

八年级数学第一学期 12 月阶段检测卷

(考试时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 请选择正确选项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 在 $\sqrt{5}$, $\frac{17}{3}$, π , $-\sqrt{49}$, -3.14 , $\sqrt{27}$ 中, 无理数个数有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】 C

【解析】

【分析】 首先根据二次根式的化简, 把能化简的二次根式化简, 再判定即可.

【详解】 解: $-\sqrt{49} = -7$, $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$,

故无理数有: $\sqrt{5}$, π , $\sqrt{27}$, 共 3 个,

故选: C.

【点睛】 此题主要考查了无理数的定义. 注意带根号的数与无理数的区别: 带根号的数不一定是无理数, 带根号且开方开不尽的数一定是无理数.

2. 函数 $y = (2m-1)x$ 是正比例函数, 且 y 随着 x 的增大而减小, 那么 m 的取值范围是 ()

- A. $m < \frac{1}{2}$ B. $m > \frac{1}{2}$ C. $m \leq \frac{1}{2}$ D. $m \geq \frac{1}{2}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了正比例函数图象的性质: 它是经过原点的一条直线. 当 $k > 0$ 时, 图象经过一、三象限, y 随 x 的增大而增大; 当 $k < 0$ 时, 图象经过二、四象限, y 随 x 的增大而减小. 根据正比例函数图象的增减性可求出 m 的取值范围.

【详解】 解: $\because$ 函数 $y = (2m-1)x$ 是正比例函数, 且 y 随 x 的增大而减小,

$\therefore 2m-1 < 0$,

解得 $m < \frac{1}{2}$.

故选: A.

3. 二次根式 $\sqrt{x+y}$ 的一个有理化因式是 ()

A. $\sqrt{x-y}$

B. $\sqrt{x} + \sqrt{y}$

C. $\sqrt{x+y}$

D. $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查了有理化因式的概念.

根据有理化因式的定义, 将原式与选项式子相乘, 若结果为有理式, 则该选项为有理化因式, 据此验证各选项即可.

【详解】 解: 有理化因式的定义是: 两个含有根式的代数式相乘, 若积不含根式, 则这两个代数式互为有理化因式.

A、 $\sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x-y} = \sqrt{(x+y)(x-y)} = \sqrt{x^2 - y^2}$, 仍含根式, 此选项不符合题意;

B、 $\sqrt{x+y} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})$, 积仍含根式, 此选项不符合题意;

C、 $\sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x+y} = x+y$, 积为有理式, 此选项符合题意;

D、 $\sqrt{x+y} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y})$, 积仍含根式, 此选项不符合题意.

故选: C.

4. 直角三角形的两条直角边分别为 5 和 12, 那么这个三角形的斜边上的中线长为 ()

A. 6

B. 6.5

C. 10

D. 13

【答案】B

【解析】

【分析】 根据勾股定理可求得直角三角形斜边的长, 再根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半即可求解.

【详解】 解: $\because$ 直角三角形两直角边长为 5 和 12,

$$\therefore \text{斜边} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$$

$$\therefore \text{此直角三角形斜边上的中线的长} = \frac{13}{2} = 6.5.$$

故选: B.

【点睛】 本题主要考查勾股定理及直角三角形斜边中线定理, 熟练掌握勾股定理及直角三角形斜边中线定理是解题的关键.

5. 已知 a、b、c 分别是 $\triangle ABC$ 的三边, 根据下列条件能判定 $\triangle ABC$ 为直角三角形的是 ()

A. $a=8, b=13, c=11$

B. $a=6, b=10, c=12$

C. $a=40, b=41, c=9$

D. $a=24, b=9, c=25$

【答案】C

【解析】

【分析】根据勾股定理的逆定理，只要满足两条较短边的平方和等于最长边的平方，即为直角三角形.

【详解】A. $a=8, b=13, c=11$ ，因为 $8^2 + 11^2 \neq 13^2$ ，所以不能判定 $\triangle ABC$ 为直角三角形；

B. $a=6, b=10, c=12$ ，因为 $6^2 + 10^2 \neq 12^2$ ，所以不能判定 $\triangle ABC$ 为直角三角形；

C. $a=40, b=41, c=9$ ，因为 $9^2 + 40^2 = 41^2$ ，所以可以判定 $\triangle ABC$ 为直角三角形；

D. $a=24, b=9, c=25$ ，因为 $9^2 + 24^2 \neq 25^2$ ，所以不能判定 $\triangle ABC$ 为直角三角形；

故选 C.

【点睛】本题考查直角三角形的判定，熟练掌握勾股定理的逆定理是解题的关键.

6. 意大利文艺复兴时期的著名画家达·芬奇利用两张一样的纸片拼出不一样的“空洞”，从而巧妙的证明了勾股定理. 小明用两张全等的纸片①和②拼成如图 1 所示，中间的六边形 $ABCDEF$ 由两个正方形和两个全等的直角三角形组成. 已知六边形 $ABCDEF$ 的面积为 14， $S_{\text{正方形}ABGF} : S_{\text{正方形}CDEG} = 4:1$. 小明将纸片②翻转后拼成如图 2 所示，其中 $\angle B'A'F' = 90^\circ$ ，则四边形 $B'C'E'F'$ 的面积为 ()

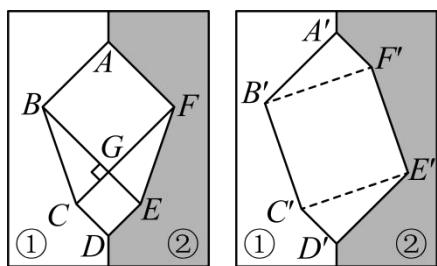


图1

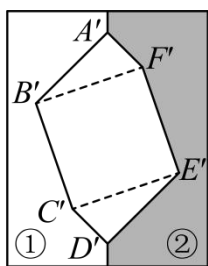


图2

A. 12

B. 10

C. 6

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查勾股定理的几何验证，解题的关键是熟知勾股定理的运用.

