

八年级数学学科

(满分 100 分, 时间 90 分钟)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列实数中, 属于无理数的是 ()

A. $-\sqrt[3]{9}$

B. 3.14159

C. $\frac{22}{7}$

D. $\sqrt{25}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了无理数的识别, 无限不循环小数叫无理数, 初中范围内常见的无理数有: ① π 类, 如 2π , $\frac{\pi}{3}$ 等; ②开方开不尽的数, 如 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ 等; ③具有特殊结构的数, 如0.1010010001... (两个1之间依次增加1个0), 0.2121121112... (两个2之间依次增加1个1). 根据无理数的定义, 逐项进行判断即可.

【详解】解: A. $-\sqrt[3]{9}$ 是无理数, 故符合题意

B. 3.14159 是有限小数, 属于有理数, 故不符合题意;

C. $\frac{22}{7}$ 是分数, 属于有理数, 故不符合题意;

D. $\sqrt{25} = 5$ 是整数, 属于有理数, 故不符合题意.

故选: A.

2. $\sqrt{x-y}$ 的一个有理化因式是 ()

A. $\sqrt{x} + \sqrt{y}$

B. $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

C. $\sqrt{x+y}$

D. $\sqrt{x-y}$

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查有理化因式, 有理化因式是指与给定表达式相乘后结果为有理式的表达式. 对于单个平方根表达式 $\sqrt{x-y}$, 其自身即为有理化因式, 因为相乘后可得有理式 $x-y$.

【详解】 $\because \sqrt{x-y} \times \sqrt{x-y} = x-y$ (有理式),

$\therefore \sqrt{x-y}$ 是自身的一个有理化因式.

故选: D.

3. 在三角形内找一点, 使它到三条边的距离相等, 这个点应是 ()

- A. 三条中线的交点
B. 三边的垂直平分线的交点
C. 三条角平分线的交点
D. 三条高所在直线的交点

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据角平分线的性质定理得到结论.

【详解】 解: 在角的内部, 到角的两边距离相等的点在角的平分线上,
故到三角形任意两条边距离相等的点在两边所夹的角的平分线上,
 $\therefore$ 到三角形三条边的距离相等, 这个点应是三条角平分线的交点,
故选: C.

【点睛】 此题考查了角平分线的性质定理, 熟记角平分线的性质定理是解题的关键.

4. $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AC 、 BC 的长是方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两根, 则 AB 的长为 ()

- A. 2
B. 3
C. $\sqrt{5}$
D. $\sqrt{7}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理, 一元二次方程根与系数的关系.

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AB 为斜边, 根据勾股定理, $AB^2 = AC^2 + BC^2$, AC 、 BC 是方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两根, 利用根与系数的关系可求 $AC + BC$ 和 $AC \times BC$, 进而计算 $AC^2 + BC^2$, 进而可知 AB 的长.

【详解】 解: $\because AC$ 、 BC 是方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两根,

$$\therefore AC + BC = 3, \quad AC \times BC = 1.$$

$$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2 = (AC + BC)^2 - 2 \times AC \times BC,$$

$$\therefore AB^2 = 3^2 - 2 \times 1 = 9 - 2 = 7,$$

$$\therefore AB = \sqrt{7}.$$

故选: D.

5. 某工厂七月份的产值是 100 万元, 计划第三季度共创产值 484 万元. 若每个月产值的增长率相同, 并设这个增长率为 x , 则下列方程中正确的是 ()

- A. $100(1+x)^2 = 484$
B. $100(1+x)^3 = 484$
C. $(1+x) + 100(1+x)^2 = 484$
D. $100[1 + (1+x) + (1+x)^2] = 484$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用，掌握增长率的计算方法是解题的关键；

根据每个月产值的平均增长率为 x ，七月份的产值是 100 万元，表示之后两个月的产值，然后已知第三季度的总产值，列方程即可.

【详解】解：∵ 每个月产值的平均增长率为 x ，七月份的产值是 100 万元，

∴ 八月份产值为 $100(1+x)$ ，

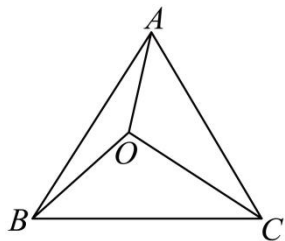
九月份产值为 $100(1+x)^2$ ，

∴ 计划第三季度共创产值 484 万元，

$$\therefore 100[1 + (1+x) + (1+x)^2] = 484,$$

故选：D.

6. 如图，点 O 是等边 ABC 内一点， $OA=3$ ， $OB=4$ ， $OC=5$ ，则 $S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AOC}$ 的值为（ ）



A. $12 - \sqrt{6}$

B. $6 + 4\sqrt{3}$

C. $4 + 6\sqrt{3}$

D. $12 + \sqrt{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了旋转的性质，等边三角形的性质以及勾股定理，将线段 BO 以点 B 为旋转中心逆时针旋转 60° 得到线段 BO' ，连接 OO' ，则 $\triangle ABO' \cong \triangle CBO$ ，进而得到 $\angle AOO' = 90^\circ$ ，然后求出四边形 $AOBO'$ 的面积解答即可.

