的，人们称它为“赵爽弦图”。在此图形中连接四条线段得到如图 5 的图案，记阴影部分的面积为 S_1 ，空白部分的面积为 S_2 ，大正方形的边长为 m ，小正方形的边长为 n ，若 $S_1 = S_2$ ，请直接写出 $\frac{n}{m} =$ _____。

【答案】(1) 3 (2) $S_1 + S_2 = S_3$ ，证明见详解

(3) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

【解析】

【分析】本题主要考查勾股定理的证明、一元二次方程与几何图形，理解题意求得 S_1 、 S_2 是解题的关键。

(1) 根据题意设直角三角形的短直角边为 a ，长直角边为 b ，斜边为 c ，分别表示出正方形、半圆、等边三角形的面积，结合勾股定理得出的 $a^2 + b^2 = c^2$ ，判断 $S_1 + S_2 = S_3$ 正误即可；

(2) 根据 (1) 的过程即可证明等边三角形 S_1 、 S_2 、 S_3 之间的数量关系；

(3) 根据题意设出 $AC = m$ ， $BD = n$ ， $AB = CD = a$ ，将阴影部分的面积和空白面积利用 m ， n ， a 表示出来得到一个一元二次方程，再根据 $S_1 + S_2 = m^2$ 推断出 m 与 a 之间的关系，得到 $\frac{2n}{m} + 2\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 1$ 进而将 $\frac{n}{m}$ 看为一个整体进行求解即可。

【小问 1 详解】

解：设直角三角形的短直角边为 a ，长直角边为 b ，斜边为 c ，

在图 1 中， $S_1 = a^2$ ， $S_2 = b^2$ ， $S_3 = c^2$ ，

$\because$ 直角三角形中， $a^2 + b^2 = c^2$ ，

$\therefore S_1 + S_2 = S_3$ ；

$$\text{在图 2 中, } S_1 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \pi = \frac{1}{4}\pi a^2, \quad S_2 = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 \pi = \frac{1}{4}\pi b^2, \quad S_3 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 \pi = \frac{1}{4}\pi c^2,$$

$$\because \text{直角三角形中, } a^2 + b^2 = c^2,$$

$$\therefore S_1 + S_2 = S_3;$$

$$\text{在图 3 中, } S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2, \quad S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2, \quad S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2,$$

$$\because \text{直角三角形中, } a^2 + b^2 = c^2,$$

$$\therefore S_1 + S_2 = S_3;$$

$$\therefore \text{满足 } S_1 + S_2 = S_3 \text{ 的有 3 个,}$$

故答案为: 3;

【小问 2 详解】

证明: $\because \triangle BCD$ 的边长为 a 、面积为 S_1 ,

$$\therefore S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

$\because \triangle ACE$ 的边长为 b 、面积为 S_2 ,

$$\therefore S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2,$$

$\because \triangle ABF$ 的边长为 c 、面积为 S_3 ,

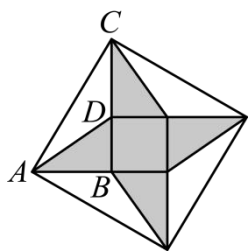
$$\therefore S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $a^2 + b^2 = c^2$,

$$\therefore S_1 + S_2 = S_3;$$

【小问 3 详解】

解: 如图, 由题意得: $AC = m$, $BD = n$, $\triangle ABC$ 是直角三角形, $AB = CD$, 且 m , n 为正数,



$\therefore$ 大正方形的面积为 $AC^2 = m^2$ ，小正方形的面积为 $BD^2 = n^2$ ，

设 $AB = CD = a$ ，

$$\therefore S_1 = 4S_{\triangle ABD} + n^2 = 4 \times \frac{1}{2} AB \cdot BD + n^2 = 2an + n^2,$$

$$S_2 = 4S_{\triangle ACD} = 4 \times \frac{1}{2} CD \cdot AB = 2a^2,$$

$$\therefore S_1 = S_2,$$

$$\therefore 2an + n^2 = 2a^2,$$

$$\therefore S_1 + S_2 = m^2,$$

$$\therefore 2S_2 = m^2, \text{ 即 } 4a^2 = m^2, \text{ 解得: } a = \frac{m}{2} \text{ (负值已舍去),}$$

$$\text{将 } a = \frac{m}{2} \text{ 代入 } 2an + n^2 = a^2, \text{ 得: } mn + n^2 = \frac{m^2}{2},$$

$$\therefore \frac{2n}{m} + 2\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 1,$$

$$\text{令 } \frac{n}{m} = x, \text{ 则 } 2x + 2x^2 = 1,$$

$$\text{解得: } x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \text{ (负值已舍去),}$$

$$\therefore \frac{n}{m} = \frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

25. 综合与实践

数学小组在学习完“直角三角形”这一单元后，进行了研究.

