

华二金山实验学校 2025 学年度第一学期 9 月素质评估

初二数学学科

考试时间：100 分钟； 满分：150

注意事项：

1. 答题前填写好自己的姓名、班级、考号等信息

2. 请将答案正确填写在答题卡上

一、单选题（每题 4 分，共 24 分）

1. 下列是无理数的是（ ）

A. $\sqrt{4}$

B. 0.1

C. $\sqrt{3}$

D. $\frac{\pi}{\pi}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查有理数和无理数的认识，将 A 和 D 化简再判断，B、C 则直接可以判断.

【详解】 A: $\sqrt{4} = 2$ ，故 $\sqrt{4}$ 是有理数；

B: 0.1 是有理数；

C: $\sqrt{3}$ 为无理数；

D: $\frac{\pi}{\pi} = 1$ ，故 $\frac{\pi}{\pi}$ 是有理数；

故选： C.

2. 下列计算正确的是（ ）

A. $\sqrt{9} = \pm 3$

B. $\sqrt{-8} = -2$

C. $-\sqrt[3]{27} = -3$

D. $\sqrt[3]{16} = 4$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查求算术平方根，立方根，熟练掌握相关的知识点是解题的关键. 根据求算术平方根，立方根的方法进行解题即可.

【详解】 解： A、 $\sqrt{9} = 3$ ，故该选项错误，不符合题意；

B、负数在实数范围内没有平方根，故该选项错误，不符合题意；

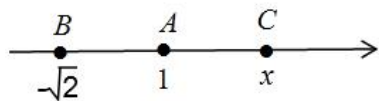
C、 $-\sqrt[3]{27} = -3$ ，计算正确，故该选项符合题意；

D、因为 $4^3 = 64$ ，

所以 $\sqrt[3]{16} \neq 4$ ，故该选项错误，不符合题意；

故选：C.

3. 在如图的数轴上，点 B 与点 C 到点 A 的距离相等， A 、 B 两点对应的实数分别是 1 ， $-\sqrt{2}$ ，则点 C 对应的实数是（ ）



A. $\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $2+\sqrt{2}$

D. $2+2\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】设点 C 所表示的数为 x ，根据点 B 、 C 到点 A 的距离相等列出方程，即可求出 x 。

【详解】解：设点 C 所表示的数为 x ，

$\because$ 点 B 与点 C 到点 A 的距离相等，

$\therefore AC=AB$ ，即 $x-1=1+\sqrt{2}$ ，

解得： $x=2+\sqrt{2}$ ，

故选：C.

【点睛】本题考查了实数与数轴的知识，数轴上两点之间的距离，一元一次方程的应用，根据条件点 B 、 C 到点 A 的距离相等列出方程是关键。

4. 关于 x 的方程 $(a+1)x^{a^2+1}-3x-1=0$ 是一元二次方程，则 a 的值是（ ）

A. $a=\pm 1$

B. $a=-1$

C. $a=1$

D. $a=0$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的概念，掌握一元二次方程的定义：未知数的最高次数是 2；二次项系数不为 0；是整式方程；含有一个未知数是解题关键。由一元二次方程的定义列方程求出即可。

【详解】解： $\because$ 关于 x 的方程 $(a+1)x^{a^2+1}-3x-1=0$ 是一元二次方程，

$\therefore a^2+1=2$ 且 $a+1 \neq 0$ ，

解得： $a=\pm 1$ 且 $a \neq -1$ ，

$\therefore a=1$ ，

故选：C.

5. 已知 $\sqrt{6} < a < \sqrt{18}$ ，则满足条件的所有整数 a 的和为 ()

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

【答案】D

【解析】

【分析】此题主要考查了估算无理数的大小，运用有理数逼近无理数，求无理数的近似值. 首先确定 $\sqrt{6}$ 和 $\sqrt{18}$ 的范围，然后可得整数 a 的值.

【详解】解： $\because 4 < 6 < 9$,

$$\therefore 2 < \sqrt{6} < 3,$$

$$\because 16 < 18 < 25,$$

$$\therefore 4 < \sqrt{18} < 5,$$

$$\therefore \sqrt{6} < a < \sqrt{18},$$

$\therefore$ 则满足条件的所有整数 a 为 3, 4,

和为 $3+4=7$,

故选：D.

