

2025-2026 学年上海科技大学附属学校八年级（上）期末数学试卷

一、选择题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

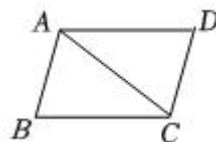
1. 下列函数中，不是反比例函数的是()

- A. $y = \frac{6}{x}$ B. $y = 5x^{-1}$ C. $y = -\frac{x}{9}$ D. $y = -\frac{1}{7x}$

2. 对于一次函数 $y = 3x - 2$ ，下列说法错误的是()

- A. y 随 x 的增大而增大
B. 图象经过第二、三、四象限
C. 图象与正比例函数 $y = 3x$ 的图象平行
D. 点 $M(-2, y_1)$ ， $N(1, y_2)$ 都在直线 $y = 3x - 2$ 上，则 $y_1 < y_2$

3. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ，添加一个条件，能使四边形 $ABCD$ 成为平行四边形的是()



- A. $AD = BC$
B. $\angle BAC = \angle ACD$
C. $AB = AD$
D. $\angle B = \angle D$

4. 二次函数 $y = x^2 - 4x - 2$ 的顶点坐标为()

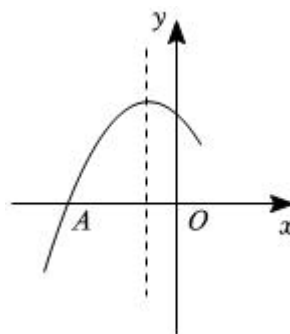
- A. $(2, -6)$ B. $(2, -2)$ C. $(-2, -4)$ D. $(-2, -6)$

5. 已知四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AC = BD$ ，下列判断中正确的是()

- A. 如果 $BC = AD$ ，那么四边形 $ABCD$ 是等腰梯形
B. 如果 $AD \parallel BC$ ，那么四边形 $ABCD$ 是菱形
C. 如果 AC 平分 BD ，那么四边形 $ABCD$ 是矩形
D. 如果 $AC \perp BD$ ，那么四边形 $ABCD$ 是正方形

6. 如图是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象的一部分，图象过点 $A(-3, 0)$ ，对称轴为直线 $x = -1$ ，给出四个结论：① $abc < 0$ ；② $2a - b = 0$ ；③ $a + b + c = 0$ ；

④若点 $B(-\frac{5}{2}, y_1)$ ， $C(-\frac{1}{2}, y_2)$ 为函数图象上的两点，则 $y_1 < y_2$ 。其中正确结论的个数是()



- A. 4 个
B. 3 个

C. 2 个

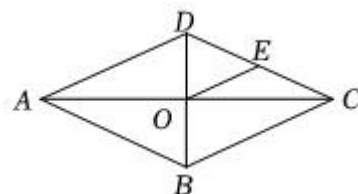
D. 1 个

二、填空题：本题共 12 小题，每小题 4 分，共 48 分。

7. 一条直线经过原点，且与直线 $y = -3x + 1$ 平行，则这条直线的解析式为_____.

8. 如图，菱形的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， E 是 CD 的中点，且 $OE = 3$ ，

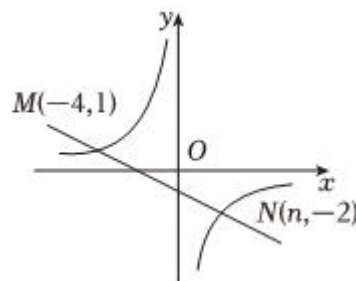
则 CD 的长是_____.



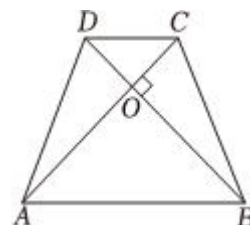
9. 若二次函数 $y = x^2 - 2x + n$ 的图象与 y 轴的交点坐标为 $(0, -3)$ ，则该函数图象与 x 轴的交点坐标为_____.

10. 如图，一次函数 $y = ax + b$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象交于 M 、 N

两点，观察图象知，不等式 $ax + b < \frac{k}{x}$ 的解集为_____.



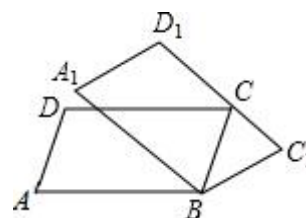
11. 如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AD = BC$ ， $AC \perp BD$ ， AC 与 BD 交于点 O ， $CD = 3$ ， $AB = 5$ ，则此梯形的面积为_____.



12. $A(-1, a)$ ， $B(1, b)$ ， $C(4, c)$ 三点都在二次函数 $y = (x - 2)^2 + k$ 的图象上，则 a ， b ， c 的大小关系为_____.(用 “ $<$ ” 连接)

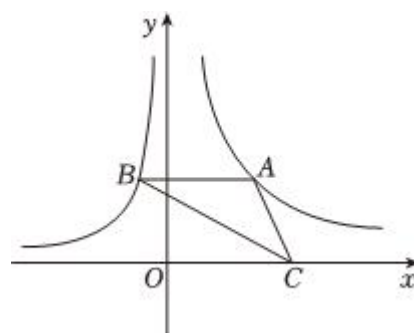
13. 如图，在 $\square ABCD$ 中， $\angle A = 70^\circ$ ，将 $\square ABCD$ 绕顶点 B 顺时针旋转到

$\square A_1BC_1D_1$ ，当 C_1D_1 首次经过顶点 C 时，旋转角 $\angle ABA_1 =$ _____.



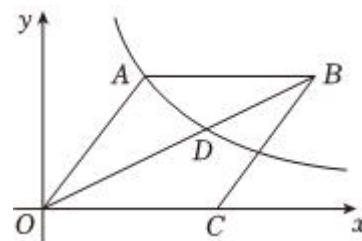
14. 如图，点 A ， B 分别在反比例函数 $y_1 = \frac{12}{x}$ ($x > 0$)， $y_2 = -\frac{4}{x}$ ($x < 0$)

的图象上，且 $AB \parallel x$ 轴，点 C 在 x 轴的正半轴上，连接 AC ， BC ，则

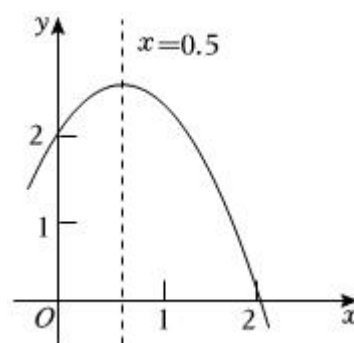


$\triangle ABC$ 的面积为____ .

- 15.如图, 已知菱形 $OABC$, 顶点 C 在 x 轴上, 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象经过顶点 $A(3,4)$, OB 与反比例函数的图象交于点 D . 点 D 的坐标是____ .