发现:

(1) 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中, $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$, $AB = AC$, $AD = AE$, 点 D 在线段 AC 上, 连接 BD 、 CE 、则 BD 和 CE 的数量关系是_____, BD 和 CE 的位置关系是_____.

深入研究:

(2) 如图 2 和图 3, 将 $\triangle ADE$ 绕点 A 旋转 (旋转角 $0^\circ < \alpha < 360^\circ$), 其他条件与 (1) 相同, (1) 中的结

论是否成立？若成立，请选择一种情况证明；若不成立，请说明理由。

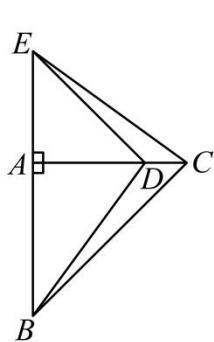


图1

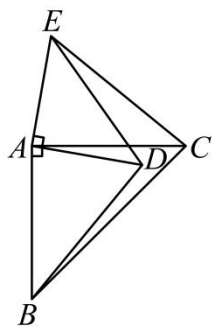


图2

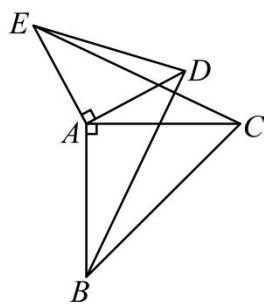


图3

拓展延伸：

(3) 如图4，若图2中的点D落在线段BC上，其他条件不变，则此时线段BD、DC、AD的数量关系是_____。

(4) 如图5， $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $\angle BAC = 90^\circ$ ，点D为 $\triangle ABC$ 外一点，且 $\angle ADC = 45^\circ$ ，连接BD。若 $BD = 9$ ， $CD = 3$ ，则AD的长为_____。

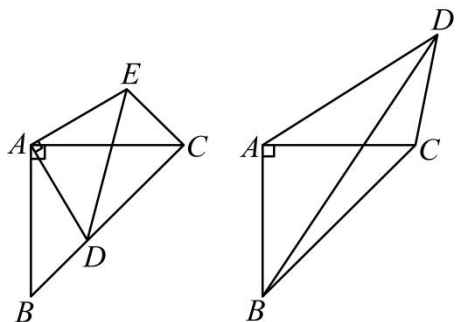


图4

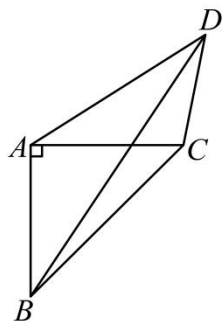


图5

【答案】(1) $BD = CE$ ， $BD \perp CE$ ；(2) 结论 $BD = CE$ ， $BD \perp CE$ 仍然成立。理由见详解；(3)

$CD^2 + BD^2 = 2AD^2$ ；(4) 6

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS) 可得数量关系，证 $\angle ABD + \angle AEC = 90^\circ$ 可得位置关系；

(2) 先证明 $\angle BAD = \angle CAE$ ，结合 $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，证明 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS) 可得数量关系，证 $\angle ACE + \angle CBF + \angle ACB = 90^\circ$ 可得位置关系；

(3) 先证明 $\angle BAD = \angle CAE$ ，结合 $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，证明 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS) 可得 $BD = CE$ ， $\angle ABD = \angle ACE = 45^\circ$ ，则 $\angle DCE = 90^\circ$ ，再结合勾股定理可得结论；

(4) 作等腰直角三角形 ADE ， $AD = AE$ ， $\angle DAE = 90^\circ$ ，连接 CE ，则 $\angle ADE = 45^\circ$ ， $\angle ADC = 45^\circ$ ，

$\angle CDE = 90^\circ$ ，同理可得 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS)， $BD = CE = 9$ ，则 $DE^2 = 9^2 - 3^2 = 72$ ，结合

$AD^2 + AE^2 = 2AD^2 = DE^2$ 即可解答.