【详解】解：将线段 BO 以点 B 为旋转中心逆时针旋转 60° 得到线段 BO' ，连接 OO' ， AO' ，

$$\therefore \angle OBO' = 60^\circ, \quad OB = O'B = 4,$$

$$\therefore \triangle BOO' \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore OO' = OB = 4,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 是等边三角形},$$

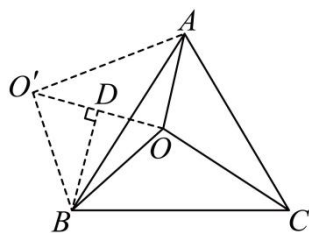
$$\therefore \angle ABC = 60^\circ = \angle OBO',$$

$$\therefore \angle O'BA = \angle OBC,$$

又 $\because BO' = BO, BA = BC,$

$\therefore \triangle ABO' \cong \triangle CBO (\text{SAS}),$

$\therefore O'A = OC = 5,$



在 $\triangle AOO'$ 中, $OA = 3, OO' = 4, AO' = 5,$

$\therefore OA^2 + O'O^2 = O'A^2,$

$\therefore \triangle AOO'$ 是直角三角形, $\angle AOO' = 90^\circ,$

$\therefore \text{Rt}\triangle AOO'$ 面积为 $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6,$

过点 B 作 $BD \perp OO'$ 于点 $D,$

则 $OD = \frac{1}{2}OO' = 2,$

$\therefore BD = \sqrt{OB^2 - OD^2} = 2\sqrt{3},$

$\therefore$ 等边 $\triangle BOO'$ 面积为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 4 = 4\sqrt{3},$

$\therefore$ 四边形 $AOBO'$ 的面积为 $6 + 4\sqrt{3},$

$\therefore \triangle ABO' \cong \triangle BOC,$

$\therefore$ 四边形 $AOBO'$ 的面积 $= \triangle AOB$ 的面积 $+ \triangle BOC$ 的面积,

$\therefore S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AOC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} = 6 + 4\sqrt{3},$

故选 B.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 若 $\sqrt{2x-3}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 根据 $2x-3 \geq 0$ 求解即可.

【详解】 $\because \sqrt{2x-3}$ 在实数范围内有意义,

$\therefore 2x-3 \geq 0,$

$$\therefore x \geq \frac{3}{2},$$

故答案为: $x \geq \frac{3}{2}$.

【点睛】本题考查了二次根式有意义的条件, 熟练掌握这个条件是解题的关键.

8. 若 $3x+1$ 和 $x-1$ 是一个正数的两个不同的平方根, 则这个正数是_____.

【答案】1

【解析】

【分析】本题主要考查了平方根定义, 熟练掌握正数的两个平方根互为相反数, 是解题的关键. 根据平方根的性质, 一个正数的两个不同的平方根互为相反数, 由此建立方程求解即可.

【详解】解: $\because 3x+1$ 和 $x-1$ 是一个正数的两个不同的平方根,

$$\therefore 3x+1 = -(x-1),$$

解得: $x = 0$,

则 $3x+1 = 1$, $x-1 = -1$,

$\therefore$ 这个正数是: $1^2 = 1$.

故答案为: 1.

9. $\sqrt{28}$ 与最简二次根式 $5\sqrt{x-1}$ 为同类二次根式, 则 $x =$ _____.

【答案】8

【解析】

【分析】本题考查了同类二次根式, 最简二次根式, 掌握同类二次根式定义, 最简二次根式定义是解题的关键. 化成最简二次根式后, 根据被开方数相等解答即可.

【详解】解: $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$,

$\because \sqrt{28}$ 与最简二次根式 $5\sqrt{x-1}$ 为同类二次根式,

$$\therefore x-1 = 7,$$

$$\therefore x = 8.$$

故答案为: 8.

10. 2025 年 3 月, 中科院宣布一项足以载入半导体史册的重大突破——我国科研团队成功研发出全球首台全固态深紫外 (DUV) 激光光源系统, 理论上可支撑 3nm 芯片制造工艺. 已知 $1\text{nm} = 0.0000001\text{cm}$, 则 3nm 用科学记数法表示为_____ cm.

【答案】 3×10^{-7}

【解析】

【分析】 本题主要考查了科学记数法表示绝对值小于 1 的数，

将小数写成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq a < 10$ ， n 为负整数.

【详解】 解： $3\text{nm} = 0.0000003\text{cm} = 3 \times 10^{-7} \text{cm}$.

故答案为： 3×10^{-7} .

11. 在实数范围内因式分解： $2x^2 - 5x - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2\left(x - \frac{5 + \sqrt{33}}{4}\right)\left(x - \frac{5 - \sqrt{33}}{4}\right)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分解因式，解一元二次方程，熟练掌握解一元二次方程的方法，是解题的关键. 通过求解一元二次方程 $2x^2 - 5x - 1 = 0$ 得到实数根，然后根据根写出因式分解形式即可.

