

张江集团中学 2025 学年第一学期初二年级数学学科阶段练习二

时间：100 分钟 满分：100 分

一、选择题（每题 2 分，共 12 分）

1. 下列根式中，最简二次根式是（ ）

- A. $\sqrt{18a^3}$ B. $\frac{2\sqrt{8a}}{3a}$ C. $\sqrt{3a^2+4b^2}$ D. $\sqrt{\frac{b}{a}}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了最简二次根式的定义，关键是熟练应用定义.

由最简二次根式需满足：①被开方数不含能开方的因数或因式；②被开方数不含分母，进行判断即可得到答案.

【详解】解：A: $\sqrt{18a^3} = \sqrt{3^2 a^2 \times 2a} = 3a\sqrt{2a}$ ，不符合题意；

B: $\frac{2\sqrt{8a}}{3a} = \frac{2\sqrt{2^2 \times 2a}}{3a} = \frac{2 \times 2\sqrt{2a}}{3a} = \frac{4\sqrt{2a}}{3a}$ ，不符合题意；

C: $\sqrt{3a^2+4b^2}$ 无法分解为因数或因式的平方且不含分母，是最简二次根式，符合题意；

D: $\sqrt{\frac{b}{a}}$ 被开方数含分母，不符合题意.

故选：C.

2. 下列方程不是一元二次方程的是（ ）

- A. $x^2+1=2x$ B. $(x-1)(x+1)=x(x+1)$
C. $2x^2-3x=1+x^2$ D. $0=x^2$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的定义；根据一元二次方程的定义（整式方程、一个未知数、未知数最高次数为 2、二次项系数不为 0），对每个选项进行化简和判断

【详解】解：A、 $x^2+1=2x$ 是一元二次方程，故该选项不符合题意；

B、 $(x-1)(x+1)=x(x+1)$ 即 $x^2-1=x^2+x$ ， $x=-1$ ，不是一元二次方程，故该选项符合题意；

C、 $2x^2-3x=1+x^2$ 是一元二次方程，故该选项不符合题意；

D、 $0 = x^2$ 是一元二次方程，故该选项不符合题意；

故选：B.

3. 关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2 - 2x + m^2 - 2m - 3 = 0$ 有一根为零，则 m 的值为 ()

A. -1 或 3

B. 3

C. -1

D. 0

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程的根的定义，因式分解法解一元二次方程. 把 $x = 0$ 代入方程式，再解关于 m 的一元二次方程即可.

【详解】解：∵关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2 - 2x + m^2 - 2m - 3 = 0$ 有一根为零，

把 $x = 0$ 代入得到， $m^2 - 2m - 3 = 0$ ，

解得 $m = 3$ 或 -1 ，

∵ $m+1 \neq 0$ ，

∴ $m \neq -1$ ，

∴ $m = 3$.

故选：B.

4. 在关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 中，若 a 与 c 异号，则方程 ()

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法确定

【答案】A

【解析】

【分析】判断一元二次方程的根的情况，只要看根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的值的符号即可.

【详解】解：∵ a 与 c 异号，

∴ $ac < 0$ ，

∴ $-4ac > 0$ ， $b^2 \geq 0$ ，

∴ $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ，

∴ 原方程有两个不相等的实数根.

故选 A.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式，有理数乘法符号法则，完全平方式非负性，一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系：(1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数

根；(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根. 熟练掌握是解题的关键.

5. 已知下列命题中, 正确的是 ()

A. 有一个锐角相等的两个直角三角形全等

B. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 CD 是边 AB 的中线, 且 $CD = \frac{1}{2}AB$, 则 $\triangle ABC$ 是直角三角形

C. 在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, D 是斜边 AB 上一点, 且 $CD = \frac{1}{2}AB$, 则 D 是边 AB 的中点

D. 有一个锐角且一条边对应相等的两个直角三角形全等

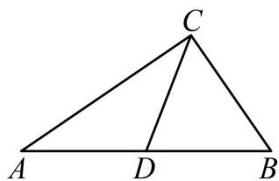
【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了命题的真假判断, 根据直角三角形全等, 中线性质, 等腰三角形的性质等知识点逐一分析各选项即可, 掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】解: A、一个锐角相等的两个直角三角形, 角度对应相等, 但边不一定相等, 故不一定全等, 原选项错误, 不符合题意;

B、如图,



$\because CD$ 是 AB 的中线,

$\therefore AD = BD$,

又 $\because CD = \frac{1}{2}AB$,

$\therefore AD = BD = CD$,

$\therefore \angle A = \angle ACD$, $\angle B = \angle BCD$,

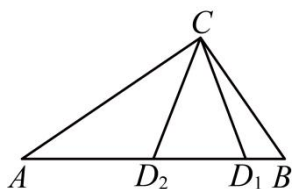
$\therefore \angle A + \angle ACD + \angle B + \angle BCD = 180^\circ$,

$\therefore \angle ACD + \angle BCD = 90^\circ$

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$, 即 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 原选项正确, 符合题意;

C、在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, D 是斜边 AB 上一点, 且 $CD = \frac{1}{2}AB$, 但 D 不一定是 AB 的中点,

例如, 如图,

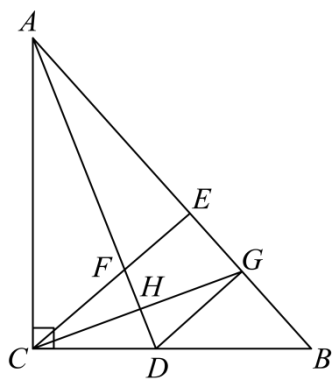


当 C 到 AB 的距离小于 $\frac{1}{2}AB$ 时, AB 上存在两个点使 $CD = \frac{1}{2}AB$, 原选项错误, 不符合题意;

D、有一个锐角且一条边对应相等的两个直角三角形, 边角位置不确定, 不一定全等, 原选项错误, 不符合题意;

故选: B.