6. 二次根式除法可以这样解：如 $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 7+4\sqrt{3}$. 像这样通过分子、分母同乘以一个式子把分母中的根号化去或把根号中的分母化去，叫分母有理化，判断下列选项正确的是 () ①若 a

是 $\sqrt{2}$ 的小数部分，则 $\frac{3}{a}$ 的值为 $\sqrt{2}+1$;

②比较两个二次根式的大小 $\frac{1}{\sqrt{6}-2} > \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$;

③计算 $\frac{2}{3+\sqrt{3}} + \frac{2}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} + \frac{2}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}} + \cdots + \frac{2}{99\sqrt{97}+97\sqrt{99}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$;

④对于式子 $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ ，对它的分子分母同时乘以 $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{5}$ 或 $7-2\sqrt{10}$ ，均不能对其分母有理化;

⑤设实数 x, y 满足 $(x+\sqrt{x^2+2024})(y+\sqrt{y^2+2024})=2024$ ，则 $(x+y)^2+2024=2024$;

⑥若 $x = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, $y = \frac{1}{x}$, 且 $19x^2 + 123xy + 19y^2 = 1985$, 则正整数 $n = 2$.

A. ①④⑤

B. ②③④

C. ②④⑤⑥

D. ②④⑥

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了估算无理数的大小，二次根式的混合计算，分母有理化，注意：认真阅读材料，理解材料中的知识，分母有理化，解题的关键是：根据平方差公式，将各式分母有理化.

① $a = \sqrt{2} - 1$, 把 $\frac{3}{a}$ 直接分母有理化即可判断.

把 $\frac{1}{\sqrt{6}-2}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 分别分母有理化比较大小即可.

把原式的各项先分母有理化，再化为两个根式的差，计算即可得到结果.

④按照题意，分别进行分母有理化计算即可判断.

⑤先化简成 $x + \sqrt{x^2 + 2024} = \sqrt{y^2 + 2024} - y$ 和 $y + \sqrt{y^2 + 2024} = \sqrt{x^2 + 2024} - x$ 两个式子，把两个式子相加即可求出 $x + y = 0$ ，再判断即可.

⑥分别把 x 和 y 分母有理化，求出 $x + y$ 和 xy 的值，代入 $19x^2 + 123xy + 19y^2 = 1985$ ，求出 $x^2 + y^2 = 98$ ，再求出 $x + y$ 的值即可.

【详解】解：①若 a 是 $\sqrt{2}$ 的小数部分，则 $\frac{3}{a} = \frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 3\sqrt{2} + 3$,

故①错误，不符合题意.

② $\because \frac{1}{\sqrt{6}-2} = \frac{\sqrt{6}+2}{(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)} = \frac{\sqrt{6}+2}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{6}+2 > \sqrt{5}+\sqrt{3}$,

$\therefore \frac{1}{\sqrt{6}-2} > \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$,

故②正确，符合题意.

③ $\frac{2}{3+\sqrt{3}} + \frac{2}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} + \frac{2}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}} + \cdots + \frac{2}{99\sqrt{97}+97\sqrt{99}}$
 $= \frac{3-\sqrt{3}}{3} + \frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{15} + \frac{7\sqrt{5}-5\sqrt{7}}{35} + \cdots + \frac{99\sqrt{97}-97\sqrt{99}}{9603}$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{7}}{7} - \frac{\sqrt{7}}{7} + \cdots + \frac{\sqrt{97}}{97} - \frac{\sqrt{99}}{99} \\
&= 1 - \frac{\sqrt{99}}{99} \\
&= 1 - \frac{\sqrt{11}}{33}.
\end{aligned}$$

故③错误，不符合题意.

$$\begin{aligned}
④ \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{7-2\sqrt{10}}, \\
\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5}-\sqrt{2}) \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5-\sqrt{10}}, \\
\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} &= \frac{7-2\sqrt{10}}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(7-2\sqrt{10})} = \frac{7-2\sqrt{10}}{11\sqrt{5}-17\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