根据图形及勾股定理的验证得到 $BC^2 = BG^2 + CG^2$ ，故四边形 $B'C'E'F'$ 的面积等于四边形 $ABGF$ 的面积加上四边形 $CDEG$ 的面积，再根据六边形 $ABCDEF$ 的面积为 14， $S_{\text{正方形}ABGF} : S_{\text{正方形}CDEG} = 4:1$ 即可求解.

【详解】解： $\because S_{\text{正方形}ABGF} : S_{\text{正方形}CDEG} = 4:1$ ，

$\therefore$ 设 $BG = 2a$ ， $CG = a$ ，

$\because$ 六边形 $ABCDEF$ 的面积为 14，

$$\therefore 4a^2 + a^2 + 2 \times \frac{1}{2} \times 2a \times a = 14$$

$$\text{解得 } a_1 = \sqrt{2}, a_2 = -\sqrt{2} \text{ (舍去)},$$

根据图形及勾股定理的验证得到 $BC^2 = BG^2 + CG^2$,

$$\therefore \text{四边形 } B'C'E'F' \text{ 的面积} = \text{四边形 } ABGF \text{ 的面积} + \text{四边形 } CDEG \text{ 的面积} = 4a^2 + a^2 = 5 \times (\sqrt{2})^2 = 10.$$

故选: B.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 函数 $y = \frac{x+1}{\sqrt{3-x}}$ 的自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x < 3$

【解析】

【分析】 本题考查函数自变量的取值范围, 直接利用二次根式和分式有意义的条件分析得出答案即可. 正确把握定义是解题关键.

【详解】 解: 函数 $y = \frac{x+1}{\sqrt{3-x}}$ 的自变量 x 的取值范围是: $3-x \geq 0$ 且 $3-x \neq 0$,

$$\text{解得: } x < 3.$$

故答案为: $x < 3$.

8. 化简二次根式 $(a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}} =$ _____.

【答案】

$$-\sqrt{1-a}$$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的化简及有意义的条件, 解题的关键是先根据二次根式的被开方数非负确定 a 的范围, 再将根号外的因式移到根号内化简.

先由 $\frac{1}{1-a} > 0$ 得 $a < 1$, 从而确定 $a-1$ 的符号; 再将 $a-1$ 变形为负的形式, 移到根号内进行化简.

【详解】 解: 由二次根式有意义的条件, 得 $\frac{1}{1-a} \geq 0$,

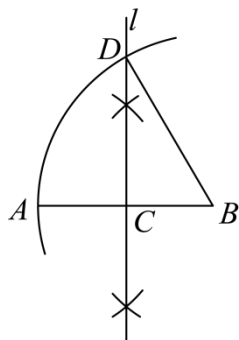
$$\therefore 1-a > 0, \text{ 即 } a < 1,$$

$$\therefore a-1 < 0.$$

$$\text{原式} = (a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}} = -(1-a)\sqrt{\frac{1}{1-a}} = -\sqrt{(1-a)^2 \times \frac{1}{1-a}} = -\sqrt{1-a}.$$

故答案为: $-\sqrt{1-a}$.

9. 如图, 小明画线段 AB 的垂直平分线 l , 垂足为点 C , 然后以点 B 为圆心, 线段 AB 为半径画弧, 与直线 l 相交于点 D , 连接 BD , 那么 $\angle CDB$ 的度数是 _____.

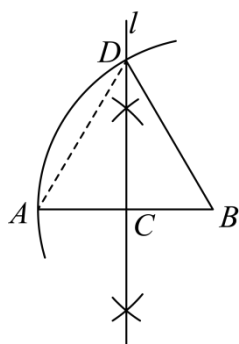


【答案】 30°

【解析】

【分析】连接 AD , 由线段垂直平分线的性质结合作图可证明 $\triangle ABD$ 为等边三角形, 即可得 $\angle B = 60^\circ$, 进而可求出 $\angle CDB$ 的度数.

【详解】解: 如图, 连接 AD ,



$\because CD$ 垂直平分 AB ,

$\therefore AD = BD, \angle BCD = 90^\circ$.

$\because BA = BD$,

$\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形,

$\therefore \angle B = 60^\circ$,

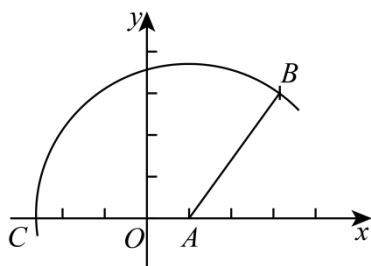
$\therefore \angle CDB = 30^\circ$.

故答案为: 30° .

【点睛】本题主要考查尺规作图, 线段垂直平分线的性质, 等边三角形的判定和性质, 三角形内角和定理. 证

明 $\triangle ABD$ 为等边三角形是解题的关键.

10. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 A 的坐标为 $(1,0)$, 点 B 的坐标为 $(3,3)$, 连接 AB , 以点 A 为圆心, AB 长为半径画弧交 x 轴负半轴于点 C , 则点 C 的横坐标为_____.



【答案】 $1 - \sqrt{13}$

【解析】

【分析】 本题考查了平面直角坐标系中两点间距离公式的应用, 勾股定理等知识点, 解题的关键是利用两点间距离公式求出 AB 的长度, 再结合圆的半径相等确定点 C 的坐标.