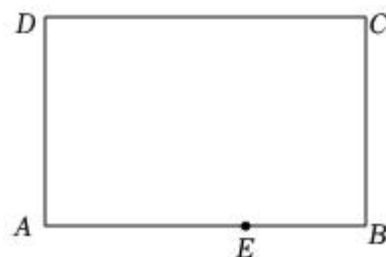


- 16.二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象过点 $(0,2)$, 其部分图象如图所示, 则关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 2$ 的根是____ .



- 17.平面直角坐标系中, 在 x 轴上, 且到一条抛物线的顶点及该抛物线与 y 轴的交点的距离之和最小的点, 称为这条抛物线与 x 轴的“亲密点”. 那么抛物线 $y = 2x^2 + 4x + 5$ 与 x 轴的“亲密点”的坐标是____ .

- 18.如图是一张长方形纸片 $ABCD$, 已知 $AB = 9$, $AD = 7$, E 为 AB 上一点, $AE = 6$, 现要剪下一张以 AE 为一边的等腰三角形纸片 ($\triangle AEP$) 且使点 P 落在长方形 $ABCD$ 的某一条边上, 则等腰三角形 AEP 的底边长是____ .



三、解答题: 本题共 7 小题, 共 78 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

19.(本小题 11 分)

已知反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象与正比例函数 $y = 3x (x \geq 0)$ 的图象交于点 $A(2,a)$, 点 B 是线段 OA 上(不与点 A 重合)的一点.

(1)求反比例函数的表达式;

(2)如图 1, 过点 B 作 y 轴的垂线 l , l 与 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 D , 当线段 $BD = 3$ 时, 求点 B 的坐标.

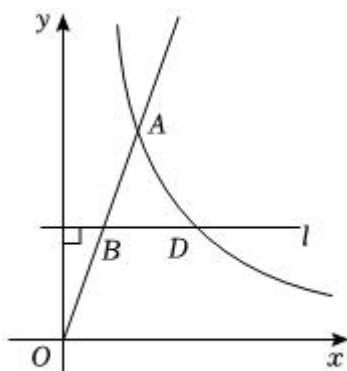


图1

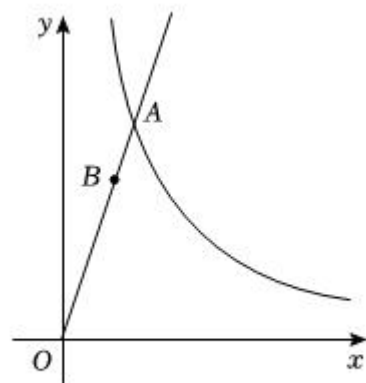


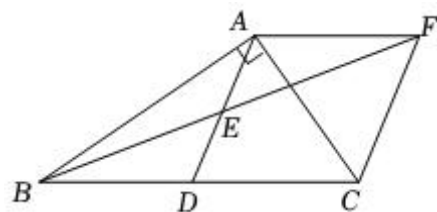
图2

20.(本小题 11 分)

如图, 在 $Rt \triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, D 是 BC 的中点, E 是 AD 的中点, 延长 BE 至点 F , 使得 $BE = EF$.

(1)求证: 四边形 $ADCF$ 是菱形.

(2)若 $\angle ABC = 30^\circ$, $AB = \sqrt{3}$, 求四边形 $ADCF$ 的周长.

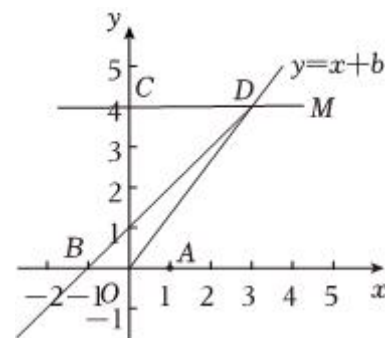


21.(本小题 11 分)

如图在直角坐标平面内, O 为原点, 点 A 的坐标为 $(1,0)$, 点 C 的坐标为 $(0,4)$, 直线 $CM \parallel x$ 轴. 点 B 与点 A 关于原点对称, 直线 $y = x + b$ (b 为常数) 经过点 B , 且与直线 CM 相交于点 D .

(1)求 b 的值和点 D 的坐标;

(2)在 x 轴上有一点 Q , 使 $\triangle BQD$ 的面积为 8, 求 Q 点的坐标.

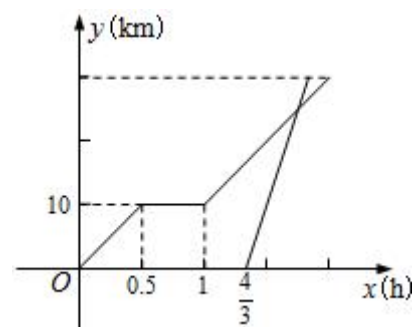


22.(本小题 11 分)

周末，小明骑电动自行车从家里出发到野外郊游．从家出发 0.5 小时后到达甲地，游玩一段时间后按原速前往乙地．小明离家 1 小时 20 分钟后，妈妈驾车沿相同路线前往乙地．如图是他们离家的路程 y (km) 与小明离家时间 x (h) 的函数图象．已知妈妈驾车的速度是小明骑电动自行车速度的 3 倍．

(1) 小明骑电动自行车的速度为_____千米/小时，在甲地游玩的时间为_____小时；

(2) 小明从家出发多少小时的时候被妈妈追上？此时离家多远？

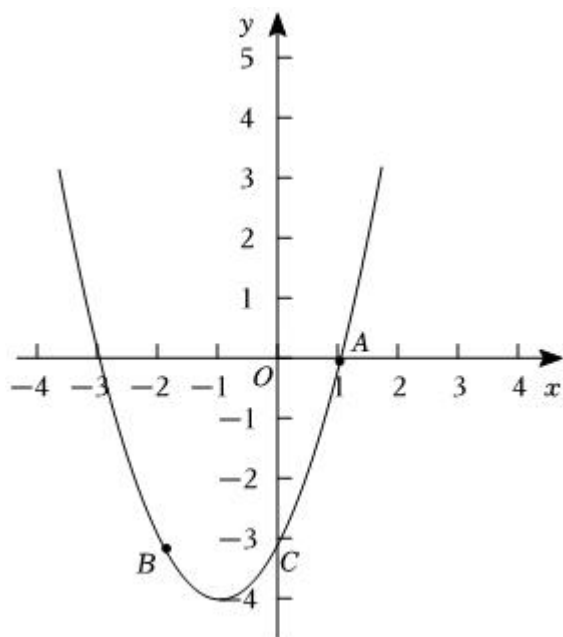


23.(本小题 11 分)

已知抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 经过点 $A(1, 0)$, $B(-2, -3)$, 顶点为点 P , 与 y 轴交于点 C .