$\therefore$ 均不能对其分母有理化,

故④正确.

$$\begin{aligned}
⑤ \because (x + \sqrt{x^2 + 2024})(y + \sqrt{y^2 + 2024}) &= 2024, \\
\therefore (x + \sqrt{x^2 + 2024}) &= \frac{2024}{y + \sqrt{y^2 + 2024}},
\end{aligned}$$

$$\therefore x + \sqrt{x^2 + 2024} = \sqrt{y^2 + 2024} - y,$$

同理 $y + \sqrt{y^2 + 2024} = \sqrt{x^2 + 2024} - x$, 两式相加得, $x + y = 0$,

$$\therefore (x + y)^2 + 2024 = 2024.$$

故⑤正确.

$$⑥ x = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = 2n+1 - 2\sqrt{n(n+1)},$$

$$y = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = 2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)},$$

$$\therefore x + y = 4n + 2, \quad xy = 1, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

$$\therefore 19x^2 + 123xy + 19y^2 = 1985,$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 98,$$

$$\therefore (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 100,$$

$$\therefore x+y=10,$$

$$\therefore n=2.$$

故⑥正确.

综上所述: 正确的有②④⑤⑥.

故选: C.

二、填空题 (每题 4 分, 共 48 分)

7. 比较大小: $\sqrt{18}$ _____ π (填“<”“>”或“=”).

【答案】>

【解析】

【分析】判断出 $\sqrt{18}$ 、 π 与 4 的大小关系, 即可判断出 $\sqrt{18}$ 、 π 的大小关系.

【详解】解: $\because \sqrt{18} > \sqrt{16} = 4, \pi < 4,$

$$\therefore \sqrt{18} > \pi.$$

故答案为: >.

【点睛】本题考查了实数大小比较的方法, 要熟练掌握, 解答此题的关键是判断出 $\sqrt{18}$ 、 π 与 4 的大小关系.

8. 一元二次方程 $2x^2 - x - 3 = 0$ 的二次项系数是_____.

【答案】2

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程的定义,

根据一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的二次项系数是 a 解答即可.

【详解】解: 一元二次方程 $2x^2 - x - 3 = 0$ 的二次项系数是 2.

故答案为: 2.

9. 若式子 $\sqrt{2x+1}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围为_____.

【答案】 $x \geq -\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】此题考查了二次根式有意义的条件，根据二次根式有意义的条件得到 $2x+1 \geq 0$ ，解不等式即可得到答案.

【详解】解：由题意可得 $2x+1 \geq 0$ ，

解得 $x \geq -\frac{1}{2}$.

故答案为： $x \geq -\frac{1}{2}$.

10. 已知一个正数的两个平方根分别是 $x-1$ 和 $3x+5$ ，则 x 的值为_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】根据已知得出方程 $x-1+3x+5=0$ 即可求出 x . 本题考查了平方根，能根据题意得出关于 x 的方程是解此题的关键，注意：一个正数有两个平方根，它们互为相反数.

【详解】根据题意知 $x-1+3x+5=0$ ，

解得： $x=-1$ ，

故答案为： -1 .

11. 清代袁枚的一首诗苔中的诗句“白日不到处，青春恰自来. 苔花如米小，也学牡丹开”若苔花的花粉直径约为米 0.0000084 ，则数据 0.0000084 用科学记数法表示为_____.

【答案】 8.4×10^{-6}

【解析】

【分析】本题主要考查了科学记数法，科学记数法的表现形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同，当原数绝对值大于等于 10 时， n 是正数，当原数绝对值小于 1 时 n 是负数；由此进行求解即可得到答案.

【详解】解： $0.0000084 = 8.4 \times 10^{-6}$ ，

故答案为： 8.4×10^{-6} .

12. 已知： $y = \sqrt{x-7} + \sqrt{7-x} + 9$ ，则 $x = \underline{\quad}$ ， $y = \underline{\quad}$.