先通过两点间距离公式计算 AB 的长度, 由 $AC = AB$ 得到 AC 的长度, 再结合点 A 的坐标求出点 C 的横坐标.

【详解】 解: 由点 $A(1,0)$ 、 $B(3,3)$, 根据两点间距离公式:

$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$\because$ 以 A 为圆心, AB 为半径画弧交 x 轴负半轴于 C ,

$$\therefore AC = AB = \sqrt{13}.$$

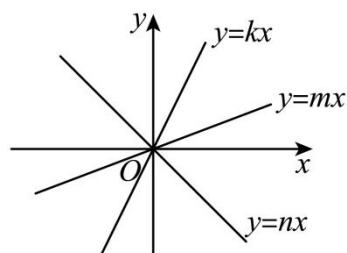
设点 C 的坐标为 $(x,0)$, 则 $AC = |x-1| = \sqrt{13}$,

$\because C$ 在 x 轴负半轴, $x < 0$,

$$\therefore 1-x = \sqrt{13}, \text{ 解得 } x = 1 - \sqrt{13}.$$

故答案为: $1 - \sqrt{13}$.

11. 如图, 正比例函数 $y = kx$, $y = mx$, $y = nx$ 在同一平面直角坐标系中的图象如图所示. 则比例系数 k , m , n 的大小关系是_____.



【答案】 $k > m > n$ ## $n < m < k$

【解析】

【分析】 根据函数图象所在象限可判断出 $k > 0$, $m > 0$, $n < 0$, 再根据直线上升的快慢可得 $k > m > 0$, 进而可得答案.

【详解】 解: 由图像可知, 正比例函数 $y = kx$, $y = mx$ 的图象在一、三象限,

$$\therefore k > 0, m > 0,$$

$\because y = kx$ 的图象比 $y = mx$ 的图象上升得快,

$$\therefore k > m > 0,$$

$\because y = nx$ 的图象在二、四象限,

$$\therefore n < 0,$$

$$\therefore k > m > n,$$

故答案为: $k > m > n$.

12. 某学校要组织一次九年级篮球赛, 赛制为单循环形式 (每两班之间都赛一场), 计划安排 45 场比赛, 则设该学校九年级共有 x 个班级, 依据题意, 可以列出方程_____.

【答案】 $\frac{x(x-1)}{2} = 45$

【解析】

【分析】 考查单循环赛制总场数公式、一元二次方程的应用. 解题关键: 牢记单循环赛制“总场数 $= \frac{x(x-1)}{2}$ ”

(x 为参赛方数量), 根据题意列方程; 易错点: 混淆单循环与双循环赛制公式 (误写为 $x(x-1)$), 或忽略解的实际意义 (舍去负根).

首先设参赛班级有 x 个, 明确比赛为单循环赛制; 然后代入单循环总场数公式, 列方程 $\frac{x(x-1)}{2} = 45$.

【详解】 设该学校九年级共有 x 个班级.

$\because$ 赛制为单循环形式 (每两班之间都赛一场),

$$\therefore \text{总比赛场数为 } \frac{x(x-1)}{2}.$$

根据题意, 计划安排 45 场比赛,

$$\therefore \text{列得方程: } \frac{x(x-1)}{2} = 45.$$

故答案为: $\frac{x(x-1)}{2} = 45$.

13. 在实数范围内因式分解: $9x^2 - 12xy + y^2 =$ _____.

【答案】 $[3x - (2 + \sqrt{3})y][3x - (2 - \sqrt{3})y]$

【解析】

【分析】 本题考查了在实数范围内对二次三项式进行因式分解, 解题的关键是利用求根公式求出二次三项式对应的方程的根, 再根据因式分解的方法进行分解.

先将二次三项式视为关于 x 的一元二次方程, 求出其根, 再根据 “若 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根为 x_1, x_2 , 则 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ” 进行因式分解.

【详解】 解: 对于 $9x^2 - 12xy + y^2$, 将其看作关于 x 的方程 $9x^2 - 12yx + y^2 = 0$,

由求根公式得:

$$\begin{aligned} x &= \frac{12y \pm \sqrt{(-12y)^2 - 4 \times 9 \times y^2}}{2 \times 9} = \frac{12y \pm \sqrt{144y^2 - 36y^2}}{18} \\ &= \frac{12y \pm \sqrt{108y^2}}{18} = \frac{12y \pm 6\sqrt{3}y}{18} = \frac{2y \pm \sqrt{3}y}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } 9x^2 - 12xy + y^2 &= 9 \left(x - \frac{2 + \sqrt{3}}{3}y \right) \left(x - \frac{2 - \sqrt{3}}{3}y \right) \\ &= [3x - (2 + \sqrt{3})y][3x - (2 - \sqrt{3})y]. \end{aligned}$$

故答案为: $[3x - (2 + \sqrt{3})y][3x - (2 - \sqrt{3})y]$.

14. 关于 x 的一元二次方程 $(k-3)x^2 - 4x + 2 = 0$ 有实数根, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \leq 5$ 且 $k \neq 3$

【解析】

【分析】 根据关于 x 的一元二次方程 $(k-3)x^2 - 4x + 2 = 0$ 有实数根可得到 $\begin{cases} k-3 \neq 0 \\ (-4)^2 - 4 \times (k-3) \times 2 \geq 0 \end{cases}$,

求解即可得到答案.