6. 如图, 已知 ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ$, AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, CE 是 AB 边上的高, AD 与 CE 交于点 F , 过点 D 作 $DG \parallel CE$ 交 AB 于点 G , 联结 CG . 交 AD 于点 H , 则下列结论中, 不一定成立的是 ()



- A. $DC = DG$ B. $GD = GB$ C. $CF = GD$ D. $FH = DH$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了角平分线的性质、平行线的性质、等腰三角形的判定与性质等知识, 由 CE 是 AB 边上的高, $DG \parallel CE$, 推导出 $DG \perp AB$, 而 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, $DC \perp AC$, 所以 $DC = DG$, 可判断 A 不符合题意; 假设 $GD = GB$ 一定成立, 则 $\angle B = \angle GDB = 45^\circ$, 所以 $\angle CAB = \angle B = 45^\circ$, 推导出 $AC = BC$, 显然与已知条件不符, 所以 $GD = GB$ 不一定成立, 可判断 B 符合题意; 由 $\angle CAD = \angle BAD$, $\angle ACE = \angle B = 90^\circ - \angle BAC$, 证明 $\angle CFD = \angle CDF$, 得 $CF = CD = GD$, 可判断 C 不符合题意; 再证明 $\angle FCH = \angle DCH$, 则 $FH = DH$, 可判断 D 不符合题意, 于是得到问题的答案.

【详解】解: $\because CE$ 是 AB 边上的高, $DG \parallel CE$,

$$\therefore \angle DGB = \angle CEB = 90^\circ, \quad \angle AGD = \angle AEC = 90^\circ,$$

$$\therefore DG \perp AB,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \quad AD \text{ 是 } \angle BAC \text{ 的平分线},$$

$$\therefore DC \perp AC,$$

$\therefore DC = DG$ ，故 A 不符合题意；

假设 $GD = GB$ 一定成立，则 $\angle B = \angle GDB = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle CAB = \angle B = 45^\circ$ ，

$\therefore AC = BC$ ，显然与已知条件不符，

$\therefore GD = GB$ 不一定成立，故 B 符合题意；

$\because \angle CAD = \angle BAD$ ， $\angle ACE = \angle B = 90^\circ - \angle BAC$ ，

$\therefore \angle CFD = \angle CAD + \angle ACE = \angle BAD + \angle B = \angle CDF$ ，

$\therefore CF = CD$ ，

$\because CD = GD$ ，

$\therefore CF = GD$ ，故 C 不符合题意；

$\because \angle DGC = \angle FCH$ ， $\angle DGC = \angle DCH$ ，

$\therefore \angle FCH = \angle DCH$ ，

$\therefore FH = DH$ ，

故 D 不符合题意，

故选：B.

二、填空题（每题 2 分，共 28 分）

7. 等式 $\sqrt{\frac{3-x}{1+x}} = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{1+x}}$ 成立的 x 的取值范围是_____.

【答案】 $-1 < x \leq 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的乘除法及二次根式有意义的条件，根据二次根式有意义的条件及分式有意义的条件，列出不等式，进而得出答案.

【详解】 解： $\because$ 等式 $\sqrt{\frac{3-x}{1+x}} = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{1+x}}$ 成立，

$\therefore 3-x \geq 0$ 且 $1+x > 0$ ，

解得： $-1 < x \leq 3$ ，

故答案为： $-1 < x \leq 3$.

8. 已知 $\sqrt{6} \approx 2.45$ ， $\sqrt{60} \approx 7.45$ ，那么 $\sqrt{60000} \approx$ _____.

【答案】 245

【解析】

【分析】 本题考查了求一个数的算术平方根；利用平方根的性质，将 $\sqrt{60000}$ 分解为 $\sqrt{6} \times 100$ ，然后代入已知近似值 $\sqrt{6} \approx 2.45$ 进行计算.

【详解】 解： 因为 $60000 = 6 \times 10000$ ，且 $10000 = 100^2$ ，

所以 $\sqrt{60000} = \sqrt{6 \times 10000} = \sqrt{6} \times \sqrt{10000} = \sqrt{6} \times 100$.

已知 $\sqrt{6} \approx 2.45$ ，

因此 $\sqrt{60000} \approx 2.45 \times 100 = 245$.

故答案为 245.

9. 比较大小 $\sqrt{7} - \sqrt{6}$ _____ $2\sqrt{2} - \sqrt{7}$

【答案】 >

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式比较大小，先根据分母有理化的方法得到 $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \sqrt{7} + \sqrt{6}$ ，

$\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}} = 2\sqrt{2} + \sqrt{7}$ ，再根据 $\sqrt{6} < \sqrt{7} < 2\sqrt{2}$ 得到 $\sqrt{7} - \sqrt{6} > 0, 2\sqrt{2} - \sqrt{7} > 0$ ，

$2\sqrt{2} + \sqrt{7} > \sqrt{7} + \sqrt{6}$ ，即可得到 $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} < \frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}$ ，则 $2\sqrt{2} - \sqrt{7} < \sqrt{7} - \sqrt{6}$ 。

【详解】 解： $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{7}+\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{7-6} = \sqrt{7} + \sqrt{6}$ ，

$\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}{(2\sqrt{2}-\sqrt{7})(2\sqrt{2}+\sqrt{7})} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}{8-7} = 2\sqrt{2} + \sqrt{7}$ ，

$\because \sqrt{6} < \sqrt{7} < 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore \sqrt{7} - \sqrt{6} > 0, 2\sqrt{2} - \sqrt{7} > 0, 2\sqrt{2} + \sqrt{7} > \sqrt{7} + \sqrt{6}$ ，

$\therefore \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} < \frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}$ ，

$\therefore 2\sqrt{2} - \sqrt{7} < \sqrt{7} - \sqrt{6}$ ，

故答案为：>.

10. 已知最简根式 $\sqrt{a^2-1}$ 与 $\sqrt{3a+9}$ 是同类二次根式，则 $a =$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查了同类二次根式，解一元二次方程；根据同类二次根式的定义，两个最简二次根式的被开方数必须相等，由此列出方程求解，并检验被开方数非负且根式为最简.

【详解】 解：由题意，得 $a^2 - 1 = 3a + 9$.

整理得 $a^2 - 3a - 10 = 0$,

因式分解得 $(a-5)(a+2) = 0$,

解得 $a = 5$ 或 $a = -2$.

当 $a = 5$ 时，被开方数 $a^2 - 1 = 24$ ， $3a + 9 = 24$ ，但 $\sqrt{24}$ 不是最简二次根式，与已知“最简根式”矛盾.

当 $a = -2$ 时，被开方数 $a^2 - 1 = 3$ ， $3a + 9 = 3$ ，且 $\sqrt{3}$ 是最简二次根式，符合条件.

故答案为 -2.

11. 在实数范围内分解因式： $2x^2 - 3xy - y^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}y\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}y\right)$

【解析】

【分析】 本题考查在实数范围内分解因式，通过令二次表达式等于零，解关于 x 的二次方程，利用求根公式得到根，然后写出因式分解形式.

