

2025 学年第一学期民办南模中学 10 月能力诊断

初二年级 数学学科

考试时间：90 分钟

卷一（满分：100 分）

一、选择题（每题 2 分，共 8 分）

1. 下列关于 x 的方程中一定有实数解的是（ ）

A. $x^2 - x + 1 = 0$

B. $x^2 - mx - 1 = 0$

C. $\sqrt{2}x^2 - 2x + 1 = 0$

D. $x^2 - x - m = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】根据一元二次方程的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ 时方程有解，逐个判断即可。

【详解】解：∵ A、 $x^2 - x + 1 = 0$ ， $\Delta = -3 < 0$ ，故此方程无实数解，不符合题意；

B、∵ $x^2 - mx - 1 = 0$ ， $\Delta = m^2 + 4 > 0$ ，故此方程有实数解，符合题意；

C、∵ $\sqrt{2}x^2 - 2x + 1 = 0$ ， $\Delta = 4 - 4\sqrt{2} < 0$ ，故此方程无实数解，不符合题意；

D、∵ $x^2 - x - m = 0$ ， $\Delta = 1 + 4m$ （由于 m 的值不确定，故 $1 + 4m$ 可以 ≥ 0 ，可以 < 0 ），故此方程不一定有实数解，不符合题意。

故选：B。

【点睛】此题考查了一元二次方程解得情况，解题的关键是熟练掌握一元二次方程判别式和解得关系。当 $b^2 - 4ac > 0$ 时，一元二次方程有两个不相等的实数根；当 $b^2 - 4ac = 0$ 时，一元二次方程有两个相等的实数根；当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，一元二次方程没有实数根。

2. 下列二次根式中，与 $\sqrt{2a}$ 是同类二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{a}$

B. $\sqrt{4a}$

C. $\sqrt{2a^2}$

D. $\sqrt{8a}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是同类二次根式，把几个二次根式化为最简二次根式后，如果它们的被开方数相同，就把这几个二次根式叫做同类二次根式。先把各个二次根式化简，根据同类二次根式的概念判断即可。

【详解】解：A、 $\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{2a}$ 不是同类二次根式，故 A 错误；

B、 $\sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{2a}$ 不是同类二次根式，故 B 错误；

C、 $\sqrt{2a^2} = |a|\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{2a}$ 不是同类二次根式，故 C 错误；

D、 $\sqrt{8a} = 2\sqrt{2a}$ ，与 $\sqrt{2a}$ 是同类二次根式，故 D 正确。

故选：D。

3. 下列说法中正确的个数是 ()

①方程 $x^2 + 2x + 2 = 0$ 的两个实根的积为 2

②关于 x 的方程 $ax^2 + (a-1)x - 1 = 0$ 有两个实数根

③方程 $5x^2 = x$ 的根为 $x = \frac{1}{5}$

④关于 x 的方程 $x^2 - 2mx - 3m^2 = 0$ 无论 m 取何值一定有两个不相等的实数根

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的解法、判别式，熟练掌握以上知识点是解题的关键。

根据一元二次方程的判别式逐项判断即可。

【详解】解：①方程 $x^2 + 2x + 2 = 0$ ， $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$ ，

故方程无解，该序号的说法错误；

②当 $a = 0$ 时，关于 x 的方程 $ax^2 + (a-1)x - 1 = 0$ 可化为： $-x - 1 = 0$ ，

解得： $x = -1$ ，只有一个实数根，故该序号的说法错误；

③方程 $5x^2 = x$ ，

$$5x^2 - x = 0,$$

$$x(5x - 1) = 0,$$

解得： $x_1 = 0$ ， $x_2 = \frac{1}{5}$ ，故该序号的说法错误；

④关于 x 的方程 $x^2 - 2mx - 3m^2 = 0$ ，

$$\Delta = (-2m)^2 - 4 \times (-3m^2) = 16m^2 \geq 0,$$

当 $m = 0$ 时，方程有两个相等的实数根，故该序号的说法错误；

所以正确的个数是 0.

故选: A.

4. 能使等式 $\sqrt{\frac{x}{x-2}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$ 成立的 x 的取值范围是 ()

A. $x \neq 2$

B. $x \geq 0$ 且 $x \neq 2$

C. $0 \leq x < 2$

D. $x > 2$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查二次根式有意义的条件及分式二次根式的性质. 等式 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 成立的条件是 $a \geq 0$ 且 $b > 0$, 据此列出不等式组求解即可.

【详解】 解: $\because \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}},$

$$\therefore \begin{cases} x \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases},$$

解得: $x > 2$,

故选: D.

二、填空题 (每空 2 分, 共 32 分)

5. 一元二次方程 $\sqrt{5}x^2 = \sqrt{3}x$ 的解是_____.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = \frac{\sqrt{15}}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解法. 熟练掌握一元二次方程的解法是解题的关键. 通过移项, 因式分解的方法来求解即可.