【详解】 解： 方程 $2x^2 - 5x - 1 = 0$,

其中 $a = 2$, $b = -5$, $c = -1$,

判别式： $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 25 + 8 = 33$,

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4},$$

$$\text{即： } x_1 = \frac{5 + \sqrt{33}}{4}, \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{33}}{4},$$

$$\text{因此 } 2x^2 - 5x - 1 = 2\left(x - \frac{5 + \sqrt{33}}{4}\right)\left(x - \frac{5 - \sqrt{33}}{4}\right),$$

$$\text{故答案为： } 2\left(x - \frac{5 + \sqrt{33}}{4}\right)\left(x - \frac{5 - \sqrt{33}}{4}\right).$$

12. 2025 年暑假期间，某市科技馆举行了“筑梦启航，探索科学”活动. 活动结束后，所有同学们互赠礼物，共送出 132 份礼物，则参加此次活动同学人数为_____.

【答案】 12

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用，设参加此次活动同学人数有 x 人，由题意得 $x(x-1) = 132$ ，然后解方程并检验即可，读懂题目，找出题目中的等量关系列出方程是解题的关键.

【详解】解：设参加此次活动同学人数有 x 人，

由题意得： $x(x-1)=132$ ，

整理得： $x^2-x-132=0$ ，

解得： $x_1=12$ ， $x_2=-11$ （不符合题意，舍去），

故答案为：12.

13. 若 a 、 b 是方程 $x^2+2x-2025=0$ 的两个实数根，则 a^2+3a+b 的值为_____.

【答案】2023

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程的解和根与系数的关系，利用一元二次方程的解和根与系数的关系，由 a 是方程根得 $a^2+2a=2025$ ，由根与系数关系得 $a+b=-2$ ，代入所求代数式计算即可.

【详解】解： $\because a$ 是方程 $x^2+2x-2025=0$ 的根，

$\therefore a^2+2a-2025=0$ ，即 $a^2+2a=2025$ ，

又 $\because a, b$ 是方程的两个实数根，

$\therefore a+b=\frac{-2}{1}=-2$ ，

$\therefore a^2+3a+b=(a^2+2a)+(a+b)=2025+(-2)=2023$.

故答案为：2023.

14. 若用去分母的方法解关于 x 的分式方程 $\frac{2}{x-2}+\frac{kx}{x^2-4}=\frac{3}{x+2}$ 时有增根，则 $k=_____$.

【答案】-4 或 6

【解析】

【分析】本题主要考查了根据分式方程的解的情况求参数，先去分母将分式方程化为整式方程；然后确定原方程的分母为零的 x 值，即增根可能为 $x=2$ 或 $x=-2$ ；最后将增根代入整式方程求解即可.

【详解】解：原方程为 $\frac{2}{x-2}+\frac{kx}{x^2-4}=\frac{3}{x+2}$ ，其中 $x^2-4=(x-2)(x+2)$ ，公分母为 $(x-2)(x+2)$ ，

去分母，两边同乘 $(x-2)(x+2)$ ，得：

$2(x+2)+kx=3(x-2)$ ，

化简得： $2x+4+kx=3x-6$ ，

移项整理得： $(k-1)x+10=0$ ，

由 $(x-2)(x+2)=0$ ，得： $x=2$ 或 $x=-2$ ，

即增根为 $x=2$ 或 $x=-2$ ，

代入 $x=2$ 得： $(k-1)\times 2+10=0$ ，

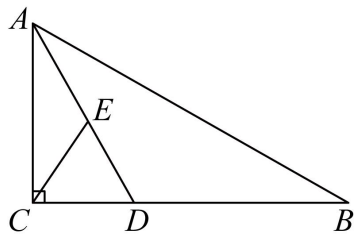
解得： $k=-4$ ，

代入 $x=-2$ 得： $(k-1)\times (-2)+10=0$ ，

解得： $k=6$ 。

故答案为： -4 或 6 。

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $\angle B=30^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ， E 是 AD 中点，若 $BD=9$ ，则 CE 的长为_____



【答案】 $\frac{9}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了直角三角形的性质，等腰三角形的判定，角平分线的定义，由直角三角形的性质可得 $\angle BAC=60^\circ$ ，即得 $\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=30^\circ$ ，得到 $AD=BD=9$ ，再根据直角三角形的性质即可求解，掌握以上知识点是解题的关键。

【详解】 解： $\because \angle ACB=90^\circ$ ， $\angle B=30^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC=90^\circ-\angle B=60^\circ$ ，

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ，

$\therefore \angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$ ，

$\therefore \angle BAD=\angle B$ ，

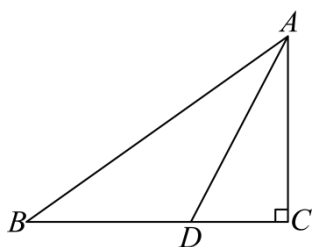
$\therefore AD=BD=9$ ，

$\because$ 点 E 是 AD 中点，

$\therefore CE=\frac{1}{2}AD=\frac{9}{2}$ ，

故答案为： $\frac{9}{2}$ 。

16. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle BAC$ 的平分线 AD 交 BC 于点 D , $BC = 12$, $AC = 9$, 那么 BD 的长是_____.



【答案】 $\frac{15}{2}$

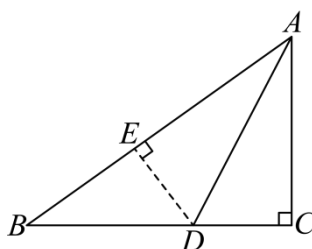
【解析】

【分析】 本题主要考查了角平分线的性质定理, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理的运用, 掌握以上知识的综合运用是解题的关键.