(1) 求该抛物线的表达式以及顶点 P 的坐标；

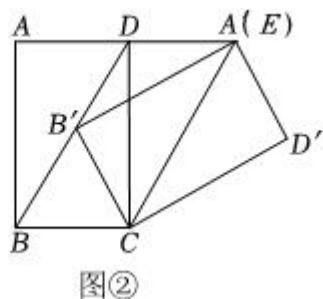
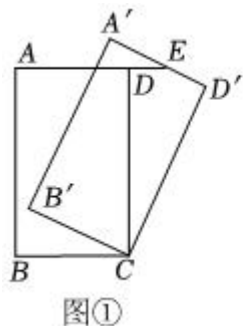
(2) 将抛物线向上平移 m ($m > 0$) 个单位后，点 A 的对应点为点 M ，若此时 $MB \parallel AC$ ，求 m 的值．



24.(本小题 11 分)

【综合与探究】

问题情境：将矩形 $ABCD$ 绕点 C 顺时针旋转，当旋转到如图①所示的位置时，得到矩形 $A'B'CD'$ ，点 A, B, D 的对应点分别为点 A', B', D' ，设直线 AD 与直线 $A'D'$ 交于点 E 。



猜想证明：

(1)猜想 DE 与 $D'E$ 的数量关系，并证明；

(2)如图②，在旋转的过程中，当点 B' 恰好落在矩形 $ABCD$ 的对角线 BD 上时，点 A' 恰好落在 AD 的延长线上(即点 A' 与点 E 重合)，连接 $A'C$ ，求证：四边形 $A'DBC$ 是平行四边形；

问题解决：

(3)在矩形 $ABCD$ 绕点 C 顺时针旋转的过程中，若 $AB = 5$ ， $BC = 3$ ，当 A', B', D 三点在同一条直线上时，请直接写出 $A'D$ 的值。

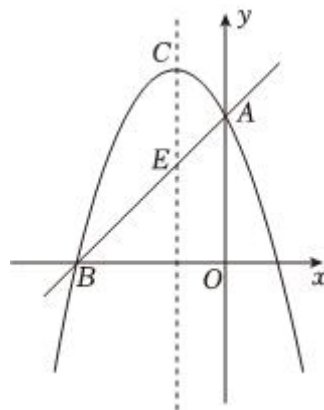
25.(本小题 12 分)

如图抛物线 $y_1 = ax^2 - 4x + c$ 与直线 $y_2 = kx + b$ 都经过 $A(0, 5)$ ， $B(-5, 0)$ 两点，该抛物线的顶点为 C 。

(1)求此抛物线和直线 AB 的表达式;

(2)根据图象, 直接写出满足 $y_1 > y_2$ 时 x 的取值范围;

(3)设直线 AB 与该抛物线的对称轴交于点 E , 在射线 EB 上是否存在一点 M , 过点 M 作 x 轴的垂线交抛物线于点 N , 使点 M, N, C, E 是平行四边形的四个顶点? 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 说明理由.



答案和解析

1. 【答案】C

【解析】解：反比例函数形式为 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$,

A: $y = \frac{6}{x}$, 是反比例函数, 不符合题意;

B: $y = 5x^{-1} = \frac{5}{x}$, 是反比例函数, 不符合题意;

C: $y = -\frac{x}{9}$, 是正比例函数, 不是反比例函数, 符合题意;

D: $y = -\frac{1}{7x}$, 是反比例函数, 不符合题意;

故选: C.

反比例函数的一般形式为 $y = \frac{k}{x} (k \text{ 为常数, } k \neq 0)$, 选项 C 为正比例函数, 不符合反比例函数定义.

本题考查了反比例函数的定义, 解题的关键是掌握相关知识的灵活运用.

2. 【答案】B

【解析】解: 由条件可知一次函数 y 随 x 的增大而增大, 图象经过第一、三、四象限, 不经过第二象限, 图象与正比例函数 $y = 3x$ 的图象平行,

$$\therefore -2 < 1,$$

$$\therefore y_1 < y_2,$$

故选: B.

图象的平移, 根据 $k = 3 > 0$, $b = -2 < 0$, 逐项分析判断, 即可求解.

本题考查了一次函数图象的分布和性质, 熟练掌握该知识点是关键.

3. 【答案】D

【解析】解: A、 $AD = BC$, 四边形 $ABCD$ 有可能是等腰梯形, 故 A 不符合题意;

B、由 $AB \parallel CD$ 可推出 $\angle BAC = \angle ACD$, 不能判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 故 B 不符合题意;

C、 $AB = AD$, 不能判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 故 C 不符合题意;

D、由 $AB \parallel CD$ 推出 $\angle B + \angle BCD = 180^\circ$, 由 $\angle B = \angle D$ 得到 $\angle BCD + \angle D = 180^\circ$, 可推出 $AD \parallel BC$, 由“两组对边分别平行的四边形是平行四边形”即可判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 故 D 符合题意.

故选: D.

由平行四边形的判定方法, 逐项判断即可.

本题考查平行四边形的判定, 关键是掌握平行四边形的判定方法.

4. 【答案】A

【解析】解：根据配方法将二次函数化为顶点式可得：

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 4x - 2 \\&= x^2 - 4x + 4 - 4 - 2 \\&= (x^2 - 4x + 4) - 6 \\&= (x - 2)^2 - 6,\end{aligned}$$

故顶点坐标为 $(2, -6)$,

故选：A.

通过配方法将二次函数化为顶点式，从而得到顶点坐标.

本题主要考查了求二次函数的顶点坐标，熟练掌握该知识点是关键.

5. 【答案】C

【解析】解：四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AD \parallel BC$ ，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形

A. 如果 $BC = AD$ ，那么四边形 $ABCD$ 可能是矩形，错误；

B. 两组对边分别平行的四边形是平行四边形，对角线相等的平行四边形是矩形，错误；

C. 如果 AC 平分 BD ，那么四边形 $ABCD$ 是矩形，正确；

D. 如果 $AC \perp BD$ ，那么四边形 $ABCD$ 不一定是正方形，错误；

故选：C.

根据正方形、等腰梯形、矩形和菱形的判定定理进行判断即可.

此题考查等腰梯形的判定，关键是根据正方形、等腰梯形、矩形和菱形的判定定理解答.