【答案】 ①. 7 ②. 9

【解析】

【分析】本题考查了算术平方根的非负性，由题意可得 $x-7 \geq 0$ ， $7-x \geq 0$ ，从而得出 x 的值，代入 x 的值即可得出 y 的值，熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】解：由题意可得： $x-7 \geq 0$ ， $7-x \geq 0$ ，

$$\therefore x = 7,$$

$$\text{当 } x = 7 \text{ 时, } y = \sqrt{0} + \sqrt{0} + 9 = 9,$$

故答案为：7，9.

13. $\sqrt{16}$ 的算术平方根是_____.

【答案】2

【解析】

【分析】本题考查算术平方根，掌握知识点是解题的关键.

先求出 $\sqrt{16} = 4$ ，再根据算术平方根的定义，即可解答.

【详解】解： $\because \sqrt{16} = 4$ ，

$\therefore \sqrt{16}$ 的算术平方根是 2.

故答案为：2.

14. 已知最简二次根式 $\sqrt{x-1}$ 与二次根式 $\sqrt{18}$ 是同类二次根式，则 $x =$ _____.

【答案】3

【解析】

【分析】本题考查了最简二次根式和同类二次根式的概念，根据题意先化简 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ，再根据同类二次根式的最简二次根式的被开方数相等列关系式，求解即可.

【详解】解： $\because \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ，

又 $\because$ 最简二次根式 $\sqrt{x-1}$ 与二次根式 $\sqrt{18}$ 是同类二次根式，

$$\therefore x-1 = 2,$$

解得 $x = 3$.

故答案为：3.

15. 已知 m 是方程 $2x^2 - x - 1 = 0$ 的根，则代数式 $2022 - 6m^2 + 3m$ 的值为_____.

【答案】2019

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的解的定义，一元二次方程的解是使方程左右两边相等的未知数的值，据此得到 $2m^2 - m - 1 = 0$ ，即 $2m^2 - m = 1$ ，再根据 $2022 - 6m^2 + 3m = 2022 - 3(2m^2 - m)$ 计算求解即可.

【详解】 解： $\because m$ 是方程 $2x^2 - x - 1 = 0$ 的根，

$$\therefore 2m^2 - m - 1 = 0,$$

$$\therefore 2m^2 - m = 1,$$

$$\therefore 2022 - 6m^2 + 3m$$

$$= 2022 - 3(2m^2 - m)$$

$$= 2022 - 3 \times 1$$

$$= 2019,$$

故答案为： 2019 .

16. 若 $(a-2)^2 + \sqrt{b+1} = 0$ ，则 $a-b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题主要考查了平方的非负性和算术平方根的非负性，熟练的掌握几个非负数相加和为 0，则这几个非负数分别为 0，是解题的关键.

根据算术平方根为非负数以及平方为非负数即可解答. 几个非负数相加和为 0，则这几个非负数分别为 0.

【详解】 解： $\because (a-2)^2 + \sqrt{b+1} = 0$ ，

$$\therefore a-2=0, b+1=0,$$

$$\therefore a=2, b=-1,$$

$$\therefore a-b=2-(-1)=3,$$

故答案为： 3.

17. 《见微知著》谈到：从一个简单的经典问题出发，从特殊到一般，由简单到复杂，从部分到整体，由低维到高维，知识与方法上的类比是探索发展的重要途径，是思想阀门发现新问题、新结论的重要方法.

例如，已知 $ab=1$ ，求 $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}$ 的值.

解： $\because ab=1$ ， $\therefore a^2b^2=1$ ， $\therefore$ 原式 $= \frac{a^2b^2}{a^2b^2+a^2} + \frac{1}{1+b^2} = \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{1}{1+b^2} = 1$

波利亚在《怎样解题》中指出：“当你找到第一个藤菇或作出第一个发现后，再四处看看，他们总是成群生长”。

请类比以上方法解答：已知 $ab = 1$ ，求得 $\frac{2019}{1+a^{2019}} + \frac{2019}{1+b^{2019}}$ 的结果是_____。