过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E , 可证得 $\triangle AED \cong \triangle ACD$, 则 $AE = AC = 9$, 由勾股定理可得 $AB = 15$, 则 $BE = 6$, 设 $BD = x$, 根据勾股定理列方程即可求解.

【详解】 解: 如图, 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ,

$\therefore \angle DEA = \angle DEB = 90^\circ$,



在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 12$, $AC = 9$,

$\therefore AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$, $\angle DEA = \angle C$,

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$, $\angle C = 90^\circ$, $DE \perp AB$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$, $DE = DC$,

在 $\text{Rt}\triangle AED$ 和 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} AD = AD \\ DE = DC \end{cases}$$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle ACD$ (直角三角形的全等判定定理),

$\therefore AE = AC = 9$,

$\therefore BE = AB - AE = 6$,

设 $BD = x$ ，则 $DE = DC = 12 - x$ ，

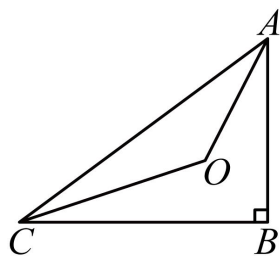
在 $\text{Rt}\triangle BED$ 中， $BD^2 = BE^2 + DE^2$ ，即 $x^2 = 6^2 + (12 - x)^2$ ，

解得 $x = \frac{15}{2}$ ，

$\therefore BD = \frac{15}{2}$ 。

故答案为： $\frac{15}{2}$ 。

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ，点 O 是 $\angle CAB$ 、 $\angle ACB$ 平分线的交点，且 $BC = 8\text{cm}$ ， $AC = 10\text{cm}$ ，则点 O 到边 AB 的距离为 _____ cm 。

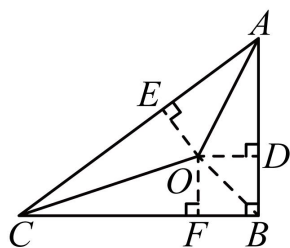


【答案】2

【解析】

【分析】本题考查角平分线定理，勾股定理和三角形面积公式，掌握角平分线定理是解题关键。连接 OB ，过点 O 分别作 AB 、 AC 、 BC 的垂线，垂足为 D 、 E 、 F ，根据角平分线定理，点 O 到三角形的三边的距离都相等，即 $OD = OE = OF$ 。结合三角形面积公式，可以求出点 O 到边 AB 的距离。

【详解】解：如图，连接 OB ，过点 O 分别作 $OD \perp AB$ 于点 D ， $OE \perp AC$ 于点 E ， $OF \perp BC$ 于点 F ，



$\because \angle B = 90^\circ$ ， $BC = 8\text{cm}$ ， $AC = 10\text{cm}$ ，

$\therefore$ 由勾股定理可得， $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6(\text{cm})$ ，

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24\text{cm}^2$ ，

$\because$ 点 O 是 $\angle CAB$ 、 $\angle ACB$ 平分线的交点，

又 $\because OD \perp AB$ ， $OE \perp AC$ ， $OF \perp BC$ ，

$\therefore OD = OE = OF$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} AB \cdot OD + \frac{1}{2} AC \cdot OE + \frac{1}{2} BC \cdot OF,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 6OD + \frac{1}{2} \times 8OD + \frac{1}{2} \times 10OD = 24,$$

解得, $OD = 2\text{cm}$,

$\therefore$ 点 O 到边 AB 的距离为 2cm .

故答案为: 2.

18. 已知, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=3$, $\angle A=22.5^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 翻折使得点 B 与点 A 重合, 折痕与边 AC 交于点 P , 如果 $AP=4$, 那么 AC 的长为_____

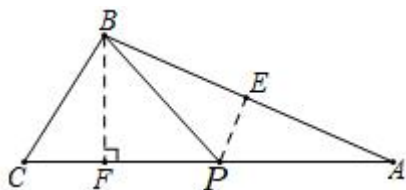
【答案】 $5+2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 过 B 作 $BF \perp CA$ 于 F , 构造直角三角形, 分两种情况讨论, 利用勾股定理以及等腰直角三角形的性质, 即可得到 AC 的长.

【详解】 分两种情况:

①当 $\angle C$ 为锐角时, 如图所示, 过 B 作 $BF \perp AC$ 于 F ,



由折叠可得, 折痕 PE 垂直平分 AB ,

$$\therefore AP=BP=4,$$

$$\therefore \angle BPC=2\angle A=45^\circ,$$

$\therefore \triangle BFP$ 是等腰直角三角形,

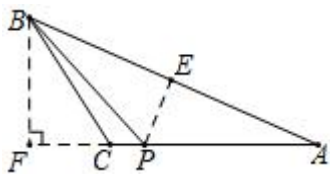
$$\therefore BF=PF=2\sqrt{2},$$

又 $\because BC=3$,

$$\therefore \text{Rt}\triangle BFC \text{ 中, } CF=\sqrt{BC^2-BF^2}=1,$$

$$\therefore AC=AP+PF+CF=5+2\sqrt{2};$$

②当 $\angle ACB$ 为钝角时, 如图所示, 过 B 作 $BF \perp AC$ 于 F ,



同理可得， $\triangle BFP$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore BF=FP=2\sqrt{2},$$

又 $\because BC=3$,

$$\therefore \text{Rt}\triangle BCF \text{ 中, } CF=\sqrt{BC^2-BF^2}=1,$$

$$\therefore AC=AF-CF=3+2\sqrt{2}.$$

故答案为： $5+2\sqrt{2}$ 或 $3+2\sqrt{2}$.