【详解】 解：令 $2x^2 - 3xy - y^2 = 0$,

$$\therefore \Delta = (-3y)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-y^2) = 9y^2 + 8y^2 = 17y^2,$$

$$\text{则 } x = \frac{3y \pm \sqrt{17y^2}}{4} = \frac{3y \pm \sqrt{17}|y|}{4},$$

$$\text{当 } y \geq 0 \text{ 时, } x = \frac{(3 \pm \sqrt{17})y}{4},$$

$$\text{当 } y < 0 \text{ 时, } x = \frac{(3 \mp \sqrt{17})y}{4},$$

$$\text{所以根为 } x_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}y, \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{4}y,$$

因此, $2x^2 - 3xy - y^2 = 2\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}y\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}y\right)$.

故答案为: $2\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}y\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}y\right)$.

12. 已知关于 x 的一元二次方程 $(2a-1)x^2 - 8x + 6 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a < \frac{11}{6}$ 且 $a \neq \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 根据所给一元二次方程有两个不相等的实数根, 得出关于 a 的不等式, 据此可解决问题.
 本题主要考查了一元二次方程的定义, 根的判别式, 熟知一元二次方程根的判别式是解题的关键.

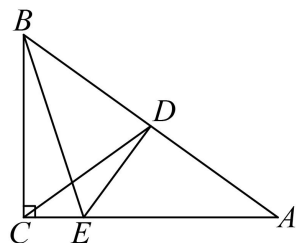
【详解】 解: $\because$ 一元二次方程 $(2a-1)x^2 - 8x + 6 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times (2a-1) \times 6 > 0 \text{ 且 } 2a-1 \neq 0,$$

$$\text{解得 } a < \frac{11}{6} \text{ 且 } a \neq \frac{1}{2},$$

$$\text{故答案为: } a < \frac{11}{6} \text{ 且 } a \neq \frac{1}{2}.$$

13. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 斜边 AB 的垂直平分线 DE 分别交 AB 、 AC 于点 D 、 E , $\angle ACD = 2\angle CBE$, 则 $\angle A$ 的度数为_____.



【答案】 36° ## 36 度

【解析】

【分析】 本题考查了直角三角形斜边中线性质的、垂直平分线性质的及等腰三角形性质, 解题关键是利用这些性质将角度关系转化为方程求解.

利用直角三角形斜边中线性质的得 $CD = AD$, 故 $\angle ACD = \angle A$; 结合题设 $\angle ACD = 2\angle CBE$, 设 $\angle CBE = x$, 则 $\angle A = 2x$; 由垂直平分线性质的得 $EB = EA$, 故 $\angle EBA = \angle A = 2x$; 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC + \angle A = 90^\circ$, 列方程即可解答.

【详解】 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 斜边 AB 的垂直平分线 DE 分别交 AB 、 AC 于点 D 、 E ,

$\therefore D$ 是斜边 AB 的中点, $EB = EA$

$$\therefore CD = AD = \frac{1}{2}AB, \quad \angle EBA = \angle A, \quad \angle ACD = \angle A,$$

设 $\angle CBE = x$,

$$\therefore \angle ACD = 2\angle CBE,$$

$$\therefore \angle A = 2x.$$

$$\angle EBA = \angle A = 2x$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ABC + \angle A = 90^\circ$$

$$\text{即 } \angle CBE + \angle EBA + \angle A = 90^\circ,$$

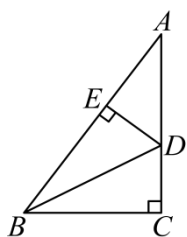
$$\therefore x + 2x + 2x = 90^\circ$$

$$\therefore x = 18^\circ$$

$$\therefore \angle A = 36^\circ.$$

故答案为: 36° .

14. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$, $DE \perp AB$ 于点 E , 如果 $BC = 3\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$, 那么 $\triangle AED$ 的周长为 _____ cm .



【答案】 6

【解析】

【分析】此题主要考查了全等三角形的判定与性质、勾股定理, 解本题的关键是得 $BE = BC = 3, CD = DE$.

先证明 $\triangle BCD \cong \triangle BED$ (AAS), 可得 $BE = BC = 3, CD = DE$, 再利用勾股定理求得 $AB = 5$, 进而利用三角形的周长和等量代换即可得出结论.

【详解】解: $\because BD$ 是 $\angle ABC$ 的角平分线,

$$\therefore \angle DBC = \angle DBA,$$

$$\because \angle C = 90^\circ, \quad DE \perp AB,$$

$$\therefore \angle C = \angle DEB = 90^\circ,$$

$$\text{又 } \because BD = BD,$$

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle BED (\text{AAS}),$$

$$\therefore BE = BC = 3\text{cm}, CD = DE,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } \angle C = 90^\circ, BC = 3\text{cm}, AC = 4\text{cm},$$

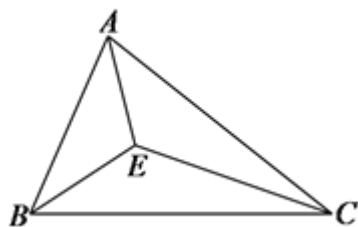
$$\therefore AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5(\text{cm}),$$

$$\therefore AE = AB - BE = 5 - 3 = 2(\text{cm}),$$

$$\therefore \triangle AED \text{ 的周长为 } AE + AD + DE = AE + AD + CD = AE + AC = 2 + 4 = 6(\text{cm}),$$

故答案为: 6.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC$, $\angle ACB$ 的平分线相交于点 E , 已知 $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle ACB = 40^\circ$, 则 $\angle AEB =$ _____.



【答案】 110°

【解析】

【详解】 试题解析: $\because \angle ABC = 60^\circ$, $\angle ACB = 40^\circ$,

$$\therefore \angle ABC = 80^\circ,$$

又 $\because \angle ABC$, $\angle ACB$ 交平分线交于点 E ,

$$\therefore AE \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle BAE = 40^\circ,$$

又 $\because BE$ 平分 $\angle ABC$ 且 $\angle B = 30^\circ$,

$$\therefore \angle AEB = 180^\circ - 40^\circ - 30^\circ = 110^\circ.$$

故答案为 110° .

16. 读诗词解题: 大江东去浪淘尽, 千古风流人物; 而立之年督东吴, 早逝英年两位数; 十位恰小个位三, 个位平方与寿符; 哪位同学算得快, 多少年华属周瑜? 则周瑜去世时的年龄是_____岁.