【详解】 解: $\sqrt{5}x^2 = \sqrt{3}x,$

$$\sqrt{5}x^2 - \sqrt{3}x = 0,$$

$$x(\sqrt{5}x - \sqrt{3}) = 0,$$

$$x = 0 \text{ 或 } \sqrt{5}x - \sqrt{3} = 0,$$

解得: $x_1 = 0, x_2 = \frac{\sqrt{15}}{5}.$

故答案为: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

6. $\sqrt{0.16}$ 的平方根是_____.

【答案】 $\pm \frac{\sqrt{10}}{5}$ ## $\pm \sqrt{0.4}$ ## $\frac{1}{5}\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 本题考查了平方根的概念. 熟练掌握平方根的概念是解题的关键.

先明确平方根的概念, 再根据概念进行计算即可.

【详解】 解: $\sqrt{0.16} = 0.4$,

设 0.4 的平方根为 x ,

所以有 $x^2 = 0.4$, 即 $x = \pm\sqrt{0.4} = \pm\sqrt{\frac{4}{10}} = \pm\frac{2}{\sqrt{10}} = \pm\frac{2\sqrt{10}}{10} = \pm\frac{\sqrt{10}}{5}$,

故答案为: $\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$.

7. 最简二次根式 $\sqrt{a+3b}$ 与 $\sqrt[b+1]{2a-b+6}$ 是同类二次根式, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

【答案】 ①. -2 ②. 1

【解析】

【分析】 根据同类二次根式的定义, 得 $b+1=2, a+3b=2a-b+6$, 解答即可.

本题考查了同类二次根式的定义, 熟练掌握定义是解题的关键.

【详解】 解: 根据题意, 得 $b+1=2, a+3b=2a-b+6$,

解得 $b=1, a=-2$,

故答案为: -2, 1.

8. 如果 $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} - 2$, 那么 $x^y =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{9}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式和代数式求值, 先根据二次根式的被开方数为非负数求出 x 的值, 再代入求出

y , 最后求 x^y 即可.

【详解】解：∵二次根式的被开方数为非负数，

$$\therefore x-3 \geq 0, 3-x \geq 0,$$

$$\therefore x=3,$$

将 $x=3$ 代入 $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}-2$ 中，得 $y=-2$ ，

$$\therefore x^y = 3^{-2} = \frac{1}{9}.$$

故答案为： $\frac{1}{9}$.

9. 化简： $\sqrt{-a^3} - a^2 \sqrt{-\frac{1}{a}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的减法运算，解题的关键是掌握二次根式的加减法运算法则．先把二次根式化为最简二次根式，再合并同类二次根式即可．

【详解】解：要使根式有意义，则 $-a^3 \geq 0$ 且 $-\frac{1}{a} \geq 0$ ，解得 $a < 0$ ，

$$\begin{aligned} & \therefore \sqrt{-a^3} - a^2 \sqrt{-\frac{1}{a}} \\ &= \sqrt{a^2 \cdot (-a)} - a^2 \sqrt{\frac{-a}{a^2}} \\ &= |a| \sqrt{-a} - a^2 \frac{\sqrt{-a}}{|a|} \\ &= -a\sqrt{-a} - a^2 \frac{\sqrt{-a}}{-a} \\ &= -a\sqrt{-a} + a\sqrt{-a} \\ &= 0, \end{aligned}$$

故答案为： 0 .

10. 用科学记数法将 4298207292 保留三个有效数字 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 4.30×10^9

【解析】

【分析】 本题主要考查了科学记数法，有效数字，熟练掌握以上知识是解题的关键．

先将数据用科学记数法表示，再将其保留三个有效数字即可.

【详解】解：∵用科学记数法表示 4298207292 可得 4.298207292×10^9 ,

∴ 4.298207292×10^9 保留三个有效数字为 4.30×10^9 ,

故答案为: 4.30×10^9 .

11. 关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2 + x + m^2 - 2m - 3 = 0$ 有一个根为 0, 则 m 的值为_____.

【答案】 $m=3$

【解析】

【详解】解：一元二次方程 $(m+1)x^2 + x + m^2 - 2m - 3 = 0$ 得, $m^2 - 2m - 3 = 0$, 解之得, $m = -1$ 或 3 ,

∵ $m+1 \neq 0$, 即 $m \neq -1$,

∴ $m=3$

故本题答案为 $m=3$.

【点评】本题逆用一元二次方程解的定义易得出 a 的值, 但不能忽视一元二次方程成立的条件 $m+1 \neq 0$, 因此在解题时要重视解题思路的逆向分析.

12. 当 k _____ 时, 方程 $kx^2 - 3x + 1 = 0$ 有两个实根.

【答案】 $\leq \frac{9}{4}$, 且 $k \neq 0$.

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程根的判别式,

根据一元二次方程 $kx^2 - 3x + 1 = 0$ 有两个根, 可得 $b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4k \geq 0$, 且 $k \neq 0$, 再求出答案即可.

【详解】解: ∵一元二次方程 $kx^2 - 3x + 1 = 0$ 有两个根,

∴ $b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4k \geq 0$, 且 $k \neq 0$,

解得 $k \leq \frac{9}{4}$, 且 $k \neq 0$.

故答案为: $\leq \frac{9}{4}$, 且 $k \neq 0$.