【详解】 解: 根据题意可得:

$$\begin{cases} k-3 \neq 0 \\ (-4)^2 - 4 \times (k-3) \times 2 \geq 0 \end{cases}$$

解得: $\begin{cases} k \neq 3 \\ k \leq 5 \end{cases}$,

综上所述: k 的取值范围是 $k \leq 5$ 且 $k \neq 3$,

故答案为: $k \leq 5$ 且 $k \neq 3$.

【点睛】此题考查了一元二次方程的定义以及有实数根的条件, 熟练掌握一元二次方程的定义以及有实数根的条件是解题的关键.

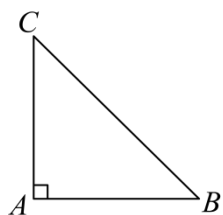
15. 定义: 当三角形中一个内角 α 是另一个内角 β 的两倍时, 我们称此三角形为“特征三角形”, 其中 α 称为“特征角”, 若 $\text{Rt}\triangle ABC$ 是特征三角形, $\angle A$ 是特征角, $BC=6$, 则 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的面积等于 _____.

【答案】9 或 $6\sqrt{3}$ 或 $6\sqrt{3}$ 或 9

【解析】

【分析】分 $\angle A = 90^\circ$ 或 $\angle A \neq 90^\circ$, 分别画图, 根据“特征三角形”的定义即可解决问题.

【详解】解: 如图, 若 $\angle A = 90^\circ$,



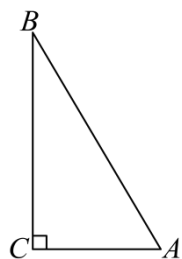
$\therefore \text{Rt}\triangle ABC$ 是特征三角形, $\angle A$ 是特征角,

$$\therefore \angle B = \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore AC = AB = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 9;$$

如图, 若 $\angle A \neq 90^\circ$,



$\therefore \text{Rt}\triangle ABC$ 是特征三角形, $\angle A$ 是特征角,

$$\therefore \angle A = 60^\circ, \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = 2AC,$$

由勾股定理得: $AC^2 + BC^2 = AB^2$,

即 $AC^2 + 6^2 = 4AC^2$,

$\therefore AC = \pm 2\sqrt{3}$ (负值舍去),

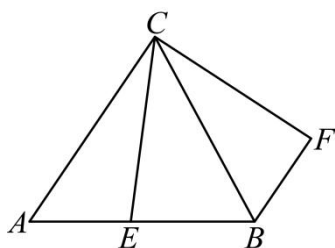
$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6$$

$$= 6\sqrt{3},$$

故答案为: 9 或 $6\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了直角三角形的性质, 勾股定理, 灵活运用勾股定理是解题的关键.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, E 是边 AB 上一点, 连接 CE , 在 BC 右侧作 $BF \parallel AC$, 且 $BF = AE$, 连接 CF . 若 $AC = 25$, $BC = 14$, 则四边形 $EBFC$ 的面积为_____.



【答案】 168

【解析】

【分析】 本题考查等边对等角, 平行线的性质, 角平分线的性质, 勾股定理, 掌握知识点是解题的关键.

过点 C 作 $CM \perp AB$, $CN \perp BF$, 根据等边对等角结合平行线的性质, 推出 $\angle ABC = \angle CBF$, 进而得到 $CM = CN$, 得到 $S_{\triangle CBF} = S_{\triangle ACE}$, 进而得到四边形 $EBFC$ 的面积等于 $S_{\triangle ABC}$, 设 $AM = x$, 勾股定理求出 CM 的长, 再利用面积公式求出 $\triangle ABC$ 的面积即可.

【详解】 解: $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

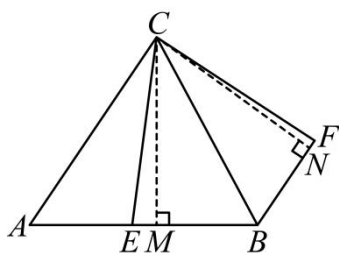
$$\because BF \parallel AC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle CBF,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle CBF,$$

$$\therefore BC \text{ 平分 } \angle ABF,$$

过点 C 作 $CM \perp AB$, $CN \perp BF$,



则: $CM = CN$,

$$\therefore S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} AE \cdot CM, S_{\triangle CBF} = \frac{1}{2} BF \cdot CN, \text{ 且 } BF = AE,$$

$$\therefore S_{\triangle CBF} = S_{\triangle ACE},$$

$$\therefore \text{四边形 } EBFC \text{ 的面积} = S_{\triangle CBF} + S_{\triangle CBE} = S_{\triangle ACE} + S_{\triangle CBE} = S_{\triangle CBA},$$

$$\therefore AC = 25, BC = 14,$$

$$\therefore AB = 25,$$

设 $AM = x$, 则 $BM = 25 - x$,

$$\text{由勾股定理, 得: } CM^2 = AC^2 - AM^2 = BC^2 - BM^2,$$

$$\therefore 25^2 - x^2 = 14^2 - (25 - x)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{527}{25},$$

$$\therefore CM = \sqrt{25^2 - \left(\frac{527}{25}\right)^2} = \frac{336}{25},$$

$$\therefore S_{\triangle CBA} = \frac{1}{2} AB \cdot CM = \frac{1}{2} \times 25 \times \frac{336}{25} = 168,$$

$\therefore$ 四边形 $EBFC$ 的面积为 168.

故答案为: 168.

17. 如图 1, 点 P 从 $\triangle ABC$ 的顶点 B 出发, 沿 $B \rightarrow C \rightarrow A$ 匀速运动到点 A , 图 2 是点 P 运动时, 线段 BP 的长度 y 随时间 x 变化的关系图象, 其中 M 为曲线部分的最低点, 则 AC 边上的高长为_____.