【详解】(1) 解：延长 BD 交 CE 于 F ，如图 1，

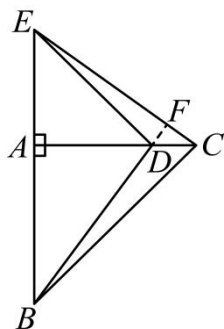


图1

$\therefore \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS)，

$\therefore BD = CE$ ， $\angle ABD = \angle ACE$ ，

$\therefore \angle ACE + \angle AEC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABD + \angle AEC = 90^\circ$

$\therefore BD \perp CE$ ，

$\therefore BD$ 和 CE 的数量关系是 $BD = CE$ ，位置关系是 $BD \perp CE$ ；

(2) 解：结论 $BD = CE$ ， $BD \perp CE$ 仍然成立. 理由如下：

延长 BD 交 CE 于 F ，如图 2，

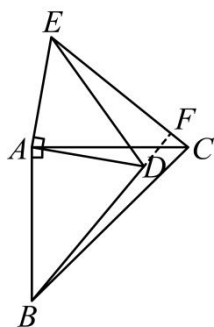


图2

$\therefore \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAD = 90^\circ - \angle CAD$ ， $\angle CAE = 90^\circ - \angle CAD$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle CAE$

$\therefore AB = AC$ ， $AD = AE$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE \text{ (SAS)}, \\
&\therefore BD = CE, \quad \angle ABD = \angle ACE, \\
&\therefore \angle ACE + \angle CBF = \angle ABD + \angle CBF = \angle ABC, \\
&\because \angle BAC = 90^\circ, \quad AB = AC, \\
&\therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ \\
&\therefore \angle ACE + \angle CBF + \angle ACB = \angle ABC + \angle ACB = 90^\circ, \\
&\therefore BD \perp CE;
\end{aligned}$$

如图 3,

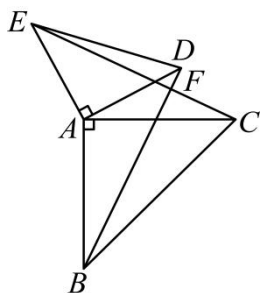


图3

$$\begin{aligned}
&\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ, \\
&\therefore \angle BAD = 90^\circ + \angle CAD, \quad \angle CAE = 90^\circ + \angle CAD, \\
&\therefore \angle BAD = \angle CAE \\
&\because AB = AC, \quad AD = AE, \\
&\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE \text{ (SAS)},
\end{aligned}$$

同理可证 $BD \perp CE$;

(3) 解: 如图 4,

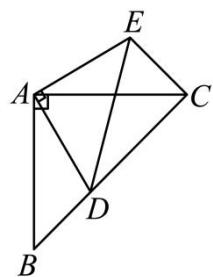


图4

$$\begin{aligned}
&\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ, \\
&\therefore \angle BAD = 90^\circ - \angle CAD, \quad \angle CAE = 90^\circ - \angle CAD, \\
&\therefore \angle BAD = \angle CAE
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\because AB = AC, \quad AD = AE, \\
&\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE \text{ (SAS)}, \\
&\therefore BD = CE, \quad \angle B = \angle ACB = \angle ACE = 45^\circ, \\
&\therefore \angle DCE = 90^\circ, \\
&\therefore DE^2 = CD^2 + CE^2 = CD^2 + BD^2, \\
&\because \angle DAE = 90^\circ, \quad AD = AE, \\
&\therefore DE^2 = AD^2 + AE^2 = 2AD^2, \\
&\therefore CD^2 + BD^2 = 2AD^2;
\end{aligned}$$

(4) 解：如图 5，作等腰直角三角形 ADE ， $AD = AE$ ， $\angle DAE = 90^\circ$ ，连接 CE ，则 $\angle ADE = 45^\circ$ ， $\angle ADC = 45^\circ$ ， $\angle CDE = 90^\circ$ ，

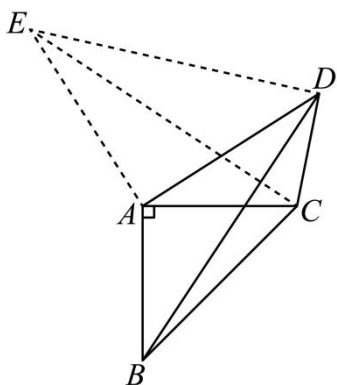


图5

同理可得： $\triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS)，

$$\begin{aligned}
&\therefore BD = CE = 9, \\
&\because CD = 3, \\
&\therefore DE^2 = 9^2 - 3^2 = 72, \\
&\because AD^2 + AE^2 = 2AD^2 = DE^2, \\
&\therefore 2AD^2 = 72, \\
&\therefore AD = 6.
\end{aligned}$$

【点睛】 本题考查的是全等三角形的判定与性质，等腰直角三角形的性质，勾股定理的应用，旋转的性质，熟练的利用数形结合的方法进行证明是解本题的关键。