【点睛】本题主要考查了折叠问题以及勾股定理的运用，解决问题的关键是分两种情况画出图形进行求解。解题时注意：折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等。

三、简答题（本大题共 4 题，每题 5 分，满分 20 分）

19. 计算： $\sqrt{27}-\sqrt{2\frac{1}{4}}+\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}-\frac{2}{1+\sqrt{3}}.$

【答案】 $\sqrt{3}+\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的性质以及二次根式的混合运算，将原式正确化简是解本题的关键。根据二次根式的性质将原式进行化简，然后根据二次根式混合运算法则进行计算即可。

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \sqrt{27}-\sqrt{2\frac{1}{4}}+\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}-\frac{2}{1+\sqrt{3}} \\ & =3\sqrt{3}-\sqrt{\frac{9}{4}}+|\sqrt{3}-2|-\frac{2\times(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})\times(1-\sqrt{3})} \\ & =3\sqrt{3}-\frac{3}{2}+2-\sqrt{3}+1-\sqrt{3} \\ & =\sqrt{3}+\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

20. 解方程： $2x(x-3)=7.$

【答案】 $x_1 = \frac{3+\sqrt{23}}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{23}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程，熟练掌握解一元二次方程的一般方法，是解题的关键。利用公式法解一元二次方程即可。

【详解】 解： $2x(x-3)=7$,

原方程可变为： $2x^2-6x-7=0$,

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2 \times (-7) = 92,$$

$$\therefore x = \frac{6 \pm \sqrt{92}}{2 \times 2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{23}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{23}}{2},$$

$$\text{即 } x_1 = \frac{3+\sqrt{23}}{2}, \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{23}}{2}.$$

21. 解方程： $\frac{3x^2}{x^2+x-2} - \frac{x}{x-1} = 1$.

【答案】 $x=2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解分式方程，熟练掌握解分式方程的一般方法，是解题的关键。先去分母，变分式方程为整式方程，然后解整式方程，最后对方程的解进行检验即可。

【详解】 解： $\frac{3x^2}{x^2+x-2} - \frac{x}{x-1} = 1$,

去分母得： $3x^2 - x(x+2) = x^2 + x - 2$,

化简得： $x^2 - 3x + 2 = 0$,

解整式方程得： $x_1 = 1$, $x_2 = 2$,

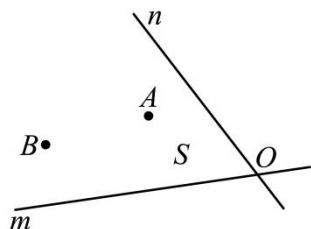
检验：把 $x_1 = 1$ 代入 $x^2 + x - 2$ 得： $x^2 + x - 2 = 0$,

把 $x_2 = 2$ 代入 $x^2 + x - 2$ 得： $x^2 + x - 2 \neq 0$,

$\therefore x_1 = 1$ 是原方程的增根，

$x = 2$ 是原方程的根。

22. 为了解决市民的“菜篮子”问题，政府准备在S区建立一个蔬菜配送中心 E ， A 、 B 两个蔬菜基地向配送中心供应新鲜的蔬菜，再由配送中心通过 m 和 n 两条高速公路送到市区菜场，要使这个配送中心到蔬菜基地的距离相等，同时到两条公路的距离也相等，这个蔬菜配送中心应该建于何处？在图上标出配送中心 E 的位置。（保留作图痕迹，不写作法，要写答句）



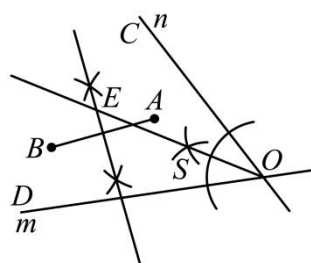
【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查了尺规作图---作角平分线，线段的垂直平分线，涉及角平分线的性质定理和线段垂直平分线的性质，熟练掌握角平分线的性质定理和线段垂直平分线的性质是解题的关键。

先连接线段 AB ，然后作出线段 AB 的垂直平分线，再作出两公路 m 、 n 夹角的角平分线 QE ，与线段 AB 的垂直平分线相交于点 E ，根据角平分线的性质定理可知点 E 到 m 、 n 的距离相等和线段垂直平分线的性质知 $EA = EB$ ，即点 E 为所求。

【详解】解：如图，点 E 即为所求；



四、解答题（本大题共5题，满分38分）

23. 市百一店童装柜在销售中发现：某童装平均每天可售出30件，每件盈利40元。为了迎接新年，商场决定采取适当的降价措施，扩大销售量，增加盈利。经市场调查发现：如果每件童装降价1元，那么平均每天就可多售出3件。为保持节后销售价格的稳定性，降价不能超过15元。要想平均每天销售这种童装盈利1800元，那么每件童装应降价多少元？

【答案】10元

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键。设每件童装应降价 x 元，则每件盈利 $(40 - x)$ 元，每天可售出 $(30 + 3x)$ 件，利用每天销售童装获得的总利润=每

件童装的销售利润 $\times$ 每天的销售量,即可得出关于 x 的一元二次方程,解之即可得出 x 的值,再结合降价不能超过15元即可得出每件童装应降价10元.