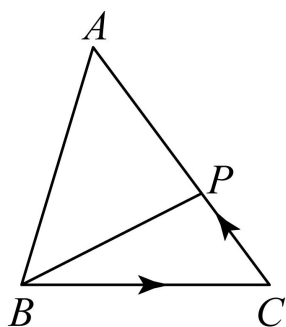


图1

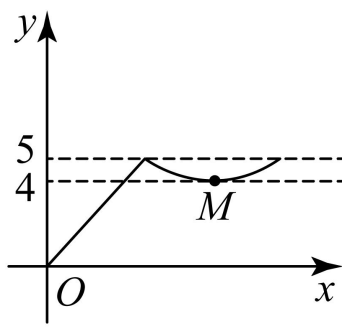


图2

【答案】4

【解析】

【分析】根据题意，当点 P 从 B 运动到 A 的过程中， BP 由 0 开始增大，到 C 时最大为 5；当点 P 从 C 运动到 A 的过程中， BP 的长度先减小，当 $BP \perp AC$ 时达到最小，最小值为 4，然后又增大，进而可求解。

【详解】解：根据题意，结合图 1 和图 2，

当点 P 从 B 运动到 A 的过程中， BP 由 0 开始增大，到 C 时， BP 最大为 5；当点 P 从 C 运动到 A 的过程中， BP 的长度先减小，当 $BP \perp AC$ 时达到最小，最小值为 4，然后又开始增大，则 AC 边上的高长为 4，故答案为：4。

【点睛】本题考查图象的理解和应用，把图形和图象结合理解得到线段长度的变化是解答的关键。

18. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $BC = 2$ ，如果将 $\triangle ABC$ 折叠，使点 B 与点 A 重合，且折痕交边 AB 于点 M ，交边 BC 于点 N 。如果 $\triangle CAN$ 是直角三角形，那么 $\triangle ABC$ 的面积是 _____。

【答案】1 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】本题是等腰三角形的折叠问题，考查了折叠的性质，等腰三角形三线合一性质，勾股定理，三角形面积等知识。分两种情况：当 $\angle ANC = 90^\circ$ 时，根据 $AB = AC$ ， $BC = 2$ ， $\angle ANC = 90^\circ$ 及将 $\triangle ABC$ 折叠，使点 B 与点 A 重合，可得 $BN = AN = 1$ ，可得到 $\triangle ABC$ 的面积；当 $\angle NAC = 90^\circ$ 时，过 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ，设 $BN = x$ ，则 $NH = 1 - x$ ，可得 $AH^2 = AN^2 - NH^2 = 2x - 1$ ， $AC^2 = AH^2 + CH^2 = 2x$ ，又 $AN^2 + AC^2 = CN^2$ ，可得 $BN = AN = \frac{2}{3}$ ， $NH = \frac{1}{3}$ ，再利用勾股定理可得 $AH = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，可得到 $\triangle ABC$ 的面积。

【详解】解：当 $\angle ANC = 90^\circ$ 时，如图：

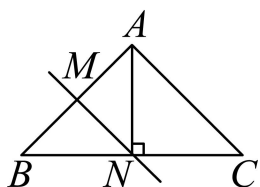
$$\because AB = AC, BC = 2, \angle ANC = 90^\circ,$$

$$\therefore BN = CN = \frac{1}{2}BC = 1,$$

$\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 折叠，使点 B 与点 A 重合，

$$\therefore AN = BN = 1,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积是: } \frac{1}{2}BC \cdot AN = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1;$$



当 $\angle NAC = 90^\circ$ 时,

如图, 过 A 作 $AH \perp BC$ 于 H , 设 $BN = x$,

$$\because AB = AC, BC = 2,$$

$$\therefore BH = CH = \frac{1}{2}BC = 1,$$

$$\therefore NH = 1 - x,$$

$\therefore$ 将 ABC 折叠, 使点 B 与点 A 重合,

$$\therefore AN = BN = x, CN = BC - BN = 2 - x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ANH \text{ 中, } AH^2 = AN^2 - NH^2 = x^2 - (1-x)^2 = 2x - 1,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACH \text{ 中, } AC^2 = AH^2 + CH^2 = 2x - 1 + 1 = 2x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle NAC \text{ 中, } AN^2 + AC^2 = CN^2,$$

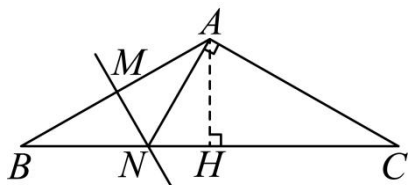
$$\therefore x^2 + 2x = (2-x)^2, \text{ 解得: } x = \frac{2}{3},$$

$$\therefore BN = AN = \frac{2}{3}, NH = \frac{1}{3},$$

$$\therefore AH = \sqrt{AN^2 - NH^2} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore ABC \text{ 的面积是: } \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故答案为: 1 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



三、解答题: (本大题共 9 题, 满分 64 分)

19. 计算:

$$(1) \sqrt{18} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} - \sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{5}-1)^0;$$

$$(2) \left(2\sqrt{12} - 4\sqrt{\frac{1}{8}} + 1 \right) \times \sqrt{6}.$$

【答案】(1) $2\sqrt{2}-2$

$$(2) 12\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的混合运算、负整数指数幂与零指数幂的运算，解题的关键是先化简各部分（二次根式、指数幂），再按运算顺序计算.

(1) 先化简二次根式、计算负整数指数幂、绝对值与零指数幂，再合并同类项；

(2) 先化简括号内的二次根式，再利用乘法分配律展开计算.