13. 关于 x 的方程 $x^2 + 2kx + (k-2)^2 = x$, 若方程有两个相等的实根, 则 $k =$ _____.

【答案】 $\frac{5}{4}$

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0, a, b, c \text{ 为常数})$ 根的判别式. 当 $\Delta > 0$, 方程

有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ ，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ ，方程没有实数根。由方程 $x^2 + 2kx + (k-2)^2 = x$ 变为 $x^2 + (2k-1)x + (k-2)^2 = 0$ ，根据方程有两个相等的实根，得 $\Delta = (2k-1)^2 - 4 \times 1 \times (k-2)^2 = 0$ ，解 k 的方程即可。

【详解】解：∵ 方程 $x^2 + 2kx + (k-2)^2 = x$ 即 $x^2 + (2k-1)x + (k-2)^2 = 0$ 有两个相等的实根，
 $\therefore \Delta = (2k-1)^2 - 4 \times 1 \times (k-2)^2 = 0$ ，
 整理得： $4k - 5 = 0$ ，
 解得 $k = \frac{5}{4}$ 。
 故答案为： $\frac{5}{4}$ 。

14. 关于 x 的方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 的一个根是另一个根的 2 倍，则 $m =$ _____。

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根与系数的关系。熟练掌握一元二次方程根与系数的关系是解题的关键。利用一元二次方程根与系数的关系（韦达定理）来求解即可。

【详解】解：设方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 的两个根为 x_1 ， x_2 ，且 $x_1 = 2x_2$ ，
 $\therefore x_1 + x_2 = 3$ ， $x_1 x_2 = m$ ，
 将 $x_1 = 2x_2$ 代入 $x_1 + x_2 = 3$ ，
 解得 $x_2 = 1$ ，
 $\therefore x_1 = 2x_2 = 2 \times 1 = 2$ ，
 $\therefore m = x_1 x_2 = 2 \times 1 = 2$ 。
 故答案为： 2。

15. 在实数范围内因式分解：

(1) $x^2 - 3x - 1 =$ _____；

(2) $-2x^2 y^2 + 8xy - 5 =$ _____。

【答案】 ①. $(x - \frac{3 + \sqrt{13}}{2})(x - \frac{3 - \sqrt{13}}{2})$ ②. $-2(xy - \frac{4 + \sqrt{6}}{2})(xy - \frac{4 - \sqrt{6}}{2})$

【解析】

【分析】 本题考查实数范围内的因式分解. 注意掌握公式法解一元二次方程的知识.

(1) 首先令 $x^2 - 3x - 1 = 0$, 利用公式法即可求得此关于 x 的一元二次方程的解, 继而可将此多项式分解;

(2) 令 $t = xy$, 则式子可化为 $-2t^2 + 8t - 5$, 令 $-2t^2 + 8t - 5 = 0$, 求解即可.

【详解】 (1) 解: 令 $x^2 - 3x - 1 = 0$,

$$\text{则 } a = 1, b = -3, c = -1,$$

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

$$= (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-1),$$

$$= 13 > 0,$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{13}}{2},$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2},$$

$$\therefore x^2 - 3x - 1 = (x - \frac{3 + \sqrt{13}}{2})(x - \frac{3 - \sqrt{13}}{2});$$

(2) 解: 令 $t = xy$, 则式子可化为 $-2t^2 + 8t - 5$,

$$\text{令 } -2t^2 + 8t - 5 = 0,$$

$$\text{则 } a = -2, b = 8, c = -5,$$

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

$$= 8^2 - 4 \times (-2) \times (-5),$$

$$= 24 > 0,$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{24}}{2 \times (-2)},$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore t_1 = \frac{4 + \sqrt{6}}{2}, t_2 = \frac{4 - \sqrt{6}}{2},$$

$$\text{即 } xy = \frac{4 + \sqrt{6}}{2} \text{ 或 } xy = \frac{4 - \sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore -2x^2y^2 + 8xy - 5 = -2\left(xy - \frac{4 + \sqrt{6}}{2}\right)\left(xy - \frac{4 - \sqrt{6}}{2}\right).$$

16. 我国西部某地决定加快植树造林的速度, 如果计划用两年的时间将防风林的面积从现在的 2 万亩扩大到 2.42 万亩, 则这两年平均每年的增长率为_____.

【答案】 10%

【解析】

【分析】 设这两年平均每年的增长率为 x , 根据题意, 得 $2(1+x)^2 = 2.42$, 解方程即可.

本题考查了平均增长率问题, 正确列方程并熟练解答是解题的关键.

【详解】 设这两年平均每年的增长率为 x , 根据题意, 得 $2(1+x)^2 = 2.42$,

解得 $x_1 = 0.1 = 10\%$, $x_2 = -2.1$ (舍去),

故答案为: 10%.

17. 小杰将 1000 元压岁钱按一年定期存入银行, 到期后取出 200 元用来购买学习用品, 剩下的 800 元和应得的利息又全部按一年定期存入银行. 若存款的年利率为 x , 这样到期后账户里有 892.5 元, 由题意可列方程: _____.