【详解】解:设每件童装应降价 x 元,则每件盈利 $(40-x)$ 元,每天可售出 $(30+3x)$ 件,

依题意得: $(40-x)(30+3x)=1800$,

整理得: $x^2-30x+200=0$,

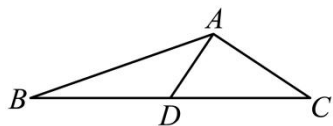
解得: $x_1=10$, $x_2=20$,

又 $\because$ 降价不能超过15元,

$\therefore x=10$,

答:每件童装应降价10元.

24. 如图,已知在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边的中线, $AB=5$, $AC=3$, $AD=2$.求 $\triangle ABC$ 的面积.



【答案】 $\triangle ABC$ 的面积为 6

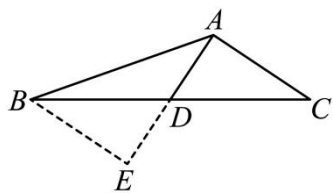
【解析】

【分析】本题主要考查了勾股定理的逆定理,全等三角形的判定与性质,三角形的面积,掌握相应知识的运用是解题的关键.

延长 AD 至点 E ,使 $DE=AD$,连接 BE ,可证 $\triangle BED \cong \triangle CAD$,则 $BE=AC$, $S_{\triangle BED}=S_{\triangle CAD}$,则

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABE}$,根据勾股定理逆定理可得 $\angle E=90^\circ$,计算出 $\triangle ABE$ 的面积即可求解.

【详解】解:如图,延长 AD 至点 E ,使 $DE=AD$,连接 BE ,



$\because AD$ 为 BC 边的中线,

$\therefore BD=CD$,

在 $\triangle BED$ 和 $\triangle CAD$ 中

$$\begin{cases} DE=DA \\ \angle ADC=\angle EDB, \\ DB=DC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BED \cong \triangle CAD (\text{SAS}),$$

$$\therefore BE = AC = 3, \quad S_{\triangle BED} = S_{\triangle CAD},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BED} = S_{\triangle ABE},$$

$$\therefore AD = 2,$$

$$\therefore AE = AD + DE = 4,$$

在 $\triangle ABE$ 中, $AB = 5$, $BE = 3$, $AE = 4$,

$$\therefore BE^2 + AE^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = AB^2,$$

$$\therefore \angle E = 90^\circ,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} BE \cdot AE = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6.$$

25. 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2 + 2(m+1)x + m - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若该方程的两个实数根分别为 x_1 、 x_2 , 且 $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = -1$, 求 m 的值.

【答案】 (1) $m > -\frac{1}{3}$ 且 $m \neq 0$

(2) $m = \sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查根与系数的关系及根的判别式, 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系: 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根. 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根 x_1, x_2 , 满足 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$,

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

(1) 根据方程有两个根可得 $\Delta > 0$, 再结合 $m \neq 0$ 即可解决问题;

(2) 利用根与系数的关系即可解决问题.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 + 2(m+1)x + m - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = [2(m+1)]^2 - 4 \times m \times (m-1) > 0,$$

解得: $m > -\frac{1}{3}$.

又 $\because m \neq 0$,

$\therefore m$ 的取值范围是 $m > -\frac{1}{3}$ 且 $m \neq 0$.

【小问 2 详解】

解: $\because$ 该方程有两个实数根分别为 x_1 、 x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{2m+2}{m}, \quad x_1 x_2 = \frac{m-1}{m},$$

$$\text{又 } \because x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = -1,$$

$$\therefore x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -1,$$

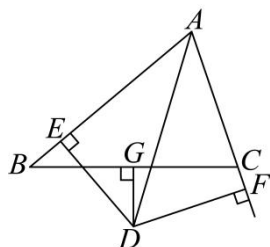
$$\therefore \frac{m-1}{m} \cdot \left(-\frac{2m+2}{m}\right) = -1,$$

$$\text{解得: } m_1 = \sqrt{2}, m_2 = -\sqrt{2},$$

经检验 $m_1 = \sqrt{2}, m_2 = -\sqrt{2}$ 是原方程的解, 但 $m_2 = -\sqrt{2} < -\frac{1}{3}$, 不符合题意舍去,

$$\therefore m = \sqrt{2}.$$

26. 如图, $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$, $DG \perp BC$ 且平分 BC , $DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp AC$ 于 F .



(1) 求证: $BE = CF$;

(2) 探究 AB 、 AC 和 BE 的数量关系, 并说明理由.

【答案】(1) 见解析;

(2) $AB = AC + 2BE$, 理由见解析.

【解析】

【分析】本题考查了角平分线的性质定理、全等三角形的判定与性质、线段垂直平分线的性质等知识, 正确找出全等三角形是解题关键.