【小问 1 详解】

$$\text{解：原式} = \sqrt{9 \times 2} - \sqrt{2} - \sqrt{9} + 1$$

$$= 3\sqrt{2} - \sqrt{2} - 3 + 1$$

$$= 2\sqrt{2} - 2$$

【小问 2 详解】

$$\text{解：原式} = \left(2 \times 2\sqrt{3} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{4} + 1 \right) \times \sqrt{6}$$

$$= (4\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1) \times \sqrt{6}$$

$$= 4\sqrt{3} \times \sqrt{6} - \sqrt{2} \times \sqrt{6} + 1 \times \sqrt{6}$$

$$= 4\sqrt{18} - \sqrt{12} + \sqrt{6}$$

$$= 12\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$$

20. 解方程:

$$(1) 3x(x-1) = 2 - 2x;$$

$$(2) \frac{9}{2}y \left(\frac{1}{3}y - \frac{8}{3} \right) = 3y - 12;$$

$$(3) \text{用配方法解方程 } 3x^2 - 6x + 1 = 0.$$

【答案】(1) $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 1;$

$$(2) \quad y_1 = 5 + \sqrt{17}, \quad y_2 = 5 - \sqrt{17}$$

$$(3) \quad x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解法、公式法、配方法解一元二次方程. 熟练掌握解法并灵活选择是解题的关键.

(1) 用因式分解法解一元二次方程即可;

(2) 整理成一般形式后利用公式法解方程即可;

(3) 利用配方法解一元二次方程即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } 3x(x-1) = 2-2x$$

$$3x(x-1) + 2(x-1) = 0,$$

$$(3x+2)(x-1) = 0$$

$$3x+2=0 \text{ 或 } x-1=0$$

$$\text{解得, } x_1 = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = 1;$$

【小问 2 详解】

$$\frac{9}{2}y\left(\frac{1}{3}y - \frac{8}{3}\right) = 3y - 12$$

$$\text{整理得到, } y^2 - 10y + 8 = 0$$

$$a = 1, b = -10, c = 8,$$

$$\therefore b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 68,$$

$$\therefore y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{68}}{2} = 5 \pm \sqrt{17}$$

$$\therefore y_1 = 5 + \sqrt{17}, \quad y_2 = 5 - \sqrt{17}$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } 3x^2 - 6x + 1 = 0,$$

$$x^2 - 2x = -\frac{1}{3},$$

$$x^2 - 2x + 1 = -\frac{1}{3} + 1,$$

$$(x-1)^2 = \frac{2}{3},$$

$$x-1 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore x = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{解得, } x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$21. \text{ 解不等式: } \sqrt{2}x - \sqrt{27} > 3x - \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

$$\text{【答案】 } x < -\frac{15\sqrt{3} + 5\sqrt{6}}{14}$$

【解析】

【分析】本题考查了含二次根式的一元一次不等式的解法，解题的关键是先化简二次根式，再通过移项、合并同类项解不等式。

先化简不等式中的二次根式，再将含 x 的项移到左边，常数项移到右边，合并同类项后系数化为 1（注意系数符号对不等号方向的影响）。

$$\text{【详解】解: } \sqrt{2}x - \sqrt{27} > 3x - \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\text{原不等式化为: } \sqrt{2}x - 3\sqrt{3} > 3x - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{移项: } \sqrt{2}x - 3x > 3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{合并同类项: } (\sqrt{2} - 3)x > \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{系数化为 1 (} \sqrt{2} - 3 < 0, \text{ 不等号方向改变): } x < \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2} - 3},$$

有理化分母: $x < \frac{5\sqrt{3}(3+\sqrt{2})}{2 \times (2-9)},$

$\therefore$ 不等式的解集为 $x < -\frac{15\sqrt{3}+5\sqrt{6}}{14}.$

22. 已知 $2-\sqrt{3}$ 是方程 $x^2-4x+c=0$ 的一个根, 求方程的另一个根及 c 的值.

【答案】 该方程的另一个根为: $2+\sqrt{3}$, c 的值为 1.

【解析】

【分析】 设出方程另一根, 利用根与系数的关系建立方程求解即可得出结论.

【详解】 解: 设方程的另一根为 m ,

$\because 2-\sqrt{3}$ 是方程 $x^2-4x+c=0$ 的一个根,

$\therefore 2-\sqrt{3}+m=4, (2-\sqrt{3})m=c$

解 $2-\sqrt{3}+m=4$ 得 $m=2+\sqrt{3}$

将 $m=2+\sqrt{3}$ 代入 $(2-\sqrt{3})m=c$ 得 $c=1$.

所以该方程的另一个根为: $2+\sqrt{3}$, c 的值为 1.

【点睛】 本题考查一元二次方程的根和根与系数关系. 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的两根,

则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}.$

23. 已知 y 与 $x+1$ 成正比例关系, 当 $x=2$ 时, $y=1$, 求: 当 $x=-3$ 时, 求 y 的值.

【答案】 当 $x=-3$ 时, $y=-\frac{2}{3}.$

【解析】

【分析】 根据题意得到 $y=k(x+1)$, 然后将 $x=2, y=1$ 代入求得 k 的值, 进而可得函数解析式, 然后将 $x=-3$ 代入即可求得 y 的值.

【详解】 根据题意可得: $y=k(x+1),$

将 $x=2, y=1$ 代入得: $1=3k,$

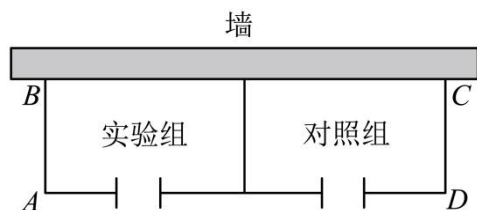
解得: $k=\frac{1}{3},$

$\therefore$ 函数解析式为: $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3},$

当 $x = -3$ 时, $y = -3 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$.