【答案】 $(800 + 1000x)(1 + x) = 892.5$

【解析】

【分析】 本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程, 解题关键是要读懂题目的意思, 根据题目给出的条件, 找出合适的等量关系列出方程. 可以设存款利率为 x , 第一年提取 200 元后存款为 $1000 \times (1 + x) - 200 = 800 + 1000x$, 第二年后可得存款为 $(800 + 1000x)(1 + x) = 892.5$, 此题得解.

【详解】 解: 设存款利率为 x , 则第一年提取 200 元后存款为 $1000 \times (1 + x) - 200$, 根据题意, 可列方程为: $(800 + 1000x)(1 + x) = 892.5$.

故答案为: $(800+1000x)(1+x)=892.5$.

18. “两个一元二次方程有且只有一个公共根, 这两个方程叫做互为好友方程, 这两个公共根叫做好友根.”

例如 $x^2-x-2=0$ 和 $x^2-2x-3=0$ 就是互为好友方程, 好友根为 $x=-1$. 如果 $x^2-1=0$ 和

$ax^2-x-2=0$ 就是互为好友方程, 那么 $a=$ _____.

【答案】1 或 3

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的解及解一元二次方程, 正确理解“互为好友方程”的定义是解题关键.

先解出 $x^2-1=0$, 然后分为 $x=-1$ 和 $x=1$ 两种情况, 再代入计算即可.

【详解】解: $\because x^2-1=0$,

$\therefore x=\pm 1$,

当好友根为 $x=-1$ 时, 则 $a+1-2=0$,

即 $a=1$;

当好友根为 $x=1$ 时, 则 $a-1-2=0$,

即 $a=3$;

故答案为: 1 或 3.

三、计算题 (每题 4 分, 共 28 分)

19. 计算: $\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\sqrt{12}-(\sqrt{3}+1)^2-\sqrt{\frac{3}{4}}$.

【答案】 $-\frac{9}{2}$.

【解析】

【详解】试题分析: 先根据二次根式的性质和利用完全平方公式计算, 然后化简后合并即可.

试题解析:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}{9-3} + 2\sqrt{3} - (3+2\sqrt{3}+1) - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + 2\sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{9}{2}.\end{aligned}$$

$$20. \frac{2}{b}\sqrt{ab} \cdot \left(-\frac{2}{3}\sqrt{a^3b}\right) \div \frac{1}{3}\sqrt{\frac{b}{a}}$$

【答案】 $-\frac{4a^2}{b}\sqrt{ab}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的乘除计算法则和化简法则求解即可.

【详解】 解原式 $= \frac{2}{b}\sqrt{ab} \cdot \left(-\frac{2}{3}a\sqrt{ab}\right) \div \frac{1}{3a}\sqrt{ab}$

$$= -\frac{4a}{3b}(\sqrt{ab})^2 \div \frac{1}{3a}\sqrt{ab}$$
$$= -\frac{4a}{3b}(\sqrt{ab})^2 \times \frac{3a}{\sqrt{ab}}$$
$$= -\frac{4a^2}{b}\sqrt{ab}$$

【点睛】 此题主要考查了二次根式的乘除运算和二次根式的性质与化简， 正确化简二次根式是解题关键.

21. 用配方法解方程: $2x^2 + x - 2 = 0$

【答案】 $x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$

【解析】

【分析】 利用配方法求解即可.

本题考查了配方法求解方程的根， 选择适当解方程的方法是解题的关键.

【详解】 解: $2x^2 + x - 2 = 0$,

移项, 得 $2x^2 + x = 2$.

系数化为 1, 得 $x^2 + \frac{1}{2}x = 1$

配方, 得 $x^2 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{16}$, 即 $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}$.

两边开平方, 得 $x + \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$.

解得 $x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$.

22. 解方程: $\frac{1}{2}x - 1 = 2x^2$

【答案】无解

【解析】

【分析】 本题考查的是一元二次方程的解法.

先找出方程的二次项系数, 一次项系数和常数项, 再用根的判别式即可求解.

【详解】解: $\because \frac{1}{2}x - 1 = 2x^2$,

移项得: $2x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$,

去分母得: $4x^2 - x + 2 = 0$,

$a = 4, b = -1, c = 2$,

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-1)^2 - 4 \times 4 \times 2$

$= 1 - 32$

$= -31 < 0$,

$\therefore$ 该方程没有实数根,

即该方程无解.

23. 解方程: $(2x - 1)^2 + (1 - 2x) = 2$

【答案】 $x = 0$ 或 $x = \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解法解一元二次方程, 先化简方程再因式分解求解即可.

【详解】解: $(2x - 1)^2 + (1 - 2x) = 2$,

$4x^2 - 4x + 1 + 1 - 2x - 2 = 0$,

$4x^2 - 6x = 0$,

$2x^2 - 3x = 0$,

$x(2x - 3) = 0$,

$x = 0$ 或 $2x - 3 = 0$,

$$\therefore x=0 \text{ 或 } x=\frac{3}{2}.$$

24. 解方程: $x^2 + 5x - m^2 + m + 6 = 0$

【答案】 $x_1 = -m - 2, x_2 = m - 3$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解法. 熟练掌握一元二次方程的解法是解题的关键.