【答案】 36

【解析】

【分析】 设个位数字 x , 则十位数字为 $(x-3)$, 根据个位平方与寿符, 列出一元二次方程进行求解即可.

【详解】解：设个位数字 x ，则十位数字为 $(x-3)$ ，由题意，得：

$$x^2 = 10(x-3) + x,$$

整理，得： $x^2 - 11x + 30 = 0$ ，

解得： $x_1 = 5, x_2 = 6$ ，

当 $x = 5$ 时，两位数为：25；当 $x = 6$ 时，两位数为36，

$\therefore$ 而立之年，

$\therefore$ 25不合题意，舍去；

$\therefore$ 周瑜去世时的年龄是36岁；

故答案为：36.

【点睛】本题考查一元二次方程的应用．读懂题意，找准等量关系，正确的列出方程，是解题的关键．

17. 若关于 x 的方程 $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{k}{4-x^2}$ 有增根，则 k 的值为_____.

【答案】4或8

【解析】

【分析】本题考查解分式方程，理解分式方程的增根意义是解答的关键．

先确定分式方程的增根为使分母为零的 x 值，即 $x = 2$ 或 $x = -2$ ；然后去分母得到整式方程，代入增根求解 k 的值

【详解】解：去分母，两边同乘 $(x-2)(x+2)$ ，得 $2(x-2) - (x+2) = -k$ ，

化简得 $x - 6 = -k$ ，即 $x = 6 - k$ ，

$\therefore$ 方程的分母为 $x+2$ ， $x-2$ ， $4-x^2$ ，其中 $4-x^2 = -(x-2)(x+2)$ ，

故分母为零时， $x = 2$ 或 $x = -2$ ，即为可能增根，

若增根为 $x = 2$ ，则 $2 = 6 - k$ ，解得 $k = 4$ ；

若增根为 $x = -2$ ，则 $-2 = 6 - k$ ，解得 $k = 8$ ，

故 k 的值为4或8，

故答案为：4或8.

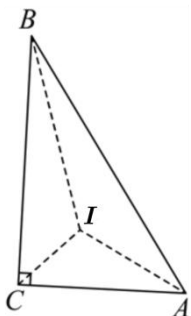
18. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 5$ ， $BC = 12$ ，在三角形内有一点 I 到边 AB 、 BC 、 AC 的距离均相等，那么这个相等的距离为_____.

【答案】2

【解析】

【分析】 本题考查勾股定理，先利用勾股定理求得 $AB = 13$ ，再根据三角形的面积公式求解即可.

【详解】 解：设点 I 到各边的距离为 x ，如图，连接 IA ， IB ， IC ，



$$\because \angle ACB = 90^\circ, \quad AC = 5, \quad BC = 12,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$$

$$\text{由题意得, } \frac{1}{2} AC \cdot x + \frac{1}{2} BC \cdot x + \frac{1}{2} AB \cdot x = \frac{1}{2} AC \cdot BC,$$

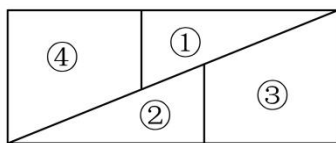
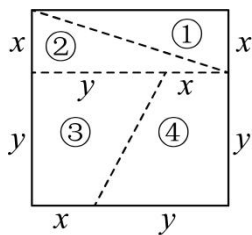
$$\text{即 } \frac{1}{2} \cdot x \cdot (5 + 12 + 13) = \frac{1}{2} \times 5 \times 12,$$

$$\text{解得 } x = 2,$$

故答案为：2.

19. 将正方形沿虚线（其中 $x < y$ ）剪成①、②、③、④四块图形，用这四块图形恰好能拼成一个如图所示

的矩形，则 $\frac{x}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

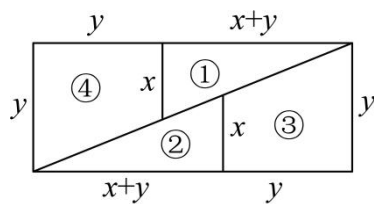
【解析】

【分析】 本题考查了整式的运算与图形面积，一元二次方程的根的计算，理解图示，掌握整式的运算，求根公式的计算是关键.

根据图示，把正方形面积，拼接矩形的面积运用整式的混合运算表示出来，再根据一元二次方程的求根公式的计算即可求解.

【详解】 解：根据题意，正方形的面积为 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$,

拼成一个矩形（非正方形）如下图，



$\therefore$ 矩形的面积为 $y(y+x+y) = xy + 2y^2$,

$$\therefore x^2 + 2xy + y^2 = xy + 2y^2,$$

$$\therefore x^2 + xy - y^2 = 0,$$

$$\therefore y \neq 0,$$

$$\therefore \text{等式两边同时除以 } y^2, \text{ 整理得, } \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 1 = 0,$$

$$\text{令 } \frac{x}{y} = t (t > 0), \text{ 则 } t^2 + t - 1 = 0,$$

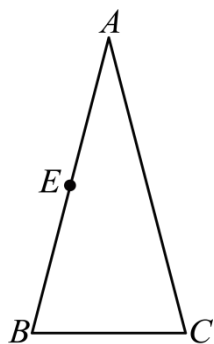
$$\text{解得, } t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore t = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (负值舍去),}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

20. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 8$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，点 E 是 AB 中点，点 D 在 AC 上， $DE = 2\sqrt{2}$ ，将 $\triangle ADE$ 沿着 DE 翻折，点 A 的对应点是点 F ，直线 EF 与 AC 交于点 G ，那么 $\triangle DGF$ 的面积 = _____.



【答案】 $\frac{8\sqrt{3}}{3} - 4$ 或 $\frac{8\sqrt{3}}{3} + 4$

【解析】

【分析】 本题主要考查折叠的性质，等腰三角形的判定及性质，勾股定理，含 30° 的直角三角形的性质，能够作出图形并分情况讨论是解题的关键.

通过计算 E 到 AC 的距离即 EH 的长度为 2，所以根据 DE 的长度有两种情况：①当点 D 在 H 点上方时，②当点 D 在 H 点下方时，两种情况都是利用含 30° 的直角三角形的性质和勾股定理求出 AH 、 DH 的长度，进而可求 AD 的长度，然后利用角度之间的关系证明 $AG = GE$ ，再利用等腰三角形的性质、直角三角形的性质求出 GQ 的长度，最后利用 $S_{\triangle DGF} = 2S_{\triangle AED} - S_{\triangle AEG}$ 即可求解.