【点睛】本题主要考查了待定系数法求正比例函数解析式和代数求值, 根据题意求得正比例函数解析式是关键.

24. 学校打算建立一块矩形的生物种植田来种植水果黄瓜, 一面利用学校的墙 (墙的最大可用长度为10米), 其余部分需要用总长为22米的栅栏围成, 且矩形中间需用栅栏隔开, 栅栏因实验需要, 有两个宽为1米的门 (门无需栅栏, 如图所示). 设种植田 AB 为 m 米. 若该种植田的面积为36平方米 (栅栏的占地面积忽略不计), 求该种植田的宽 m .



【答案】6 米

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的实际应用, 解题关键是根据题目给出的条件, 找出合适的等量关系, 正确列出方程求解.

根据题意可得种植田的长为 $(22 - 3m + 1 + 1)$ 米, 再根据面积公式列一元二次方程, 解方程, 最后根据墙的最大可用长度为10米对求出的根进行取舍.

【详解】解: $\because$ 种植田 AB 为 m 米, 栅栏总长为22米, 有两个宽为1米的门,

$\therefore$ 种植田的长 BC 为 $22 - 3m + 1 + 1 = (24 - 3m)$ 米,

$\because$ 该种植田的面积为36平方米,

$\therefore (24 - 3m)m = 36$,

整理得: $(m - 2)(m - 6) = 0$,

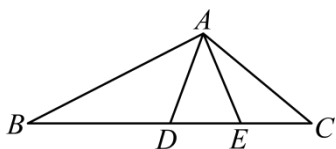
解得 $m_1 = 2$, $m_2 = 6$,

当 $m = 2$ 时, $BC = 24 - 3 \times 2 = 18 > 10$, 不合题意, 舍去;

当 $m = 6$ 时, $BC = 24 - 3 \times 6 = 6 < 10$, 符合题意.

答: 该种植田的宽 m 为6米.

25. 已知, 如图: ABC 中 AD 为 $\triangle BAC$ 的中线, AE 是 $\triangle ADC$ 的中线.



(1) 如果 $DA = DB = DC$ ，求证 $\angle BAC = 90^\circ$ 。

(2) 如果 $BD = DC = AC$ ，求证： $AB = 2AE$ 。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质与三角形内角和定理、全等三角形的判定与性质，解题的关键是利用等腰三角形的等边对等角及全等三角形的对应边相等进行推导。

(1) 利用 $DA = DB$ 、 $DA = DC$ 得等腰三角形，结合三角形内角和证 $\angle BAC = 90^\circ$ ；

(2) 延长 AE 构造全等三角形，利用 $BD = DC = AC$ 证全等得对应边相等。

【小问 1 详解】

证明： $\because DA = DB$ ，

$\therefore \angle B = \angle BAD$ ；

$\because DA = DC$ ，

$\therefore \angle C = \angle CAD$ ；

$\because \angle B + \angle BAD + \angle C + \angle CAD = 180^\circ$ ，

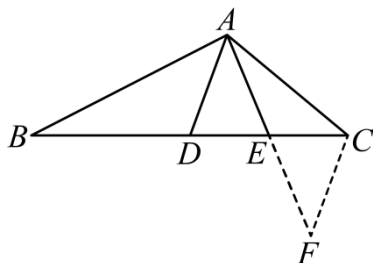
$\therefore 2(\angle BAD + \angle CAD) = 180^\circ$ ，

即 $2\angle BAC = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$ 。

【小问 2 详解】

证明：延长 AE 至 F ，使 $EF = AE$ ，连接 CF 。



$\because AE$ 是 $\triangle ADC$ 的中线，

$\therefore DE = CE$ ；

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle FCE$ 中，

$$\begin{cases} AE = FE \\ \angle AED = \angle FEC, \\ DE = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle FCE (\text{SAS}),$$

$$\therefore AD = FC, \quad \angle ADE = \angle FCE;$$

$$\text{由 } DC = AC, \text{ 得; } \angle ADE = \angle DAC,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle FCE,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DAC + \angle ACD, \quad \angle FCA = \angle FCE + \angle ACD,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle FCA;$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 和 } \triangle CFA \text{ 中, } \begin{cases} BD = AC \\ \angle ADB = \angle FCA, \\ AD = CF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle FAC (\text{SAS}),$$

$$\therefore AB = AF = 2AE.$$

26. 阅读材料, 回答问题: 如果对于任意一个三角形, 只要它的三边长 a, b, c (不妨设 $a \leq b \leq c$) 都在某个函数 $f(x)$ 的定义域内, 并且 $f(a), f(b), f(c)$ 也能构成一个三角形, 我们就称这样的函数 $f(x)$ 为“保三角函数”.

(1) 试证明: 任意一个比例系数大于零的正比例函数都是“保三角函数”.

(2) 试判断: $f(x) = \frac{1}{x}$ 是否是“保三角函数”? 如果是, 请给出证明; 如果不是, 请举出反例.

【答案】(1)

见解析 (2)

$f(x) = \frac{1}{x}$ 不是“保三角函数”, 反例见解析

【解析】

【分析】本题考查了新定义“保三角函数”的理解与应用, 解题的关键是利用三角形三边关系 (两边之和大于第三边) 结合函数性质分析.

(1) 设正比例函数 $f(x) = kx (k > 0)$, 由三角形三边关系 $a + b > c$, 结合 $k > 0$ 证 $f(a) + f(b) > f(c)$, 即证最长边小于其它两边之和即可;

(2) 举反例, 取满足 $a + b > c$ 的三角形三边, 验证 $f(b) + f(c) \leq f(a)$.