【答案】 2019

【解析】

【分析】参照题中的举例，根据 $ab = 1$ ，可知 $a^{2019}b^{2019} = 1$ ，故可将原式化为： $\frac{2019a^{2019}b^{2019}}{a^{2019}b^{2019} + a^{2019}} + \frac{2019}{1+b^{2019}} =$

$$\frac{2019b^{2019}}{b^{2019}+1} + \frac{2019}{1+b^{2019}} = \frac{2019(1+b^{2019})}{b^{2019}+1} \text{ 即可得出结论}$$

【详解】解： $\because ab = 1$,

$$\therefore a^{2019}b^{2019} = 1,$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{2019a^{2019}b^{2019}}{a^{2019}b^{2019} + a^{2019}} + \frac{2019}{1+b^{2019}} = \frac{2019b^{2019}}{b^{2019}+1} + \frac{2019}{1+b^{2019}} = \frac{2019(1+b^{2019})}{b^{2019}+1} = 2019$$

故答案为 2019.

【点睛】本题是一道实数运算的新定义型题，解本题的关键是读懂题意，借助题目举的例子来类比解题

18. 中国古代大数学家张丘建在其著作《张丘建算经》三卷中，用开方法解决了求自然数算术平方根的近似值问题. 即若设自然数为 N ，它的算术平方根的整数部分为 a ，则 $\sqrt{N} \approx a + \frac{N-a^2}{2a+1}$. 按照上述取近似值的方法， $\sqrt{10} \approx$ _____ (精确到 0.001)

【答案】 3.143

【解析】

【分析】本题考查了估算无理数的大小，代数式的求值，利用估算得出 a 的值是解题的关键.

先估算出 $\sqrt{10}$ 的大小，得到 a 的值，代入求解即可.

【详解】解： $\because 9 < 10 < 16$,

$$\therefore 3 < \sqrt{10} < 4,$$

$$\therefore \sqrt{10} \text{ 的整数部分为 } 3, \text{ 即 } a = 3,$$

$$\therefore \sqrt{10} \approx 3 + \frac{10-3^2}{2 \times 3+1} = 3 + \frac{1}{7} \approx 3.143.$$

故答案为： 3.143.

三、解答题 (共 78 分)

19. 计算:

(1) $\sqrt{18} - \sqrt{12} + 2\sqrt{3}$;

(2) $\sqrt{25} - (2024 - \sqrt{2023})^0 + \sqrt[3]{-27}$.

【答案】 (1) $3\sqrt{2}$

(2) 1

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算，零指数幂、立方根，正确计算是解题的关键.

(1) 先化简二次根式，再合并同类二次根式；

(2) 先计算算术平方根、零次幂、立方根，再进行加减运算.

【小问 1 详解】

解: $\sqrt{18} - \sqrt{12} + 2\sqrt{3}$

$$= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{2};$$

【小问 2 详解】

解: $\sqrt{25} - (2024 - \sqrt{2023})^0 + \sqrt[3]{-27}$

$$= 5 - 1 + (-3)$$

$$= 1$$

20. (1) 计算: $\sqrt{45} \div \sqrt{5} - \sqrt{(-5)^2}$

(2) 若 $-2 \leq a \leq 2$, 化简 $\sqrt{(5-2a)^2} - \sqrt{(a+2)^2}$.

【答案】 (1) -2 ; (2) $3-3a$

【解析】

【分析】 本题考查了利用二次根式的性质化简，二次根式的除法.

(1) 根据二次根式的性质，二次根式的除法计算即可求解；

(2) 利用二次根式的性质进行化简即可.

【详解】 解: (1) $\sqrt{45} \div \sqrt{5} - \sqrt{(-5)^2}$

$$= \sqrt{9} - |-5|$$

$$= 3 - 5$$

$$= -2;$$

$$(2) \because -2 \leq a \leq 2,$$

$$\therefore 5 - 2a > 0, \quad a + 2 \geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{(5-2a)^2} - \sqrt{(a+2)^2} = 5 - 2a - (a+2) = 3 - 3a,$$

故答案为: $3 - 3a$.

21. (1) 解方程组:
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

(2) 解不等式: $2\sqrt{2}x + 2 > 3x$.