6. 【答案】B

【解析】解：由函数图象可得， $a < 0$ ， $c > 0$ ，

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = -1$ ，

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} = -1,$$

$\therefore b = 2a < 0$ ，即 $2a - b = 0$ ，故②正确；

$\therefore abc > 0$ ，故①错误；

$\therefore$ 图象过点 $A(-3, 0)$ ，对称轴为直线 $x = -1$ ，

$\therefore$ 图象过点 $(1, 0)$ ，

$\therefore a + b + c = 0$ ，故③正确；

$\therefore$ 函数图象开口向下，对称轴为直线 $x = -1$ ，

$\because$ 点 $B(-\frac{5}{2}, y_1)$ 、 $C(-\frac{1}{2}, y_2)$ 为函数图象上的两点,

$$\therefore |-1 + \frac{5}{2}| = 2 > |-\frac{1}{2} + 1| = \frac{1}{2}$$

$\therefore y_1 < y_2$, 故④正确,

故选: B .

根据函数图象和题意, 可以判断各个小题中的结论是否正确, 从而可以解答本题.

本题考查二次函数图象与系数的关系、二次函数图象上点的坐标特征, 解答本题的关键是明确题意, 利用二次函数的性质解答.

7. 【答案】 $y = -3x$

【解析】解: 设所求直线解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

$\because$ 直线经过原点, 且与直线 $y = -3x + 1$ 平行,

$$\therefore b = 0, k = -3.$$

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y = -3x$.

故答案为: $y = -3x$.

设所求直线解析式为 $y = kx + b$, 由于与直线 $y = -3x + 1$ 平行, 则 $k = -3$, 再根据图象经过原点即可得到 $b = 0$, 即可求解函数解析式.

本题考查了待定系数法求一次函数的解析式, 一次函数的性质, 两条直线相交或平行问题, 熟知以上知识是解题的关键.

8. 【答案】 6

【解析】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD,$$

$\therefore \triangle COD$ 是直角三角形,

$\because$ 点 E 是 CD 的中点,

$$\therefore CD = 2OE = 6,$$

故答案为: 6.

由菱形的性质可得 $AC \perp BD$, 由直角三角形的性质可得 $CD = 2OE$, 故可求解.

本题考查了菱形的性质以及直角三角形斜边上的中线性质的性质, 熟练掌握菱形的性质和直角三角形斜边上的中线性质的性质是解题的关键.

9. 【答案】 $(-1, 0)$ 或 $(3, 0)$

【解析】解：∵二次函数的图像与 y 轴的交点坐标为 $(0, -3)$,

$$\therefore n = -3,$$

$$\therefore \text{二次函数 } y = x^2 - 2x + n \text{ 的解析式为 } y = x^2 - 2x - 3,$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$\text{解得 } x = 3 \text{ 或 } x = -1,$$

$$\therefore \text{交点坐标为 } (-1, 0) \text{ 或 } (3, 0),$$

$$\text{故答案为: } (-1, 0) \text{ 或 } (3, 0).$$

先根据抛物线与 y 轴的交点坐标求出 n , 得到函数解析式, 再令 $y = 0$, 求出函数图像与 x 轴的交点坐标.

本题考查了二次函数图像与坐标轴的交点问题, 解题的关键是求出函数解析式.

$$10. \text{【答案】 } -4 < x < 0 \text{ 或 } x > 2$$

【解析】解：∵反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象过 M 、 N 两点

$$\therefore -2n = -4 \times 1,$$

$$\text{解得 } n = 2,$$

$$\therefore N(2, -2),$$

观察图象可得, 当 $-4 < x < 0$ 或 $x > 2$ 时, 一次函数的图象位于反比例函数图象的下方,

$$\therefore \text{不等式 } ax + b < \frac{k}{x} \text{ 的解集为 } -4 < x < 0 \text{ 或 } x > 2,$$

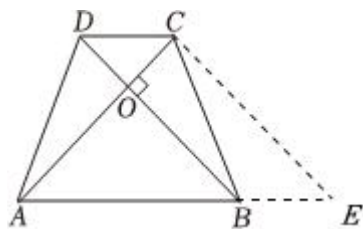
$$\text{故答案为: } -4 < x < 0 \text{ 或 } x > 2.$$

先求得 n 的值, 然后观察函数图象即可求解.

此题主要考查的是反比例函数与一次函数的交点问题, 熟知以上知识是解题的关键.

$$11. \text{【答案】 } 16$$

【解析】解：如图, $AB \parallel CD$, $CD = 3$, $AB = 5$. 过点 C 作 $CE \parallel BD$, 交 AB 的延长线于点 E ,



$$\therefore \text{四边形 } BECD \text{ 是平行四边形},$$

$$\therefore BE = CD = 3,$$

$$\therefore AE = AB + BE = 5 + 3 = 8,$$

$$\therefore AC \perp BD,$$

$$\therefore AC \perp CE,$$

$$\therefore \angle ACE = 90^\circ,$$

$$\because AD = BC, AB \parallel CD,$$

$$\therefore AC = BD,$$

$$\therefore AC = CE,$$

在直角三角形 ACE 中, 由勾股定理得: $2AC^2 = AE^2 = 64$, 即 $AC^2 = 32$,

$$\therefore \text{此梯形的面积为} \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}AC^2 = \frac{1}{2} \times 32 = 16,$$

故答案为: 16.

过点 C 作 $CE \parallel BD$, 交 AB 的延长线于点 E , 证明四边形 $BECD$ 是平行四边形, 可得 $BE = CD = 3$,

证明 $\angle ACE = 90^\circ$, $AC = BD$, $AC = CE$, 结合勾股定理得, 即 $AC^2 = 32$, 再进一步解答即可.

本题考查的是等腰梯形的性质, 平行四边形的判定与性质, 勾股定理, 添加合适的辅助线是解答本题的关键.

12. 【答案】 $b < c < a$

【解析】解: $\because y = (x - 2)^2 + k$,

$\therefore$ 图象的开口向上, 对称轴是直线 $x = 2$,

$\because C(4, c)$ 关于直线 $x = 2$ 的对称点是 $(0, c)$,

$$\therefore -1 < 0 < 1,$$

$$\therefore b < c < a,$$

故答案为: $b < c < a$.

根据二次函数的解析式得出图象的开口向下, 对称轴是直线 $x = 2$, 根据 $x < 2$ 时, y 随 x 的增大而增大, 即可得出答案.

本题主要考查对二次函数图象上点的坐标特征, 二次函数的性质等知识点的理解和掌握, 能熟练地运用二次函数的性质进行推理是解此题的关键.

13. 【答案】 40°

【解析】解: $\because \square ABCD$ 绕顶点 B 顺时针旋转到 $\square A_1BC_1D_1$,

$$\therefore BC = BC_1,$$

$$\therefore \angle BCC_1 = \angle C_1,$$

$$\because \angle A = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle C_1 = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle CBC_1 = 180^\circ - 2 \times 70^\circ = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle ABA_1 = 40^\circ,$$

故答案为: 40° .