【小问 1 详解】

证明：设正比例函数为 $f(x) = kx$ ($k > 0$)，

任取三角形三边 $a \leq b \leq c$ ，满足 $a + b > c$ ，

$\because k > 0$ ，

$\therefore f(a) = ka, f(b) = kb, f(c) = kc$ ，

$\therefore f(a) + f(b) = k(a + b) > kc = f(c)$ ，

又 $f(a) \leq f(b) \leq f(c)$ ，

故 $f(a), f(b), f(c)$ 能构成三角形，

即比例系数大于零的正比例函数是“保三角函数”。

【小问2详解】

解： $f(x) = \frac{1}{x}$ 不是“保三角函数”，反例取三角形三边 $a = 1, b = 3, c = 3$ ，满足 $1 + 3 > 3$ ，

但 $f(1) = 1, f(3) = \frac{1}{3}, f(3) + f(3) = \frac{2}{3} < 1 = f(1)$ ，不满足三角形三边关系，

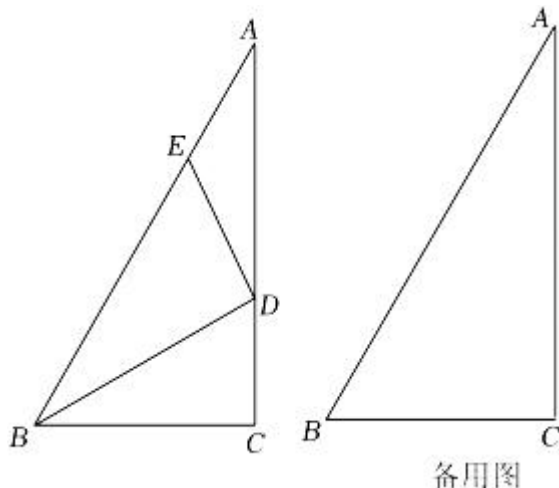
故 $f(x) = \frac{1}{x}$ 不是“保三角函数”。

27. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ, BC = 6$ ， $\angle ABC$ 的平分线与线段 AC 交于点 D ，且有 $AD = BD$ ，点 E 是线段 AB 上的动点（与 A, B 不重合），联结 DE ，设 $AE = x, DE = y$ 。

(1) 求 $\angle A$ 的度数；

(2) 求 y 关于 x 的函数解析式（无需写出定义域）；

(3) 当 $\triangle BDE$ 是等腰三角形时，求 AE 的长。



【答案】(1) 30° ；(2) $y = \sqrt{x^2 - 12x + 48}$ ；(3) $12 - 4\sqrt{3}$ 或 8

【解析】

【分析】(1) 根据等腰三角形的性质、角平分线的定义得到 $\angle A = \angle DBA = \angle CBD$ ，根据直角三角形的性质

求出 $\angle A$;

(2) 作 $DF \perp AB$ 于 F , 根据勾股定理求出 DF , 再根据勾股定理列式计算求出 y 关于 x 的函数解析式;

(3) 分 $BE = BD$ 、 $BE = DE$ 两种情况, 根据等腰三角形的性质、勾股定理计算即可.

【详解】解: (1) $\because AD = BD$,

$$\therefore \angle A = \angle DBA,$$

$\because BD$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,

$$\therefore \angle CBD = \angle DBA,$$

$$\therefore \angle A = \angle DBA = \angle CBD,$$

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

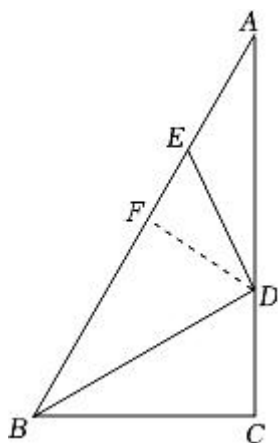
$$\therefore \angle A = 30^\circ;$$

(2) 如图, 作 $DF \perp AB$ 于 F ,

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 6$, $\angle A = 30^\circ$,

$$\therefore AB = 2BC = 12,$$

$$\because DA = DB, DF \perp AB,$$



$$\therefore AF = \frac{1}{2} AB = 6,$$

$$\therefore EF = |6 - x|,$$

在 $Rt\triangle AFD$ 中, $\angle A = 30^\circ$,

$$\therefore DF = \frac{\sqrt{3}}{3} AF = 2\sqrt{3},$$

在 $Rt\triangle DEF$ 中, $DE^2 = EF^2 + DF^2$,

$$\text{即 } y^2 = (6 - x)^2 + (2\sqrt{3})^2,$$

$$\text{解得: } y = \sqrt{x^2 - 12x + 48};$$

(3) 在 $Rt\triangle AFD$ 中, $\angle A = 30^\circ$, $DF = 2\sqrt{3}$,

$$\therefore AD = BD = 4\sqrt{3},$$

当 $BE = BD = 4\sqrt{3}$ 时, $AE = 12 - 4\sqrt{3}$;

当 $BE = DE$ 时, $12 - x = \sqrt{x^2 - 12x + 48}$,

解得: $x = 8$, 即 $AE = 8$,

$\therefore$ 点 E 与 A 、 B 不重合,

$$\therefore DB \neq DE,$$

综上所述: 当 $\triangle BDE$ 是等腰三角形时, AE 的长为 $12 - 4\sqrt{3}$ 或 8 .

【点睛】 本题考查了角的平分线, 等腰三角形的性质, 勾股定理, 熟练掌握勾股定理, 灵活运用分类思想是解题的关键.