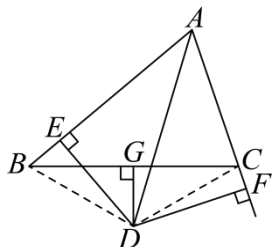
(1) 连接 BD 、 CD , 先证出 $BD = CD$, $DE = DF$, 再证出 $\text{Rt}\triangle BED \cong \text{Rt}\triangle CFD$, 根据全等三角形的

性质即可得证;

(2) 先证出 $\text{Rt}\triangle AED \cong \text{Rt}\triangle AFD$, 根据全等三角形的性质可得 $AE = AF$, 进一步利用线段的和差进行证明即可.

【小问 1 详解】

证明: 如图, 连接 BD 、 CD ,



$\because DG \perp BC$ 且平分 BC ,

$\therefore BD = CD$,

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp AC$ 于 F ,

$\therefore DE = DF$, $\angle DEB = \angle DFC = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle BED$ 与 $\text{Rt}\triangle CFD$ 中,

$$\begin{cases} DE = DF \\ BD = CD \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle BED \cong \text{Rt}\triangle CFD (\text{HL})$,

$\therefore BE = CF$.

【小问 2 详解】

解: $AB = AC + 2BE$, 理由如下:

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp AC$ 于 F ,

$\therefore DE = DF$, $\angle DEB = \angle DFC = 90^\circ$,

$\because AD = AD$,

$\therefore \text{Rt}\triangle AED \cong \text{Rt}\triangle AFD (\text{HL})$,

$\therefore AE = AF$,

$\therefore AE = AF = AC + CF$,

$\because BE = CF$,

$\therefore AE = AC + BE$,

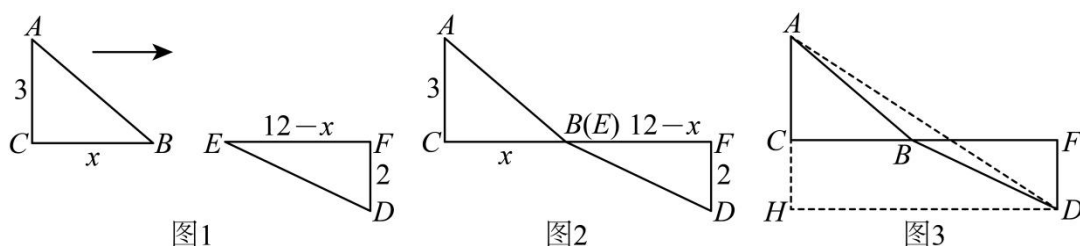
$\therefore AB = AE + BE = AC + 2BE$.

27. “数形结合”是数学中重要思想方法，在遇到一些具备一定特征的代数问题时，有时会将其转化为更直观的几何问题解决. 先阅读以下材料，然后解答后面的问题.

例：求代数式 $\sqrt{x^2+3^2} + \sqrt{(12-x)^2+2^2}$ 的最小值.

分析：代数式 $\sqrt{x^2+3^2}$ 和 $\sqrt{(12-x)^2+2^2}$ 中出现了两数平方和的形式，容易联想到直角三角形中三边之间的关系，可将 $\sqrt{x^2+3^2}$ 看作是直角边分别是 x 和 3 的直角三角形的斜边， $\sqrt{(12-x)^2+2^2}$ 看作是直角边分别是 $12-x$ 和 2 的直角三角形的斜边，于是，我们构造两个 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle DEF$ （如图1），如图2，当直角边 BC 和 EF 在同一直线上且点 E 与点 B 重合.

这时 $CF = x + 12 - x = 12$ ， $AC = 3$ ， $DF = 2$ ，问题就变成“点 B 在线段 CF 的何处时， $AB + DB$ 最短？”



(1) 在图3中，代数式 $\sqrt{x^2+3^2} + \sqrt{(12-x)^2+2^2}$ 的最小值可用线段_____的长表示，该线段的长为_____.

(2) 若将原问题中“ $12-x$ ”改成“ $12+x$ ”，能否利用(1)的结论解决？（即求代数式 $\sqrt{x^2+3^2} + \sqrt{(12+x)^2+2^2}$ 的最小值）若能，请写出解答过程并求解；若不能，请说明理由.

(3) 请使用与(1)中类似的方法求 $\sqrt{x^2+3^2} - \sqrt{(12-x)^2+2^2}$ 的最大值.（请画出示意图并求解）

【答案】 (1) AD ；13

(2) 能利用(1)的结论解决； $\sqrt{x^2+3^2} + \sqrt{(12+x)^2+2^2}$ 的最小值为13

(3) $\sqrt{x^2+3^2} - \sqrt{(12-x)^2+2^2}$ 的最大值为 $\sqrt{145}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了数形结合思想、勾股定理的几何应用以及三角形三边关系，将代数式转化为几何图形中的线段长度（直角三角形斜边），利用三角形三边关系变形规则是解题的关键.