由旋转的性质可知: $\square ABCD$ 全等于 $\square A_1BC_1D_1$, 所以 $BC = BC_1$, 所以 $\angle BCC_1 = \angle C_1$, 又因为旋转角 $\angle ABA_1 = \angle CBC_1$, 根据等腰三角形的性质计算即可.

本题考查了平行四边形的性质、旋转的性质、等腰三角形的判定和性质以及三角形的内角和定理, 解题的关键是证明三角形 CBC_1 是等腰三角形.

14. 【答案】 8

【解析】解: 由题知,

将 $y = m (m > 0)$ 分别代入 $y_1 = \frac{12}{x} (x > 0)$ 和 $y_2 = -\frac{4}{x} (x < 0)$ 得,

$$x_A = \frac{12}{m}, x_B = -\frac{4}{m},$$

$$\text{所以 } AB = \frac{12}{m} - (-\frac{4}{m}) = \frac{16}{m},$$

$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{m} \cdot m = 8.$$

故答案为: 8.

将 $y = m (m > 0)$ 分别代入两个反比例函数解析式, 再结合三角形的面积公式进行计算即可.

本题主要考查了反比例函数图象上点的坐标特征及反比例函数的性质, 熟知反比例函数的图象与性质是解题的关键.

15. 【答案】 $(2\sqrt{6}, \sqrt{6})$

【解析】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象经过顶点 $A(3, 4)$,

$$\therefore k = 3 \times 4 = 12,$$

$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = \frac{12}{x},$$

$$\therefore OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$\because$ 四边形 $OABC$ 是菱形,

$$\therefore AB = OA = 5, AB \parallel CO,$$

$$\therefore B(8, 4),$$

设直线 OB 的解析式为 $y = mx (m \neq 0)$,

把 $B(8, 4)$ 代入得 $4 = 8m$,

$$\therefore m = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{直线 } OB \text{ 的解析式为 } y = \frac{1}{2}x,$$

$\therefore$ 点 D 是反比例函数与正比例函数的交点,

$$\therefore \text{联立解析式 } \begin{cases} y = \frac{12}{x} \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = 2\sqrt{6} \\ y = \sqrt{6} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -2\sqrt{6} \\ y = -\sqrt{6} \end{cases},$$

$$\therefore x > 0,$$

$$\therefore D(2\sqrt{6}, \sqrt{6}),$$

故答案为: $(2\sqrt{6}, \sqrt{6})$.

先利用待定系数法求出反比例函数解析式, 由 $A(3,4)$ 得 $OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, 又因为四边形 $OABC$ 是菱形,

$$\text{则 } AB = OA = 5, \text{ 得到 } B(8,4), \text{ 从而求出直线 } OB \text{ 的解析式为 } y = \frac{1}{2}x, \text{ 然后联立 } \begin{cases} y = \frac{12}{x} \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \text{ 即可求解.}$$

本题考查的是反比例函数图象上点的坐标的特征, 菱形的性质, 勾股定理, 熟知反比例函数图象上各点的坐标一定适合此函数的解析式是解题的关键.

16. 【答案】 $x_1 = 0, x_2 = 1$

【解析】解: 由图可知对称轴为直线 $x = 0.5$,

则 $(0,2)$ 关于直线 $x = 0.5$ 的对称点为 $(1,2)$,

可知根是 $x_1 = 0, x_2 = 1$,

如图所示的图象, 则关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 2$ 的根是 $x_1 = 0, x_2 = 1$,

故答案为: $x_1 = 0, x_2 = 1$.

根据对称轴得到 $(0,2)$ 关于直线 $x = 0.5$ 的对称点为 $(1,2)$, 结合函数图像作答即可.

本题考查了根据函数图像求一元二次方程的根, 解题的关键是掌握相关知识的灵活运用.

17. 【答案】 $(-\frac{5}{8}, 0)$

【解析】解: $\because y = 2x^2 + 4x + 5 = 2(x + 1)^2 + 3$,

$\therefore$ 抛物线开口向上, 顶点 P 为 $(-1,3)$,

$\therefore$ 顶点关于 x 轴的对称点 Q 为 $(-1, -3)$,

当 $x = 0$ 时, $y = 5$,

$\therefore$ 抛物线与 y 轴的交点 M 为 $(0,5)$,

设直线 MQ 的解析式为 $y = kx + 5$,

代入 $(-1, -3)$ 得, $-3 = -k + 5$,

解得 $k = 8$,

$\therefore$ 直线 MQ 的解析式为 $y = 8x + 5$,

令 $y = 0$, 则 $x = -\frac{5}{8}$,

$\therefore$ 抛物线 $y = 2x^2 + 4x + 5$ 与 x 轴的“亲密点”的坐标为 $(-\frac{5}{8}, 0)$,

故答案为: $(-\frac{5}{8}, 0)$.

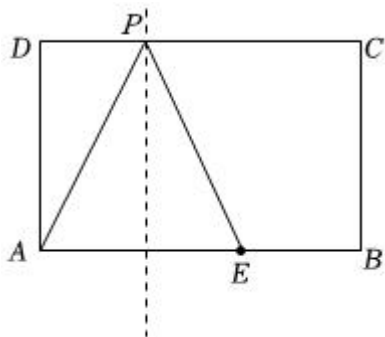
求得抛物线的顶点坐标和与 y 轴的交点, 然后根据题意求得顶点关于 x 轴的对称点, 进一步求得过对称点和与 y 轴的交点的直线解析式, 即可求得“亲密点”的坐标.

本题考查了二次函数的性质, 二次函数图象上点的坐标特征, 轴对称的性质, 理解“亲密点”的定义是解题的关键.