【答案】 (1) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$; (2) $x < 4\sqrt{2} + 6$

【解析】

【分析】 此题主要考查不等式与二元一次方程组的求解, 分母有理化, 解题的关键是熟知其解法.

(1) 根据加减消元法即可求解;

(2) 先根据不等式的性质得出 $x < \frac{-2}{2\sqrt{2}-3}$, 再进行分母有理化即可.

【详解】 解: (1)
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \text{ ①} \\ x - 2y = 4 \text{ ②} \end{cases}$$

① $\times 2 +$ ② 得: $5x = 10$

解得: $x = 2$

将 $x = 2$ 代入 ① 得: $4 + y = 3$

解得: $y = -1$

$$\therefore \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

(2) $2\sqrt{2}x + 2 > 3x$

移项得: $(2\sqrt{2} - 3)x > -2$,

$$\therefore (2\sqrt{2})^2 = 8 < 3^2,$$

$$\therefore 2\sqrt{2}-3 < 0,$$

$$\therefore x < \frac{-2}{2\sqrt{2}-3},$$

$$\text{即 } x < \frac{-2(2\sqrt{2}+3)}{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)} = 4\sqrt{2}+6.$$

综上, $x < 4\sqrt{2}+6$.

22. 已知 $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, 求代数式 $x^2+3xy+y^2$ 的值.

【答案】 101

【解析】

【分析】分母有理化得, $x = 5-2\sqrt{6}$, $y = 5+2\sqrt{6}$, 根据 $x^2+3xy+y^2 = (x+y)^2+xy$, 代值求解即可.

【详解】解: $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = 5-2\sqrt{6}$, $y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = 5+2\sqrt{6}$,

$$\therefore x^2+3xy+y^2 = (x+y)^2+xy = (5-2\sqrt{6}+5+2\sqrt{6})^2 + (5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6}) = 101,$$

$\therefore$ 代数式 $x^2+3xy+y^2$ 的值为 101.

【点睛】本题考查了分母有理化, 完全平方公式, 二次根式的混合运算, 代数式求值等知识. 熟练掌握分母有理化, 完全平方公式, 二次根式的混合运算, 代数式求值是解题的关键.

23. 高空抛物极其危险, 是我们必须杜绝的行为. 据研究, 高空抛物下落的时间 t (单位: s) 和高度 h (单位: m) 近似满足公式 $t = \sqrt{\frac{h}{5}}$ (不考虑风速的影响).

位: m) 近似满足公式 $t = \sqrt{\frac{h}{5}}$ (不考虑风速的影响).

(1) 求从 40m 高空抛物到落地时间;

(2) 小明说从 80m 高空抛物到落地时间是 (1) 中所求时间的 2 倍, 他说法正确吗? 如果不正确, 请说明理由.

【答案】 (1) $2\sqrt{2}$ s

(2) 不正确, 理由见解析

【解析】

【分析】本题考查二次根式的应用, 解题的关键是理解题意, 正确计算.

(1) 将 $h = 40$ m 代入公式计算即可;

(2) 求出 $h = 80\text{m}$ 时 t 的值判断即可.

【小问 1 详解】

解: 由题意知, $h = 40\text{m}$,

$$t = \sqrt{\frac{h}{5}} = \sqrt{\frac{40}{5}} = 2\sqrt{2}(\text{s})$$

【小问 2 详解】

不正确.

$$\text{理由: 当 } h = 80\text{m} \text{ 时, } t = \sqrt{\frac{h}{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = 4(\text{s}),$$

$$\therefore \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \neq 2,$$

$\therefore$ 与说法不符,

$\therefore$ 小明的说法不正确.

24. 定义: 若 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = c$, c 是有理数, 则称 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 与 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ 是关于 c 的“美好数”例

如: $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 1$, 则称 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ 是关于 1 的“美好数”.

(1) $2 + \sqrt{3}$ 关于 1 的“美好数”是_____;

(2) 化简: $\frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{13}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{119} + \sqrt{121}}$;

(3) 若 y 是 $\sqrt{10} - 1$ 关于 9 的“美好数”, 请直接写出 $4y^2 - 8y + 2025$ 的值.