利用因式分解法来解这个方程即可.

【详解】 解: $x^2 + 5x - m^2 + m + 6 = 0$

$$x^2 + 5x - (m^2 - m - 6) = 0$$

$$x^2 + 5x - (m - 3)(m + 2) = 0$$

$$[x + (m + 2)][x + (3 - m)] = 0, \text{ 即 } (x + m + 2)(x - m + 3) = 0$$

解得 $x_1 = -m - 2, x_2 = m - 3$.

25. 在实数范围内因式分解: $(x^2 + 6x)^2 + 8(x^2 + 6x) - 9$

【答案】 $(x + 3)^2(x + 3 + \sqrt{10})(x + 3 - \sqrt{10})$

【解析】

【分析】 本题考查了多项式的因式分解, 解题的关键是掌握因式分解的方法. 把 $x^2 + 6x$ 看作整体, 再因式分解为 $(x^2 + 6x + 9)(x^2 + 6x - 1)$, 最后再次进行因式分解即可.

【详解】 解: $(x^2 + 6x)^2 + 8(x^2 + 6x) - 9$

$$= (x^2 + 6x + 9)(x^2 + 6x - 1)$$

$$= (x + 3)^2(x + 3 + \sqrt{10})(x + 3 - \sqrt{10}).$$

四、解答题 (共 32 分)

26. 已知 $\sqrt{2a+1}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{5-2a}}$ 都有意义, 且 a 是整数, 试解关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 5 = x(ax - 2) - 2$.

【答案】 当 $a = 0$ 时, 方程的根为 $x_1 = 1, x_2 = -3$; 当 $a = 2$ 时, 方程没有实数根.

【解析】

【分析】 先根据二次根式有意义求得 a 的取值范围, 进而可求得 a 的整数值, 再逐个代入一元二次方程求解即可, 注意 $a = 1$ 时, 方程不是一元二次方程, 故 $a = 1$ 舍去.

【详解】解： $\because \sqrt{2a+1}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{5-2a}}$ 都有意义，

$$\therefore \begin{cases} 2a+1 \geq 0 \\ 5-2a > 0 \end{cases},$$

解得： $-0.5 \leq a < 2.5$ ，

又 $\because a$ 是整数，

$$\therefore a = 0, 1, 2,$$

当 $a = 0$ 时，方程为 $x^2 - 5 = -2x - 2$ ，

整理得： $x^2 + 2x - 3 = 0$ ，

解得： $x_1 = 1$ ， $x_2 = -3$ ，

当 $a = 1$ 时，方程为 $x^2 - 5 = x^2 - 2x - 2$ ，

即 $-5 = -2x - 2$ ，此方程为一元一次方程，不符合题意，

$\therefore a = 1$ 舍去，

当 $a = 2$ 时，方程为 $x^2 - 5 = 2x^2 - 2x - 2$ ，

整理得： $x^2 - 2x + 3 = 0$ ，

$$\because b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8 < 0,$$

$\therefore$ 此方程没有实数根，

综上所述，当 $a = 0$ 时，方程的根为 $x_1 = 1$ ， $x_2 = -3$ ；当 $a = 2$ 时，方程没有实数根。

【点睛】本题考查了二次根式有意义的条件以及一元二次方程的定义及解法，熟练掌握一元二次方程的解法是解决本题的关键。

27. 如果关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - (2k+1)x + k = 0$ 有实数根，

(1) 求 k 的取值范围；

(2) 若 x_1 、 x_2 分别是一元二次方程 $kx^2 - (2k+1)x + k = 0$ 的两个实数根，是否存在实数 k ，使得

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$ ，若存在，请求出 k 的值，若不存在，请说明理由。

【答案】(1) $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$ ；

(2) 不存在, 理由见解析.

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系以及根与系数的关系, 掌握根的情况与判别式 Δ 的关系和根与系数的关系是解题的关键.

(1) 根据一元二次方程根的判别式, 建立关于 k 的不等式, 求得 k 的取值范围;

(2) 利用根与系数的关系, 根据 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 1$ 将 k 代入, 即可求出 k 的值, 再看是否满足 (1) 中 k 的取值范围, 从而确定 k 的值是否存在.

【小问 1 详解】

解: 由题意得, $k \neq 0$ 且 $\Delta \geq 0$,

$$\therefore \Delta = [-(2k+1)]^2 - 4 \cdot k \cdot k = 4k+1 \geq 0 \text{ 解得 } k \geq -\frac{1}{4},$$

$$\therefore k \text{ 的取值范围为 } k \geq -\frac{1}{4} \text{ 且 } k \neq 0;$$

【小问 2 详解】

不存在.

$$\because \text{由根与系数的关系得, } x_1 + x_2 = -\frac{-(2k+1)}{k} = \frac{2k+1}{k}, \quad x_1 x_2 = \frac{k}{k} = 1,$$

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{2k+1}{k}}{1} = \frac{2k+1}{k} = 1 \text{ 解得 } k = -1,$$

$$\text{由 (1) 得, } k \geq -\frac{1}{4},$$

$\therefore$ 满足条件的 k 值不存在.