18. 【答案】6 或 $6\sqrt{2}$ 或 $6\sqrt{3}$

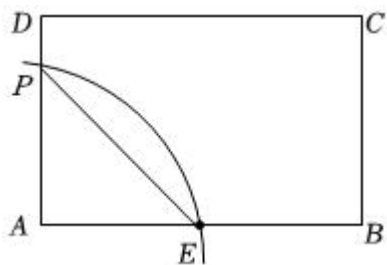
【解析】解: 由矩形的性质可得 $\angle A = \angle B = 90^\circ$, 结合等腰三角形的性质分三种情况讨论如下:

如图, AE 的垂直平分线交 CD 于点 P ,



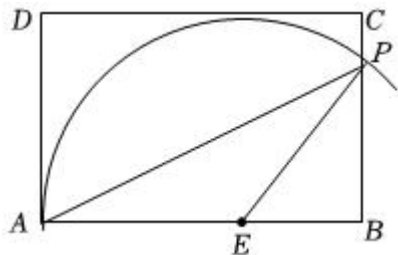
此时 $\triangle AEP$ 为等腰三角形, 底边为 $AE = 6$;

如图, 以点 A 为圆心, 以 6 为半径画弧交 AD 于点 P ,



此时 $\triangle AEP$ 为等腰三角形, 底边为 $PE = \sqrt{AE^2 + AP^2} = 6\sqrt{2}$;

如图, 以点 E 为圆心, 以 6 为半径画弧交 BC 于点 P ,



此时 $\triangle AEP$ 为等腰三角形, $PE = AE = 6$, $BE = AB - AE = 3$,

$$\therefore BP = \sqrt{PE^2 - BE^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{底边 } AP = \sqrt{AB^2 + BP^2} = 6\sqrt{3},$$

综上所述: 等腰三角形 AEP 的底边长是 6 或 $6\sqrt{2}$ 或 $6\sqrt{3}$,

故答案为: 6 或 $6\sqrt{2}$ 或 $6\sqrt{3}$.

由矩形的性质可得 $\angle A = \angle B = 90^\circ$, 结合等腰三角形的性质分三种情况计算即可得解.

本题考查了矩形的性质、等腰三角形的性质、勾股定理, 熟练掌握以上知识点并灵活运用, 采用分类讨论的思想是解此题的关键.

19. 【答案】 $y = \frac{12}{x}$;

$B(1,3)$.

【解析】解 (1) 将 $A(2, a)$ 代入 $y = 3x$ 得 $a = 3 \times 2 = 6$,

$\therefore A(2, 6)$,

将 $A(2, 6)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得 $6 = \frac{k}{2}$,

解得 $k = 12$,

$\therefore$ 反比例函数表达式为 $y = \frac{12}{x}$;

(2) 如图 1, 设点 $B(m, 3m)$, 则点 $D(m+3, 3m)$,

$\because$ 点 D 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象上,

$\therefore 3m(m+3) = 12$,

解得 $m_1 = 1$, $m_2 = -4$ (舍),

$\therefore B(1, 3)$.

(1) 待定系数法求出反比例函数解析式即可;

(2) 设点 $B(m, 3m)$, 那么点 $D(m+3, 3m)$, 利用反比例函数图象上点的坐标特征解出点 B 的坐标即可.

本题是反比例函数与一次函数的交点问题，考查了一次函数图象上点的坐标特征，待定系数法求反比例函数的解析式，反比例函数图象上点的坐标特征，交点坐标满足两个函数关系式是关键.

20. 【答案】 (1) $\because E$ 是 AD 的中点,

$$\therefore AE = DE,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DEB$ 中,

$$\begin{cases} AE = DE \\ \angle AEF = \angle DEB, \\ EF = EB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle DEB (SAS),$$

$$\therefore \angle AFE = \angle DBE, AF = DB,$$

$$\therefore AF \parallel DB,$$

$\because D$ 是 BC 的中点,

$$\therefore DB = DC,$$

$$\therefore AF = DC,$$

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形,

$\because D$ 是 BC 的中点, $\angle BAC = 90^\circ$,

$$\therefore AD = CD = \frac{1}{2}BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是菱形 (2)4

【解析】 (1) 证明: $\because E$ 是 AD 的中点,

$$\therefore AE = DE,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DEB$ 中,

$$\begin{cases} AE = DE \\ \angle AEF = \angle DEB, \\ EF = EB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle DEB (SAS),$$

$$\therefore \angle AFE = \angle DBE, AF = DB,$$

$$\therefore AF \parallel DB,$$

$\because D$ 是 BC 的中点,

$$\therefore DB = DC,$$

$$\therefore AF = DC,$$

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形,

$\because D$ 是 BC 的中点, $\angle BAC = 90^\circ$,

$$\therefore AD = CD = \frac{1}{2}BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是菱形;

(2)解: $\because$ 在 $Rt \triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 30^\circ$,

$$\therefore BC = 2AC,$$

设 $AC = a$, 则 $BC = 2a$,

$$\because AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

$$\therefore (\sqrt{3})^2 + a^2 = (2a)^2,$$

解得 $a = 1$,

$$\therefore BC = 2,$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2}BC = 1,$$

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 的周长为 $1 \times 4 = 4$.

(1)证明 $\triangle AEF \cong \triangle DEB (SAS)$, 得到 $AF = DB$, $\angle AFE = \angle DBE$, 即可得 $AF \parallel DB$, $AF = DC$,

即得到四边形 $ADCF$ 是平行四边形, 再根据直角三角形的性质得 $AD = CD = \frac{1}{2}BC$, 即可求证;

(2)由直角三角形的性质得 $BC = 2AC$, 设 $AC = a$, 则 $BC = 2a$, 利用勾股定理可得 $a = 1$, 得到 $BC = 2$,

再根据直角三角形的性质得到 $AD = \frac{1}{2}BC = 1$, 即可求解.

本题考查了菱形的判定与性质, 全等三角形的判定与性质, 含 30° 度角的直角三角形, 直角三角形斜边上的中线, 勾股定理, 掌握全等三角形的判定与性质是解题的关键.

21. 【答案】 $b = 1$, $D(3,4)$ $Q(3,0)$ 或 $Q(-5,0)$

【解析】 解: (1)由条件可知 $B(-1,0)$,

$\because y = x + b$ 过点 B ,

$$\therefore -1 + b = 0,$$

$$\therefore b = 1,$$

$$\therefore y = x + 1,$$

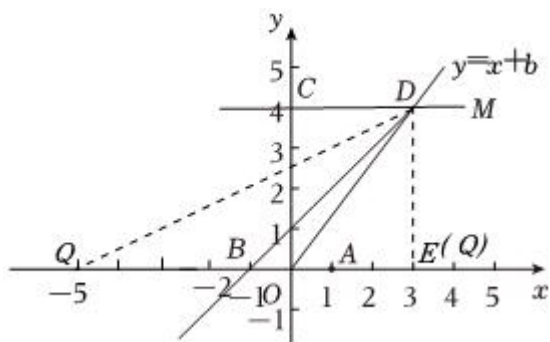
当 $y = 4$ 时, $x + 1 = 4$,

$$\therefore x = 3,$$

$$\therefore D(3,4),$$

$$\therefore b = 1, D(3,4).$$

(2)过点 D 作 $DE \perp x$ 轴, 垂足为 E , 则 DE 是 $\triangle BQD$ 在边 BQ 上的高, $DE = 4$,



$$\therefore S_{\triangle BQD} = \frac{1}{2} BQ \cdot DE = 8,$$

$$\therefore BQ = 4,$$

$$-1 - 4 = -5, \quad -1 + 4 = 3,$$

$\therefore$ 在 x 轴上存在两个 Q 点满足条件,

即: $Q(3, 0)$ 或 $Q(-5, 0)$.