【详解】 解：过点 E 作 $EH \perp AC$ 交 AC 于点 H ，过点 G 作 $GQ \perp AB$ 交 AB 于点 Q ，

$\because AB = 8$ ，点 E 是 AB 中点，

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AB = 4.$$

$\because EH \perp AC$ ，

$$\therefore \angle AHE = 90^\circ.$$

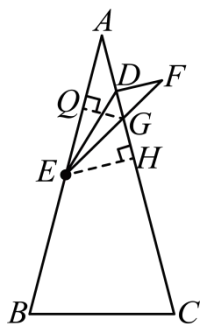
$\because \angle A = 30^\circ$ ， $AE = 4$ ，

$$\therefore EH = \frac{1}{2}AE = 2,$$

$$\therefore AH = \sqrt{AE^2 - EH^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}.$$

$\because DE = 2\sqrt{2}$ ， $\therefore$ 分两种情况：

①当点 D 在 H 点上方时，如图，



$$\therefore DH = \sqrt{DE^2 - EH^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2,$$

$$\therefore DH = EH, \quad AD = AH - DH = 2\sqrt{3} - 2,$$

$$\therefore \angle EDH = 45^\circ,$$

$$\therefore AG = GE.$$

$$\text{同理可得 } GQ = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore S_{\triangle DGF} = 2S_{\triangle AED} - S_{\triangle AEG},$$

$$\therefore S_{\triangle DGF} = 2 \times \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3} + 2) \times 2 - \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} + 4,$$

$$\text{综上所述, } \triangle DGF \text{ 的面积为 } \frac{8\sqrt{3}}{3} - 4 \text{ 或 } \frac{8\sqrt{3}}{3} + 4.$$

$$\text{故答案为: } \frac{8\sqrt{3}}{3} - 4 \text{ 或 } \frac{8\sqrt{3}}{3} + 4.$$

三、计算题 (每题 4 分, 共 20 分)

$$21. \frac{5}{4-\sqrt{11}} - \frac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{7}} - \frac{2}{3+\sqrt{7}};$$

【答案】 1.

【解析】

【详解】 试题分析: 先把每一个二次根式分母有理化, 然后再计算即可.

$$\text{试题解析: 解: 原式} = \frac{5(4+\sqrt{11})}{16-11} - \frac{4(\sqrt{11}+\sqrt{7})}{11-7} - \frac{2(3-\sqrt{7})}{9-7} = 4 + \sqrt{11} - \sqrt{11} - \sqrt{7} - 3 + \sqrt{7} = 1.$$

$$22. \text{解方程: } 2x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0.$$

$$\text{【答案】 } x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{4}, x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程, 原方程运用公式法求解即可.

$$\text{【详解】 解: } 2x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\text{这里 } a = 2, b = -3, c = \frac{1}{2},$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 9 - 4 = 5 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4},$$

$$\therefore x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}.$$

23. 解方程: $\frac{2x-5}{x^2+3x+2} + \frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} = 0.$

【答案】 $x = 6$

【解析】

【分析】 本题主要考查解分式方程，通过因式分解分母、通分将分式方程化为整式方程，求解后检验分母是否为零，得到有效解.

【详解】 解: $\frac{2x-5}{x^2+3x+2} + \frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} = 0,$

$$\therefore \frac{2x-5}{(x+1)(x+2)} + \frac{4}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x-2} = 0,$$

$$\therefore \frac{(2x-5)(x-2) + 4(x+1) - (x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-2)} = 0$$

$$\therefore (2x-5)(x-2) + 4(x+1) - (x+1)(x+2) = 0, \text{ 且 } (x+1)(x+2)(x-2) \neq 0,$$

$$\text{整理得 } x^2 - 8x + 12 = 0,$$

$$\therefore (x-6)(x-2) = 0,$$

$$\text{解得 } x = 6 \text{ 或 } x = 2,$$

检验: 当 $x = 2$ 时, 分母 $(x+1)(x+2)(x-2) = 0$, 舍去;

$$\text{当 } x = 6 \text{ 时, } (x+1)(x+2)(x-2) = 224 \neq 0,$$

$\therefore$ 原方程的解为 $x = 6$.

24. 解方程: $\sqrt{2x+4} - \sqrt{x+3} = 1.$

【答案】 $x = 6$

【解析】

【分析】 本题考查无理方程的解法、解一元二次方程、解一元一次不等式组，关键在于通过平方去掉根号是关键，同时考虑无理方程有意义，以及对计算结果进行检验.

先求出 x 的取值范围，再对方程变形进行两次平方，然后解一元二次方程，再检验即可求解.

【详解】解：由题意， $\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$ ，

解得 $x \geq -2$ 。

将 $\sqrt{2x+4} - \sqrt{x+3} = 1$ 变形，得： $\sqrt{2x+4} = \sqrt{x+3} + 1$ ，

将方程两边平方可得： $2x+4 = x+3+1+2\sqrt{x+3}$ ，即 $2\sqrt{x+3} = x$ ，

再两边平方可得： $4(x+3) = x^2$ 。

整理得： $x^2 - 4x - 12 = 0$ 。

解得： $x = -2$ 或 $x = 6$ 。

经检验： $x = -2$ 是原方程的增根， $x = 6$ 是无理方程的解。

故原方程的解为 $x = 6$ 。

25. 解方程组： $\begin{cases} 3x^2 - 2xy - y^2 = 0 \\ (x-y)^2 - 3(x-y) - 18 = 0 \end{cases}$ 。

【答案】 $\begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = \frac{9}{4} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{9}{2} \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解二元二次方程组。先把原方程组变形为 $\begin{cases} 3x+y=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 3x+y=0 \\ x-y-6=0 \end{cases}$ 或

$\begin{cases} x-y=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-y=0 \\ x-y-6=0 \end{cases}$ ，再分别解出方程组，即可求解。

【详解】解： $\because \begin{cases} 3x^2 - 2xy - y^2 = 0 \\ (x-y)^2 - 3(x-y) - 18 = 0 \end{cases}$ ，

$\therefore \begin{cases} (3x+y)(x-y) = 0 \\ (x-y+3)(x-y-6) = 0 \end{cases}$ ，

$\therefore \begin{cases} 3x+y=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 3x+y=0 \\ x-y-6=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-y=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-y=0 \\ x-y-6=0 \end{cases}$ ，

$$\text{解} \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = \frac{9}{4} \end{cases};$$

$$\text{解} \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - y - 6 = 0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{9}{2} \end{cases};$$

$$\text{当} \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y - 6 = 0 \end{cases} \text{时, 方程组无解.}$$

$$\text{综上所述, 方程组的解为} \begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = \frac{9}{4} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{9}{2} \end{cases}.$$

四、解答题

26. 已知方程 $x^2 - 3x = -1$ 的两根分别为 x_1 、 x_2 .