【答案】(1) $2 - \sqrt{3}$;

(2) 4;

(3) 2061.

【解析】

【分析】本题考查了“美好数”的新定义, 分母有理化, 二次根式的运算, 因式分解的应用, 掌握知识点的应用是解题的关键.

(1) 利用“美好数”的新定义, 分母有理化解答即可求解;

(2) 利用“美好数”的新定义, 分母有理化解答即可求解;

(3) 利用“美好数”的新定义, 分母有理化求出 y , 再把 $4y^2 - 8y + 2025$ 变形为 $4(y-1)^2 + 2021$, 最

后代入求值即可.

【小问 1 详解】

解: 由“美好数”的新定义可得,

则 $2+\sqrt{3}$ 关于 1 的“美好数”是 $\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$,

故答案为: $2-\sqrt{3}$;

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: } & \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{13}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{121}} \\ &= \frac{1}{2}(-\sqrt{9}+\sqrt{11}-\sqrt{11}+\sqrt{13}+\cdots-\sqrt{119}+\sqrt{121}) \\ &= \frac{1}{2}(-\sqrt{9}+\sqrt{121}) \\ &= \frac{1}{2}(-3+11) \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \\ &= 4;\end{aligned}$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } \sqrt{10}-1 \text{ 关于 } 9 \text{ 的“美好数” } y=\frac{9}{\sqrt{10}-1}=\sqrt{10}+1,$$

$$\begin{aligned}& \therefore 4y^2-8y+2025 \\ &= 4(y-1)^2+2021 \\ &= 4(\sqrt{10}+1-1)^2+2021 \\ &= 4 \times (\sqrt{10})^2+2021 \\ &= 4 \times 10+2021 \\ &= 2061.\end{aligned}$$

25. 著名数学教育家 G·波利亚有句名言:“发现问题比解决问题更重要”,这句话启发我们:要想学会数学,就需要观察,发现问题,探索问题的规律性东西,要有一双敏锐的眼睛.请先阅读下列材料:

数学上有一种根号内又带根号的数.形如 $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$, 如果你能找到两个数 m 、 n , 使 $m^2+n^2=a$, 且

$mn = \sqrt{b}$, 则 $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ 可变形为 $\sqrt{m^2 + n^2 \pm 2mn} = \sqrt{(m \pm n)^2} = |m \pm n|$, 从而达到化去一层根号的目的,

例如: $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2-2 \times 1 \times \sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2})^2-2 \times 1 \times \sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$.

解决问题:

(1) 根据上述思路, 试将 $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ 予以化简;

(2) 根据上述思路, 化简并求出 $\sqrt{52-14\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ 的值;

(3) 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 化简 $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

【答案】 (1) $\sqrt{5}-2$

(2) 9

(3) 2

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算, 完全平方公式, 绝对值, 熟练掌握二次根式的混合运算是解题的关键;

(1) 根据题意, $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2 - 2 \times 2\sqrt{5}}$, 计算求解即可;

(2) 根据题意, 将原式化简为 $\sqrt{(7-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$, 计算求解即可;

(3) 根据题意, 将原式化简为 $\sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1}$, 根据 $1 \leq x \leq 2$, 计算求解即可;

【小问 1 详解】

解: $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

$$= \sqrt{9-2 \times 2\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2 - 2 \times 2\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}.$$

$$= |\sqrt{5}-2|$$

$$= \sqrt{5}-2;$$

【小问 2 详解】

解: 原式 $= \sqrt{7^2 - 2 \times 7 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} + \sqrt{2^2 + 2 \times 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}$

$$= \sqrt{(7-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$$

$$= 7 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}.$$

$$= 9;$$

【小问 3 详解】

解: $\because 1 \leq x \leq 2,$

$$\therefore \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 + 2 \times \sqrt{x-1} \times 1 + 1^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 - 2 \times \sqrt{x-1} \times 1 + 1^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}$$

$$= \sqrt{x-1} + 1 + 1 - \sqrt{x-1}$$

$$= 2.$$