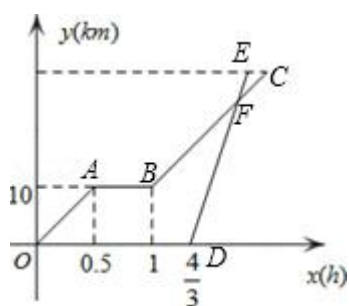
(1)先求出点 B 的坐标, 由直线过点 B , 把点 B 的坐标代入解析式, 可求得 b 的值; 点 D 在直线 $y = x + 1$ 上, 其纵坐标为 4, 利用求得的解析式确定该点的横坐标即可;

(2)过点 D 作 $DE \perp x$ 轴, 垂足为 E , 则 DE 是 $\triangle BQD$ 在边 BQ 上的高, $DE = 4$, 根据三角形面积公式求出 BQ 的长, 可得 Q 点坐标;

本题考查了待定系数法求函数解析式, 一次函数图像上点的坐标特征, 注意分情况讨论是解决本题的关键.

22. 【答案】 (1) 20, 0.5;

(2)如图,



妈妈驾车速度: $20 \times 3 = 60(\text{km/h})$

设直线 OA 的解析式为 $y = kx (k \neq 0)$,

$$\text{则 } 10 = 0.5k,$$

$$\text{解得: } k = 20,$$

故直线 OA 的解析式为: $y = 20x$.

∵小明走 OA 段与走 BC 段速度不变,

∴ $OA \parallel BC$,

设直线 BC 解析式为 $y = 20x + b_1$,

把点 $B(1, 10)$ 代入得 $b_1 = -10$,

∴ $y = 20x - 10$,

设直线 DE 解析式为 $y = 60x + b_2$, 把点 $D(\frac{4}{3}, 0)$

代入得: $b_2 = -80$,

∴ $y = 60x - 80$,

$$\therefore \begin{cases} y = 20x \\ y = 60x - 80 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 1.75 \\ y = 25 \end{cases},$$

∴ $F(1.75, 25)$.

答: 小明出发 1.75 小时 (105 分钟) 被妈妈追上, 此时离家 25km .

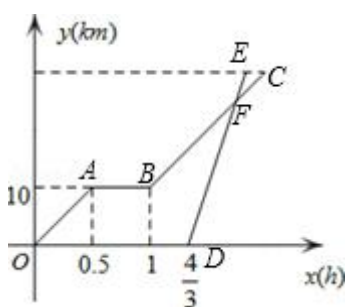
【解析】解: (1) 由图象得

在甲地游玩的时间是 $1 - 0.5 = 0.5(h)$,

小明骑车速度: $10 \div 0.5 = 20(km/h)$,

故答案为: $20, 0.5$.

(2) 如图,



妈妈驾车速度: $20 \times 3 = 60(km/h)$

设直线 OA 的解析式为 $y = kx (k \neq 0)$,

则 $10 = 0.5k$,

解得: $k = 20$,

故直线 OA 的解析式为: $y = 20x$.

∵小明走 OA 段与走 BC 段速度不变,

$$\therefore OA \parallel BC,$$

设直线 BC 解析式为 $y = 20x + b_1$,

把点 $B(1, 10)$ 代入得 $b_1 = -10$,

$$\therefore y = 20x - 10,$$

设直线 DE 解析式为 $y = 60x + b_2$, 把点 $D(\frac{4}{3}, 0)$

代入得: $b_2 = -80$,

$$\therefore y = 60x - 80,$$

$$\therefore \begin{cases} y = 20x \\ y = 60x - 80 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 1.75 \\ y = 25 \end{cases},$$

$$\therefore F(1.75, 25).$$

答: 小明出发 1.75 小时 (105 分钟) 被妈妈追上, 此时离家 25km.

(1) 根据图象可以求出小明在甲地游玩的时间, 由速度=路程÷时间就可以求出小明骑车的速度;

(2) 直接运用待定系数法就可以求出直线 BC 和 DE 的解析式, 再由其解析式建立二元一次方程组, 求出点 F 的坐标就可以求出结论.

本题考查了一次函数的应用, 考查了路程=速度×时间的运用, 待定系数法求一次函数的解析式的运用, 一次函数图象性质的运用. 解题的关键是从实际问题中整理出一次函数模型.

23. 【答案】 $y = x^2 + 2x - 3$; 顶点 $P(-1, -4)$ $m = 6$

【解析】解: (1) ∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 经过点 $A(1, 0)$, $B(-2, -3)$,

$$\therefore \begin{cases} a + b - 3 = 0 \\ 4a - 2b - 3 = -3 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4,$$

$$\therefore \text{顶点 } P(-1, -4);$$

(2) ∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 与 y 轴交于点 C ,

$$\therefore \text{令 } x = 0, \text{ 则 } y = -3, \text{ 即 } C(0, -3),$$

∵ 直线 AC 经过点 A, C ,

设其解析式为 $y = k_1x + b_1$,

$$\text{则} \begin{cases} k_1 + b_1 = 0 \\ b_1 = -3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_1 = 3 \\ b_1 = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AC : $y = 3x - 3$,

$\because MB \parallel AC$, 且直线 MB 经过点 $B(-2, -3)$,

设直线 MB 的解析式为 $y = 3x + b_2$,

则 $-3 = 3 \times (-2) + b_2$,

解得 $b_2 = 3$,

$\therefore$ 直线 MB : $y = 3x + 3$,

$\because$ 点 M 是点 A 向上平移 m 个单位所得,

$\therefore M_x = 1$, 代入直线 MB 的表达式, 得 $M(1, 6)$,

$\therefore m = 6$.

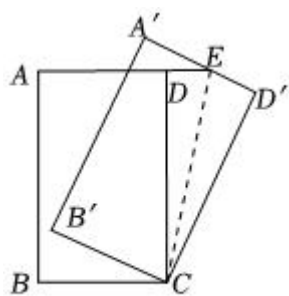
(1) 利用待定系数法即可求解;

(2) 由题意可得 $C(0, -3)$, 由此可求得直线 AC 的解析式为 $y = 3x - 3$, 由 $MB \parallel AC$, 可设直线 MB 解析式为 $y = 3x + b_2$, 进而求得其解析式为 $y = 3x + 3$, 由 $M_x = 1$, 代入直线 MB 的表达式求得 $M(1, 6)$, 即可求得 m 的值;

本题考查待定系数法求二次函数的解析式, 二次函数的图象与几何变换, 二次函数的性质, 二次函数图象上点的坐标特征, 熟练掌握函数性质是解决问题的关键.