(1) 求 $x_1 + x_2$ 与 $x_1 x_2$ 的值;

(2) 求 $x_1^2 + x_2^2$ 的值;

(3) 求 $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$ 的值;

(4) 求 $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ 的值.

【答案】 (1) $x_1 + x_2 = 3$, $x_1 x_2 = 1$

(2) $x_1^2 + x_2^2 = 7$

(3) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = 7$

(4) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了根与系数的关系, 解题时要熟练掌握并能列出关系式是关键.

(1) 依据题意, 由根与系数的关系计算可以得解;

(2) 依据题意, 结合 (1) 计算可以得解;

(3) 依据题意, 由 $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}$, 结合 (1) (2) 代入计算可以得解;

(4) 依据题意, 由 $(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = 3 + 2 = 5$, 从而可以计算得解.

【小问 1 详解】

解: 由题意, $\because$ 方程 $x^2 - 3x = -1$,

$$\therefore x^2 - 3x + 1 = 0.$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 3, \quad x_1 x_2 = 1.$$

【小问 2 详解】

解: $x_1^2 + x_2^2$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

$$= 3^2 - 2 \times 1$$

$$= 9 - 2$$

$$= 7;$$

【小问 3 详解】

解: $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{7}{1} = 7;$

【小问 4 详解】

解: 由题意, $(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = 3 + 2 = 5,$

$$\therefore x_1 + x_2 = 3 > 0, \quad x_1 x_2 = 1 > 0,$$

$$\therefore x_1 > 0, \quad x_2 > 0,$$

$$\therefore \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$$

$$\therefore \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{5}.$$

27. (1) 现在你有资金 1000 万元, 准备搞理财现在有下面 2 种理财方式, 请通过计算说明哪种方案收益更多?

理财模式	期限	年利率	利息计算模式
------	----	-----	--------

买支付宝基金	2	5%	复利
发放贷款	2	5%	单利

(2) 现在又有一个新的理财产品吸引了你, 若你一次投资一笔资金, 期限为 2 年, 第一年返还 400 万元, 第二年返还 800 万元, 这笔投资收益折现到当前的金额为 1000 万元, 求这个理财产品的折现率. (参考数据: $\sqrt{21} \approx 4.6$)

【答案】 (1) 买支付宝基金收益更多 (2) 12%

【解析】

【分析】 本题主要考查有理数的混合运算以及分式方程的应用, 理解题意是解题的关键.

(1) 分别求出两种理财模式的收益, 再比较即可;

(2) 设理财产品的折现率为 r ($r > 0$), 根据题意列出方程式, 进而得出答案.

【详解】 解: (1) 复利: $1000 \times (1 + 5\%)^2 - 1000 = 102.5$ (万元),

单利: $1000 \times 5\% \times 2 = 100$ (万元),

$102.5 > 100$,

答: 买支付宝基金收益更多.

(2) 设理财产品的折现率为 r ($r > 0$),

$$\text{则 } \frac{400}{1+r} + \frac{800}{(1+r)^2} = 1000,$$

$$\text{解得: } r = \frac{-4 + \sqrt{21}}{5} \approx 0.12 = 12\%.$$

答: 理财产品的折现率为 12%.

28. 已知 x_1 、 x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 的两个实数根.

(1) 若 $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 28$, 求 m 的值;

(2) 已知等腰三角形 ABC 的一边长为 7, 另外的两边长恰好是 x_1 、 x_2 , 求 ABC 的周长.

【答案】 (1) 6 (2) 17

【解析】

【分析】 (1) 利用一元二次方程根与系数的关系即可解决问题.

(2) 根据根与系数的关系定理, 得 $x_1 + x_2 = 2(m+1)$, $x_1 x_2 = m^2 + 5$, 结合等腰三角形, 三角形三边关系

定理解答即可.

本题主要考查了根与系数的关系及根的判别式, 解一元二次方程, 也考查了三角形三边的关系, 等腰三角形的定义. 掌握一元二次方程的根与系数的关系及根的判别式和对等腰三角形恰当分类是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: $\because x_1, x_2$ 是方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 的两个实数根,

$$\therefore x_1 + x_2 = 2(m+1), \quad x_1 x_2 = m^2 + 5,$$

$\because x_1, x_2$ 是方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 的两个实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = [-2(m+1)]^2 - 4 \times (m^2 + 5) \times 1 \geq 0,$$

解得 $m \geq 2$.

$$\because (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 28,$$

$$\therefore x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1 = 28,$$

$$\therefore m^2 + 5 - 2(m+1) - 27 = 0,$$

整理, 得 $m^2 - 2m - 24 = 0$,

解得 $m = 6$ 或 $m = -4$ (舍去),

故 m 的值为 6.

【小问 2 详解】

解: $\because x_1, x_2$ 是方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 的两个实数根,

$$\therefore x_1 + x_2 = 2(m+1), \quad x_1 x_2 = m^2 + 5,$$

$\because$ 等腰三角形 ABC 的一边长为 7,

当 $x_1 = 7$ 时,

$$\therefore 7 + x_2 = 2(m+1), \quad 7x_2 = m^2 + 5,$$

$$\therefore 2(m+1) - 7 = \frac{m^2 + 5}{7},$$

整理, 得 $m^2 - 14m + 40 = 0$,

解得 $m_1 = 4, m_2 = 10$,

当 $m=4$ 时, $x_2 = \frac{m^2+5}{7} = 3$,

此时三角形的三边长为 7, 7, 3, 三角形存在,

故三角形的周长为 $7+7+3=17$;

当 $m=10$ 时, $x_2 = \frac{m^2+5}{7} = 15$,

此时三角形的三边长为 7, 7, 15, 三角形不存在;

同理可证, 当 $x_2 = 7$ 时, 三角形的周长为 17;

$\therefore x_1, x_2$ 是方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 的两个实数根,

$\therefore x_1 + x_2 = 2(m+1), x_1 x_2 = m^2 + 5$,

$\therefore$ 等腰三角形 ABC 的一边长为 7,

当 $x_1 = x_2$ 时,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = [-2(m+1)]^2 - 4 \times (m^2 + 5) \times 1 = 0$,