28. 设等腰三角形的三条边长分别为 a 、 b 、 c . 已知 $a=2$, b 、 c 是关于 x 的方程 $x^2 + kx + 16 = 0$ 的两个根, 求 k 的值以及另两边的长.

【答案】 $k = -8$, 另外两边为 4, 4

【解析】

【分析】 本题主要考查了等腰三角形的性质, 解一元二次方程, 三角形的三边关系, 当以 $a=2$ 为腰时, 将 $x=b=2$ 代入方程 $x^2 + kx + 16 = 0$ 求出 k 值, 再求出一元二次方程的解, 然后根据三角形三边关系判断即可; 当以 $a=2$ 为底时, 根据一元二次方程有两个相等的实数根求出 k 值, 再求出一元二次方程的解, 然后

根据三角形三边关系判断即可.

【详解】解: 当以 $a=2$ 为腰时, 将 $x=b=2$ 代入方程 $x^2+kx+16=0$, 得

$$2^2+2k+16=0,$$

解得 $k=-10$,

$\therefore$ 一元二次方程 $x^2-10x+16=0$,

解得 $x_1=2, x_2=8$,

所以这个三角形的三边长为 2, 2, 8,

$$\because 2+2=4<8,$$

$\therefore$ 2, 2, 8 不能构成三角形, 不符合题意, 舍去;

当以 $a=2$ 为底时, $x=b=c$, 则方程 $x^2+kx+16=0$ 有两个相等的实数根,

$$\text{即 } k^2-4\times 16=0,$$

解得 $k=\pm 8$.

当 $k=8$ 时, 一元二次方程 $x^2+8x+16=0$ 的两个根是 $x_1=x_2=-4$, 舍去;

当 $k=-8$ 时, 一元二次方程 $x^2-8x+16=0$ 的两个根是 $x_1=x_2=4$,

即 $b=c=4$,

此时三边长为 4, 4, 2,

$\because 4+2=6>4$, 满足三角形三边关系, 符合题意,

$\therefore$ 当 $k=-8$ 时, 另外两边长为 4, 4.

29. 某商店从厂家以每件 21 元的价格购进一批商品, 该店可以自行定价, 若每件商品售价为 a 元, 则可以卖出 $(350-10a)$ 件; 但物价局限定每件商品加价不能超过进价的 20%, 如果商店计划要赚 400 元, 那么每件商品售价是多少元?

【答案】25 元

【解析】

【分析】本题的等量关系是商品的单件利润 = 售价 - 进价. 然后根据商品的单价利润 $\times$ 销售的件数 = 总利润, 设商品的售价为 a , 列出方程求出未知数的值后, 根据“物价局限定每次商品加价不能超过进价的 20%”将不合题意的舍去, 进而求出卖的商品的件数.

【详解】解: 设每件商品售价是 x 元,

由题意, 得 $(x-21)(350-10x)=400$;

化简, 得 $x^2 - 56x + 775 = 0$;

解得 $x_1 = 25$, $x_2 = 31$;

又 $21 \times (1 + 0.2) = 25.2$,

$\therefore x = 31$ 不合题意, 舍去.

答: 每件商品售价是 25 元.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的应用. 可根据题意列出方程, 判断所求的解是否符合题意, 舍去不合题意的解. 找到关键描述语, 找到等量关系准确地列出方程是解决问题的关键.

30. 定义: 已知 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个实数根, 若 $x_1 < x_2 < 0$, 且

$3 < \frac{x_1}{x_2} < 4$, 则称这个方程为“限根方程”. 如: 一元二次方程 $x^2 + 13x + 30 = 0$ 的两根为 $x_1 = -10$, $x_2 = -3$,

因 $-10 < -3 < 0$, $3 < \frac{-10}{-3} < 4$, 所以一元二次方程 $x^2 + 13x + 30 = 0$ 为“限根方程”.

请阅读以上材料, 回答下列问题:

(1) 判断一元二次方程 $x^2 + 9x + 14 = 0$ 是否为“限根方程”, 并说明理由;

(2) 若关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + (k+7)x + k^2 + 3 = 0$ 是“限根方程”, 且两根 x_1, x_2 满足 $x_1 + x_2 + x_1x_2 = -1$, 求 k 的值;

(3) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (1-m)x - m = 0$ 是“限根方程”, 求 m 的取值范围.