(1) 由三角形三边关系可知 $AB + BD \geq AD$ ，当 A ， B ， D 三点共线时， $AB + BD = AD$ ，则 $\sqrt{x^2+3^2} + \sqrt{(12-x)^2+2^2}$ 的最小值可用线段 AD 的长来表示；过点 D 作 $DH \perp AC$ 交 AC 的延长线于 H ，则四边形 $CHDF$ 为矩形，可得 CH ， DH 的长，从而可得 AH 的长，再利用勾股定理可得 AD 的长，即可得结论；

(2) 在直角坐标系中构造 $\text{Rt}\triangle OAC$ 和 $\text{Rt}\triangle DEC$ ， $A(0, -3)$ ， $D(-12, 2)$ ， $C(x, 0)$ ，则 $OA = 3$ ， $OE = 12$ ，

$DE = 2$, $OC = |x|$, $CE = x - (-12) = x + 12$, $\therefore DC = \sqrt{(x+12)^2 + 2^2}$, $AC = \sqrt{|x|^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 3^2}$,
 连接 AD , 过点 A 作 $AF \perp DE$ 交 DE 延长线于点 F , 则四边形 $AOEF$ 是矩形, 可得 AF , EF 的长, 从而
 可得 DF , 再利用勾股定理可得 AD , 根据三角形的两边之和大于第三边可得 $DC + AC \geq AD$, 当 A , C ,
 D 三点共线时, $DC + AC = AD$ 即可得结论;

(3) 构造 $Rt\triangle ABC$ 和 $Rt\triangle DEC$, $AB = 3$, $DE = 2$, $BE = 12$,

设 $BC = x$, 则 $CE = x - 12$, $AC = \sqrt{x^2 + 3^2}$, $CD = \sqrt{(x-12)^2 + 2^2} = \sqrt{(12-x)^2 + 2^2}$, 连接 AD ,
 过点 D 作 $DF \perp AB$ 于点 F , 则四边形 $DEBF$ 是矩形, 可得 DF , BF 的长, 从而可得 AF , 再利用勾股
 定理可得 AD , 根据三角形的两边之和大于第三边可得 $AC - CD \leq AD$, 当 A , D , C 三点共线时,
 $AC - DC = AD$ 即可得结论;

【小问 1 详解】

解: 由三角形三边关系可知 $AB + BD \geq AD$, 当 A , B , D 三点共线时, $AB + BD = AD$, 则

$\sqrt{x^2 + 3^2} + \sqrt{(12-x)^2 + 2^2}$ 的最小值可用线段 AD 的长来表示;

过点 D 作 $DH \perp AC$ 交 AC 的延长线于 H , 则四边形 $CHDF$ 为矩形,

$$\therefore CH = DF = 2, \quad DH = CF = 12,$$

$$\therefore AH = AC + CH = 5,$$

$$\text{在 } Rt\triangle AHD \text{ 中, } AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = 13,$$

故答案为: AD ; 13.

【小问 2 详解】

解: 能利用 (1) 的结论解决.

过程如下:

如图, 在直角坐标系中构造 $Rt\triangle OAC$ 和 $Rt\triangle DEC$, $A(0, -3)$, $D(-12, 2)$, $C(x, 0) (x < 0)$, 则 $OA = 3$,

$$OE = 12, \quad DE = 2, \quad OC = |x|, \quad CE = x - (-12) = x + 12,$$

$$\therefore DC = \sqrt{(x+12)^2 + 2^2}, \quad AC = \sqrt{|x|^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 3^2},$$

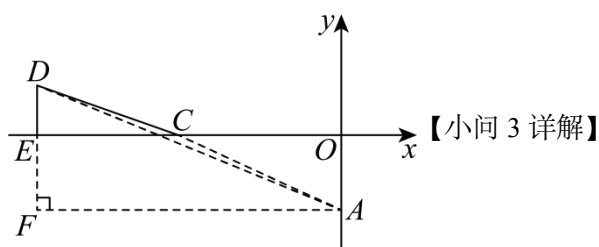
过点 A 作 $AF \perp DE$ 交 DE 延长线于点 F , 则四边形 $AOEF$ 是矩形,

$$\therefore AF = OE = 12, \quad EF = OA = 2,$$

$$\therefore DF = DE + EF = 5,$$

$$\therefore AD = \sqrt{DF^2 + AF^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$$

$\therefore DC + AC \geq AD$, 即 $\sqrt{(12+x)^2 + 2^2} + \sqrt{x^2 + 3^2} \geq 13$, 当 A, C, D 三点共线时, $DC + AC = AD$,
 $\therefore \sqrt{x^2 + 3^2} + \sqrt{(12+x)^2 + 2^2}$ 的最小值为 13.



解: 如图, 构造 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle DEC$, $AB = 3$, $DE = 2$, $BE = 12$,

设 $BC = x$, 则 $CE = x - 12$, $AC = \sqrt{x^2 + 3^2}$, $CD = \sqrt{(x-12)^2 + 2^2} = \sqrt{(12-x)^2 + 2^2}$,

连接 AD , 过点 D 作 $DF \perp AB$ 于点 F , 则四边形 $DEBF$ 是矩形,

$\therefore DF = BE = 12$, $BF = DE = 2$,

$\therefore AF = AB - BF = 1$,

在 $\text{Rt}\triangle AFD$ 中, $AD = \sqrt{DF^2 + AF^2} = \sqrt{12^2 + 1^2} = \sqrt{145}$,

$\therefore AC - CD \leq AD$, 即 $\sqrt{x^2 + 3^2} - \sqrt{(12-x)^2 + 2^2} \leq \sqrt{145}$, 当 A, D, C 三点共线时, $AC - DC = AD$,

$\therefore \sqrt{x^2 + 3^2} - \sqrt{(12-x)^2 + 2^2}$ 的最大值为 $\sqrt{145}$.