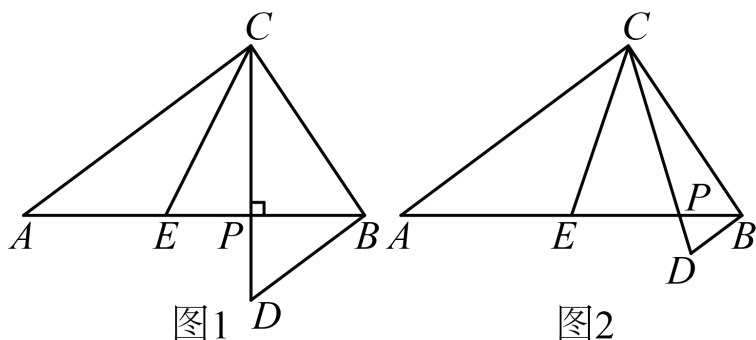
解得 $m = 2$,

$\therefore x_1 = x_2 = 3$,

此时三角形的三边长为 7, 3, 3, 三角形不存在;

综上所述, 三角形周长为 17.

29. 已知: 在 ABC 中, $AB=6$, $AC=5$, $\angle A$ 为锐角, ABC 的面积为 9, 点 P 为边 AB 上的动点, 过点 B 作 $BD \parallel AC$, 交 CP 的延长线于点 D , CE 平分 $\angle ACP$ 交 AB 于点 E .



(1) 如图 1, 当 $CD \perp AB$ 时, 求 PE 的长?

(2) 如图 2, 当点 E 为 AB 的中点时, 请猜想并证明: 线段 AC 、 CD 、 DB 的数量关系?

【答案】 (1) $PE = \frac{3}{2}$

(2) $AC = BD + CD$, 理由见解析

【解析】

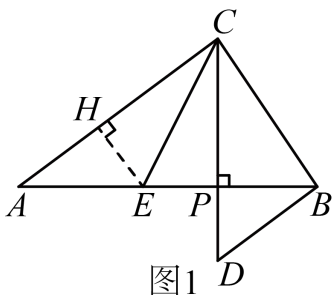
【分析】 本题考查勾股定理、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的判定、角平分线的定义、平行线的性质等知识, 熟练掌握全等三角形的性质是解答的关键.

(1) 过 E 作 $EH \perp AC$ 于 H , 先利用三角形的面积公式求得 $CP = 3$, 再利用勾股定理求得 $PA = 4$, 然后证明 $\triangle CPE \cong \triangle CHE$ (AAS) 得到 $PE = EH$, $CH = CP = 3$, 进而利用勾股定理求解即可;

(2) 延长 CE 、 BD 交于点 O , 证明 $\triangle AEC \cong \triangle BEO$ (AAS) 得到 $AC = BO$, 利用平行线性质和角平分线的定义得到 $\angle DCE = \angle ACE = \angle O$, 进而根据等腰三角形的判定可得 $CD = OD$, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 如图, 过 E 作 $EH \perp AC$ 于 H ,



$\because CD \perp AB$, $\triangle ABC$ 的面积为 9, $AB = 6$,

$$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot CP = \frac{1}{2} \times 6 \times CP = 9,$$

$$\therefore CP = 3,$$

$\because CD \perp AB$,

$$\therefore \angle CPA = 90^\circ,$$

$$\text{由勾股定理得: } PA = \sqrt{AC^2 - CP^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$\because CE$ 平分 $\angle ACP$ 交 AB 于点 E , $EH \perp AC$, $CD \perp AB$,

$$\therefore \angle PCE = \angle HCE, \angle CPE = \angle CHE, \text{ 又 } CE = CE,$$

$$\therefore \triangle CPE \cong \triangle CHE \text{ (AAS)},$$

$$\therefore PE = EH, CH = CP = 3,$$

在 $\text{Rt}\triangle AHE$ 中, $\angle AHE = 90^\circ$, $AH = AC - CH = 5 - 3 = 2$,

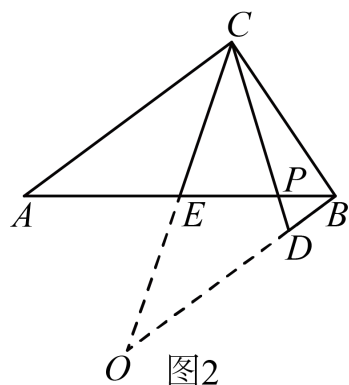
$$\text{由 } AE^2 = AH^2 + EH^2 \text{ 得 } (4 - PE)^2 = 2^2 + PE^2,$$

解得 $PE = \frac{3}{2}$;

【小问 2 详解】

解: $AC = BD + CD$. 理由如下:

延长 CE 、 BD 交于点 O ,



$\because BD \parallel AC$,

$\therefore \angle A = \angle OBE$, $\angle ACE = \angle O$,

$\because$ 点 E 为 AB 的中点,

$\therefore AE = BE$,

$\therefore \triangle AEC \cong \triangle BEO$ (AAS),

$\therefore AC = BO$,

$\because CE$ 平分 $\angle ACP$ 交 AB 于点 E ,

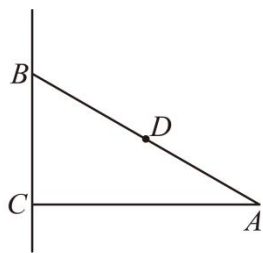
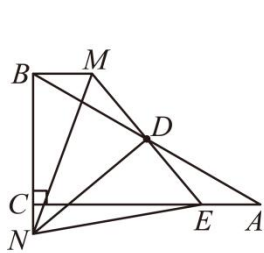
$\therefore \angle DCE = \angle ACE = \angle O$,

$\therefore CD = OD$,

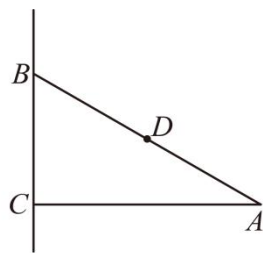
$\therefore OB = BD + OD$,

$\therefore AC = BD + CD$.

30. 已知: 如图, 在 ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $AC = 2\sqrt{3}$, 点 D 是边 AB 的中点, E 是边 AC 上的一动点 (点 E 不与点 A 重合), 过点 B 作 $BM \parallel AC$ 交 ED 的延长线于点 M , 过点 D 作 $DN \perp ME$ 交直线 BC 于点 N , 连接 NE .