【答案】 (1) 此方程为“限根方程”, 理由见解析

(2) k 的值为 2 (3) m 的取值范围为 $-\frac{1}{3} < m < -\frac{1}{4}$ 或 $-4 < m < -3$

【解析】

【分析】 (1) 解该一元二次方程, 得出 $x_1 = -7$, $x_2 = -2$, 再根据“限根方程”的定义判断即可;

(2) 由一元二次方程根与系数的关系可得出 $x_1 + x_2 = -\frac{k+7}{2}$, $x_1x_2 = \frac{k^2+3}{2}$, 代入 $x_1 + x_2 + x_1x_2 = -1$,

即可求出 $k_1 = 2$, $k_2 = -1$. 再结合“限根方程”的定义分类讨论舍去不合题意的值即可;

(3) 解该一元二次方程, 得出 $x_1 = -1$, $x_2 = m$ 或 $x_1 = m$, $x_2 = -1$. 再根据此方程为“限根方程”, 即得出此方程有两个不相等的实数根, 结合一元二次方程根的判别式即可得出 $\Delta > 0$, $m < 0$ 且 $m \neq -1$, 可求出 m 的取值范围. 最后分类讨论即可求解.

【小问 1 详解】

解: $x^2 + 9x + 14 = 0$,

$$(x+2)(x+7) = 0,$$

$$\therefore x+2=0 \text{ 或 } x+7=0,$$

$$\therefore x_1 = -7, \quad x_2 = -2.$$

$$\because -7 < -2, \quad 3 < \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2} < 4,$$

$\therefore$ 此方程为“限根方程”;

【小问2详解】

$$\because \text{方程 } 2x^2 + (k+7)x + k^2 + 3 = 0 \text{ 的两个根分比为 } x_1, x_2,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{k+7}{2}, \quad x_1 x_2 = \frac{k^2 + 3}{2}.$$

$$\because x_1 + x_2 + x_1 x_2 = -1,$$

$$\therefore -\frac{k+7}{2} + \frac{k^2 + 3}{2} = -1,$$

解得: $k_1 = 2, \quad k_2 = -1.$

分类讨论: ①当 $k = 2$ 时, 原方程为 $2x^2 + 9x + 7 = 0$,

$$\therefore x_1 = -\frac{7}{2}, \quad x_2 = -1,$$

$$\therefore x_1 < x_2 < 0, \quad 3 < \frac{x_1}{x_2} = \frac{7}{2} < 4,$$

$\therefore$ 此时方程 $2x^2 + (k+7)x + k^2 + 3 = 0$ 是“限根方程”,

$\therefore k = 2$ 符合题意;

②当 $k = -1$ 时, 原方程为 $2x^2 + 6x + 4 = 0$,

$$\therefore x_1 = -2, \quad x_2 = -1,$$

$$\therefore x_1 < x_2 < 0, \quad \frac{x_1}{x_2} = 2 < 3,$$

$\therefore$ 此时方程 $2x^2 + (k+7)x + k^2 + 3 = 0$ 不是“限根方程”,

$\therefore k = -1$ 不符合题意.

综上可知 k 的值为 2;

【小问 3 详解】

$$x^2 + (1-m)x - m = 0,$$

$$(x+1)(x-m) = 0,$$

$$\therefore x+1=0 \text{ 或 } x-m=0,$$

$$\therefore x_1 = -1, x_2 = m \text{ 或 } x_1 = m, x_2 = -1.$$

$\therefore$ 此方程为“限根方程”，

$\therefore$ 此方程有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta > 0, m < 0 \text{ 且 } m \neq -1,$$

$$\therefore (1-m)^2 + 4m > 0, \text{ 即 } (1+m)^2 > 0,$$

$$\therefore m < 0 \text{ 且 } m \neq -1.$$

分类讨论：①当 $-1 < m < 0$ 时，

$$\therefore x_1 = -1, x_2 = m,$$

$$\therefore 3 < \frac{x_1}{x_2} < 4,$$

$$\therefore 3 < \frac{-1}{m} < 4,$$

$$\text{解得: } -\frac{1}{3} < m < -\frac{1}{4};$$

②当 $m < -1$ 时，

$$\therefore x_1 = m, x_2 = -1,$$

$$\therefore 3 < \frac{x_1}{x_2} < 4,$$

$$\therefore 3 < \frac{m}{-1} < 4,$$

$$\text{解得: } -4 < m < -3.$$

综上所述， m 的取值范围为 $-\frac{1}{3} < m < -\frac{1}{4}$ 或 $-4 < m < -3$.

【点睛】本题考查解一元二次方程，一元二次方程根与系数的关系，一元二次方程根的判别式. 读懂题意，理解“限根方程”的定义是解题关键.

卷二 (20 分)

31. 已知 a 、 b 都是质数，且 $a^2 - 13a + m = 0$ ， $b^2 - 13b + m = 0$ ，试求 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} =$ _____.

【答案】 2 或 $\frac{125}{22}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了质数，一元二次方程根与系数的关系，熟练掌握以上知识是解题的关键. 根据题意可分 $a = b$ 和 $a \neq b$ 两种情况讨论，再根据根与系数关系，以及质数即可求得 a 、 b 的值.

【详解】 解：当 $a = b$ 时，可得： $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 1 + 1 = 2$ ；

当 $a \neq b$ 时，根据题意可得 a 、 b 为方程 $x^2 - 13x + m = 0$ 的两个根，

$$\therefore a + b = 13,$$

$\therefore a$ 、 b 都是质数，

则 $a = 2$ ， $b = 11$ 或 $b = 2$ ， $a = 11$ ，

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{b^2 + a^2}{ab} = \frac{2}{11} + \frac{11}{2} = \frac{125}{22},$$

故答案为：2 或 $\frac{125}{22}$.