24. 【答案】解: DE 与 $D'E$, 理由如下:

如图①, 连接 CE ,



图①

由题知四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'CD'$ 都是矩形,

$\therefore \angle ADC = \angle CD'E = 90^\circ$,

$\therefore \angle CDE = 180^\circ - \angle ADC = 90^\circ$,

即 $\angle CDE = \angle CD'E$,

$\therefore$ 将矩形 $ABCD$ 绕点 C 顺时针旋转, 当旋转到如图①所示的位置时, 得到矩形 $A'B'CD'$,

$$\therefore \angle CDE = 180^\circ - \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle CDE = \angle CD'E,$$

$\therefore$ 将矩形 $ABCD$ 绕点 C 顺时针旋转, 当旋转到如图①所示的位置时, 得到矩形 $A'B'CD'$,

$$\therefore CD = CD',$$

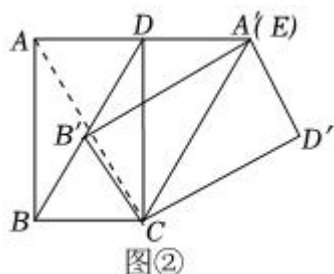
在 $Rt \triangle CDE$ 和 $Rt \triangle CD'E$ 中,

$$\begin{cases} CD = CD' \\ CE = CE \end{cases},$$

$$\therefore Rt \triangle CDE \cong Rt \triangle CD'E (HL),$$

$$\therefore DE = D'E;$$

(2) 证明: 如图 2: 连接 AC ,



根据旋转的性质可得: $AC = A'C$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AD \parallel BC, AD = BC, \angle ADC = 90^\circ,$$

即 $CD \perp AA'$,

$$\text{又 } \therefore AC = A'C,$$

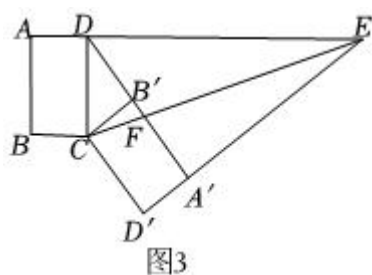
$$\therefore AD = A'D,$$

$$\therefore A'D = BC,$$

$$\therefore A'D \parallel BC, A'D = BC,$$

$\therefore$ 四边形 $A'DBC$ 是平行四边形;

(3) 解: 当点 A' 、 B' 在 CD 的同一侧时, 如图 3,



解得: $\begin{cases} k = 1 \\ b = 5 \end{cases}$

$\therefore$ 直线 AB 的表达式为 $y_2 = x + 5$;

(2) $\because A(0,5), B(-5,0)$,

$\therefore$ 根据图象可得, 当 $y_1 > y_2$ 时, $-5 < x < 0$;

(3) 在射线 EB 上存在一点 M , 过点 M 作 x 轴的垂线交抛物线于点 N , 使点 M, N, C, E 是平行四边形的四个顶点; 理由如下:

$$\because y_1 = -x^2 - 4x + 5 = -(x+2)^2 + 9,$$

$\therefore$ 抛物线的顶点 C 的坐标为 $(-2,9)$.

$\because CE \parallel y$ 轴, E 在直线 $y_2 = x + 5$ 上,

$$\therefore -2 + 5 = 3, \text{ 点 } E \text{ 的坐标为 } (-2,3).$$

$$\therefore CE = 9 - 3 = 6.$$

情况一: 如图 1, 若点 M 在 x 轴的上方, 连接 CN ,

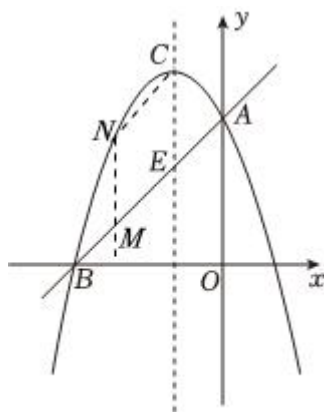


图1

$\therefore$ 四边形 $CEMN$ 为平行四边形, $CE = MN$.

设 $M(a, a+5)$, 则 $N(a, -a^2 - 4a + 5)$.

$$\therefore MN = (-a^2 - 4a + 5) - (a + 5) = -a^2 - 5a,$$

$$\therefore -a^2 - 5a = 6,$$

解得: $a = -3$ 或 $a = -2$ (舍去).

$$\therefore a + 5 = -3 + 5 = 2,$$

$$\therefore M(-3, 2);$$

情况二: 如图 2, 若点 M 在 x 轴的下方, 连接 EN, CM, MN ,

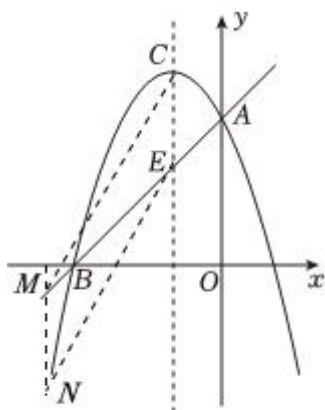


图2

∴ 四边形 $CENM$ 为平行四边形, $CE = MN$.

设 $M(a, a + 5)$, 则 $N(a, -a^2 - 4a + 5)$.

$$\therefore MN = (a + 5) - (-a^2 - 4a + 5) = a^2 + 5a,$$

$$\therefore a^2 + 5a = 6,$$

解得: $a = -6$ 或 $a = 1$ (舍去).

$$\therefore a + 5 = -6 + 5 = -1,$$

$$\therefore M(-6, -1),$$

综上所述, 在射线 EB 上存在一点 M , 过点 M 作 x 轴的垂线交抛物线于点 N , 使点 M, N, C, E 是平行四边形的四个顶点; M 点的坐标为 $(-3, 2)$ 或 $(-6, -1)$.

【解析】 (1) 将 $A(0, 3)$, $B(-3, 0)$, 分别代入抛物线和直线的表达式中求解, 得出完整表达式即可;

(2) 根据图象即可求解;

(3) 分“点 M 在 x 轴的上方”和“点 M 在 x 轴的下方”两种情况讨论, 根据题意画出符合题意的图形, 设出点 M 的坐标, 依据解析式得出点 N 的坐标, 利用 M, N 的坐标表示出线段 MN , 求出 CE 的长度, 利用平行四边形的对边相等得到 $CE = MN$, 得出方程求解, 得出 M 的坐标即可.

本题主要考查了二次函数的综合运用, 求二次函数、一次函数的解析式, 解一元二次方程, 利用点的坐标的特征表示相应线段的长度、平行四边形的性质, 分类讨论、画出图形、数形结合是解题的关键.