备用图1



备用图2

- (1) 填空: $BC = \underline{\quad}$, $AB = \underline{\quad}$;
- (2) 如图, 当点 N 在 BC 的延长线上时, 设 $CN = x$, $BM = y$, 试用含 x 的代数式表示 y ;
- (3) 当 $\triangle ADE$ 是等腰三角形时, 直接写出 CN 的长.

【答案】 (1) 2; 4 (2) $y = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}x}{3}$

(3) 0 或 4 或 $2\sqrt{3} - 2$

【解析】

【分析】 (1) 根据直角三角形性质得出 $AB = 2BC$, 根据勾股定理得出 $AB^2 = AC^2 + BC^2$, 然后求出结果即可;

(2) 证明 $\triangle BDM \cong \triangle ADE$ (AAS), 得出 $MD = DE$, $AE = BM = y$, 根据 $AC = 2\sqrt{3}$, $CN = x$, 得出 $CE = AC - AE = 2\sqrt{3} - y$, $BN = BC + CN = 2 + x$, 根据勾股定理得出 $y^2 + (2 + x)^2 = (2\sqrt{3} - y)^2 + x^2$, 整理得出答案即可;

(3) 分三种情况讨论: 当 $AE = DE$ 时, 当 $DE = AD$ 时, 当 $AE = AD = 2$ 时, 分别画出图形, 求出结果即可.

【小问 1 详解】

解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 $\angle A = 30^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore AB = 2BC$, 且 $AB^2 = AC^2 + BC^2$,

$\therefore (2BC)^2 = (2\sqrt{3})^2 + BC^2$,

解得: $BC = 2$, 负值舍去,

$\therefore AB = 2BC = 4$;

【小问 2 详解】

解: $\because BM \parallel AC$,

$\therefore \angle BMD = \angle AED$, $\angle MBD = \angle EAD$,

$\therefore$ 点 D 为边 AB 的中点,

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \triangle BDM \cong \triangle ADE (\text{AAS}),$$

$$\therefore MD = DE, \quad AE = BM = y,$$

$$\therefore DN \perp ME,$$

$$\therefore DN \text{ 垂直平分 } ME,$$

$$\therefore MN = EN,$$

$$\therefore AC = 2\sqrt{3}, \quad CN = x,$$

$$\therefore CE = AC - AE = 2\sqrt{3} - y, \quad BN = BC + CN = 2 + x,$$

$$\text{根据勾股定理得: } MN^2 = BM^2 + BN^2, \quad EN^2 = CE^2 + CN^2,$$

$$\therefore MN = EN,$$

$$\therefore BM^2 + BN^2 = CE^2 + CN^2,$$

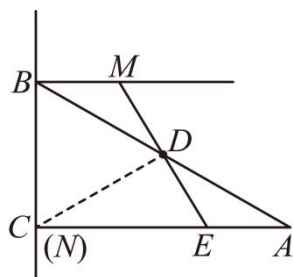
$$\therefore y^2 + (2+x)^2 = (2\sqrt{3} - y)^2 + x^2,$$

$$\text{整理得: } 4x + 4\sqrt{3}y = 8,$$

$$\text{解得: } y = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}x}{3}.$$

【小问3 详解】

解: 当 $AE = DE$ 时, 连接 CD , 如图所示:



$$\therefore AB = 4, \quad D \text{ 为 } AB \text{ 的中点,}$$

$$\therefore AD = BD = \frac{1}{2} AB = 2,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore AE = DE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CED = \angle ADE + \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = 180^\circ - \angle DCE - \angle CED = 90^\circ,$$

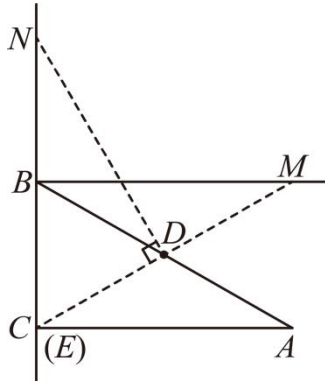
$$\therefore CD \perp ME,$$

$$\therefore ND \perp ME,$$

$\therefore$ 此时点 N 与点 C 重合,

$$\therefore CN = 0;$$

当 $DE = AD$ 时, 如图所示:



$$\therefore \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中 } \angle A = 30^\circ, \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore AD = DE,$$

$$\therefore \angle AED = \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle A + \angle AED = 60^\circ,$$

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore DE = BD,$$

$\therefore \triangle DEB$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle DBE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle DBC = 60^\circ,$$

$\therefore$ 此时点 E 与点 C 重合,

$$\therefore DN \perp ME,$$

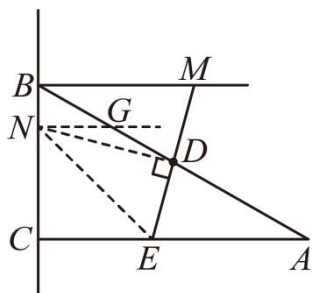
$$\therefore \angle NDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle END = 90^\circ - \angle BED = 30^\circ,$$

$$\therefore EN = 2ED = 2CD = 2 \times 2 = 4,$$

即此时 $CN = 4$;

当 $AE = AD = 2$ 时, 过点 N 作 $NG \parallel AC$ 交 AB 于点 G , 如图所示:



$$\therefore \angle BGN = \angle A = 30^\circ, \quad \angle BNG = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore BN = \frac{1}{2}BG,$$

$$\because AD = AE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ,$$

$$\because ND \perp ME,$$

$$\therefore \angle NDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDN = 180^\circ - 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle DNG = \angle BGN - \angle BDN = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle DNG = \angle BDN,$$

$$\therefore NG = GD,$$

$$\text{设 } BN = x, \text{ 则 } BG = 2x, \quad NG = GD = BD - BG = 2 - 2x,$$

$$\because BG^2 = NG^2 + BN^2,$$

$$\therefore (2x)^2 = (2 - 2x)^2 + x^2,$$

$$\text{解得: } x = 4 - 2\sqrt{3}, \quad x = 4 + 2\sqrt{3} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore BN = 4 - 2\sqrt{3},$$

$$\therefore CN = 2 - BN = 2 - 4 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 2;$$

综上分析可得: CN 的长为 0 或 4 或 $2\sqrt{3} - 2$.

【点睛】 本题主要考查了等腰三角形的判定和性质, 直角三角形的性质, 勾股定理, 解题的关键是熟练掌握相关的判定和性质, 注意进行分类讨论.