32. 若关于 x 的方程 $2x^2 + (2m - 3)x - m = 0$ 的一根大于 2，一根小于 2，则 m 的范围是_____.

【答案】 $m < -\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根的分布，将一元二次方程转化为二次函数是解决此类问题的关键. 先设函数 $f(x) = 2x^2 + (2m - 3)x - m$ ，将一元二次方程转化为二次函数，再根据二次函数图象的性质得到 $f(2) < 0$ 且 $\Delta > 0$ ，解出不等式组即可求出 m 的范围.

【详解】 解：设函数 $f(x) = 2x^2 + (2m - 3)x - m$ ，则其图像为开口向上的抛物线，

若方程 $f(x) = 0$ 的一根大于 2，一根小于 2，则抛物线在 $x = 2$ 处的函数值必小于 0，

$$\therefore f(2) < 0,$$

又 $\because$ 方程 $f(x) = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta > 0$$

$$\therefore \begin{cases} f(2) = 8 + 4m - 6 - m < 0 \\ \Delta = 4m^2 - 4m + 9 > 0 \end{cases}, \text{解得 } m < -\frac{2}{3},$$

∴ m 的取值范围是 $m < -\frac{2}{3}$.

故答案为: $m < -\frac{2}{3}$.

33. 已知 $a+b+\frac{1}{2}c-2\sqrt{a-1}-4\sqrt{b-2}-3\sqrt{c-3}=-5$, 则 $(a+b)\cdot c =$ _____.

【答案】 96

【解析】

【分析】 本题考查配方法, 非负数的性质, 二次根式的计算, 掌握算理是解决问题的关键. 将原式进行配方得到几个非负数相加得零, 利用非负数的性质可知几个非负数都为零, 则可求得 a, b, c 的值, 然后代入求值即可.

【详解】 解: $a+b+\frac{1}{2}c-2\sqrt{a-1}-4\sqrt{b-2}-3\sqrt{c-3}=-5$,

$$[(a-1)-2\sqrt{a-1}+1]+[(b-2)-4\sqrt{b-2}+4]+\frac{1}{2}[(c-3)-6\sqrt{c-3}+9]=0,$$

$$(\sqrt{a-1}-1)^2+(\sqrt{b-2}-2)^2+\frac{1}{2}(\sqrt{c-3}-3)^2=0,$$

$$\sqrt{a-1}-1=0, \sqrt{b-2}-2=0, \sqrt{c-3}-3=0,$$

$$\sqrt{a-1}=1, \sqrt{b-2}=2, \sqrt{c-3}=3,$$

$$\therefore a=2, b=6, c=12,$$

$$(a+b)\cdot c=(2+6)\times 12=96.$$

故答案为: 96.

34. 已知关于 x 的方程 $x^2-2mx+3m=0$ 的两个根之差 $x_1-x_2=4$, 而关于 x 的方程

$x^2-2mx+6m-9=0$ 的两根都大于 x_2 且小于 x_1 , 则 $m =$ _____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程, 根与系数的关系, 熟练掌握一元二次方程的根与系数的关系, 是解题的关键. 先根据根与系数的关系得出 $x_1+x_2=2m$, $x_1x_2=3m$, 然后根据 $x_1-x_2=4$, 求出 $m=4$ 或 $m=-1$, 再进行验证即可.

【详解】 解: 设关于 x 的方程 $x^2-2mx+3m=0$ 的两个根为 x_1, x_2 , 则:

$$x_1 + x_2 = 2m, \quad x_1 x_2 = 3m,$$

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2,$$

$$\therefore 4^2 = (2m)^2 - 4 \times 3m,$$

$$\text{解得: } m = 4 \text{ 或 } m = -1,$$

$$\text{当 } m = 4 \text{ 时, 关于 } x \text{ 的方程 } x^2 - 2mx + 3m = 0 \text{ 为 } x^2 - 8x + 12 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = 6, \quad x_2 = 2,$$

$$\text{关于 } x \text{ 的方程 } x^2 - 2mx + 6m - 9 = 0 \text{ 为 } x^2 - 8x + 15 = 0,$$

$$\text{解得: } x_3 = 3, \quad x_4 = 5,$$

$$\therefore 2 < 3 < 5 < 6,$$

$\therefore$ 此时符合题意;

$$\text{当 } m = -1 \text{ 时, 关于 } x \text{ 的方程 } x^2 - 2mx + 3m = 0 \text{ 为 } x^2 + 2x - 3 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = 1, \quad x_2 = -3,$$

$$\text{关于 } x \text{ 的方程 } x^2 - 2mx + 6m - 9 = 0 \text{ 为 } x^2 + 2x - 15 = 0,$$

$$\text{解得: } x_3 = 3, \quad x_4 = -5,$$

$$\therefore -5 < -3 < 1 < 3,$$

$\therefore$ 此时不符合题意;

综上分析可知: $m = 4$.

故答案为: 4.