

上海市位育中学 2025-2026 学年上学期第一次月考八年级数学试卷

(满分: 150, 时间: 100 分钟)

一、单项选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 已知 $a < b$, 下列不等式中正确的是 ()

A. $a+1 > b+1$

B. $a-1 > b-1$

C. $2a > 2b$

D. $-2a > -2b$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查不等式的性质, 能熟记不等式的性质的内容是解此题的关键. 根据不等式的性质逐个判断即可.

【详解】解: A. 两边同时加 1, 不等式方向不变, 原式 $a < b$ 变为 $a+1 < b+1$, 故 A 错误, 不符合题意.
B. 两边同时减 1, 不等式方向不变, 原式 $a < b$ 变为 $a-1 < b-1$, 故 B 错误, 不符合题意.
C. 两边同时乘正数 2, 不等式方向不变, 原式 $a < b$ 变为 $2a < 2b$, 故 C 错误, 不符合题意.
D. 两边同时乘负数 -2, 不等式方向反转, 原式 $a < b$ 变为 $-2a > -2b$, 故 D 正确, 符合题意.
故选: D.

2. 数据 0.000 000 00258 用科学记数法表示为 ()

A. 258×10^{-9}

B. 0.258×10^{-9}

C. 2.58×10^{-9}

D. 0.258×10^{-8}

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查科学记数法表示一个绝对值较小的数, 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数, 据此得出结论即可.

【详解】解: $0.00000000258 = 2.58 \times 10^{-9}$,
故选: C.

3. 在 -3 , $-\frac{2}{5}$, 0 , 18% , $\frac{\pi}{4}$, 3.1415926 , 13 , $0.232232223\cdots$ (每两个 3 之间依次增加一个 2) 中, 有理数的个数有 ()

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

【答案】B

【解析】

【分析】 本题考查有理数的定义，根据有理数的定义（整数和分数，包括有限小数和无限循环小数），逐一判断各数是否为有理数.

【详解】 解： -3 ：整数，属于有理数；

$-\frac{2}{5}$ ：分数，属于有理数；

0 ：整数，属于有理数；

18% ：即 $\frac{18}{100} = \frac{9}{50}$ ，分数，属于有理数；

$\frac{\pi}{4}$ ：含无理数 π ，属于无理数；

3.1415926 ：有限小数，属于有理数；

13 ：整数，属于有理数；

$0.232232223\cdots$ （每两个 3 之间依次增加一个 2 ）：虽有一定规律，但无循环节，属于无理数.

综上，有理数有 6 个（ -3 、 $-\frac{2}{5}$ 、 0 、 18% 、 3.1415926 、 13 ），

故选：B.

4. -27 的立方根是（ ）

A. 3

B. -3

C. ± 3

D. $\pm\sqrt{3}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了立方根，熟练掌握该知识点是解题的关键. 根据立方根的定义求解即可.

【详解】 解： $-27 = (-3)^3$

那么 -27 的立方根是： $\sqrt[3]{-27} = -3$ ，

故选：B.

5. 下列说法正确的是（ ）

A. $\sqrt{9} = \pm 3$

B. 2 的算术平方根是 4

C. 1 的平方根是 ± 1

D. 0 没有平方根

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查的是算术平方根和平方根，依据平方根和算术平方根的性质求解即可，熟练掌握以上知识点是解题的关键.

【详解】解：A. $\sqrt{9} = 3$ ，原说法错误；

B. 2 的算术平方根是 $\sqrt{2}$ ，原说法错误；

C. 1 的平方根是 ± 1 ，说法正确；

D. 0 的平方根是 0，原说法错误；

故选：C.

6. 已知两个全等的直角三角形，直角边长分别为 3 和 4，斜边长为 5. 如果将这两个全等的直角三角形拼成一个等腰三角形，那么这个等腰三角形的周长为 ()

A. 16

B. 18

C. 16 或 18

D. 14 或 16

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质，将两个全等的直角三角形拼成等腰三角形时，有两种可能的拼接方式：沿直角边 3 或 4 拼接，形成底边为 6 或 8 的等腰三角形，两腰均为斜边 5；或者沿斜边 5 拼接，但此时无法形成三角形. 根据分析求出周长即可.

【详解】解：①沿直角边 3 拼接：将两个直角边 3 重合，形成底边为 $4+4=8$ ，两腰为斜边 5 的等腰三角形. 周长 $=5+5+8=18$.

②沿直角边 4 拼接：将两个直角边 4 重合，形成底边为 $3+3=6$ ，两腰为斜边 5 的等腰三角形. 周长 $=5+5+6=16$.

③沿斜边 5 拼接，但此时无法形成三角形.

综上，等腰三角形的周长为 16 或 18，

故选：C.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 不等式 $6-2x>1$ 的非负整数解是_____；

【答案】0, 1, 2

【解析】

【分析】本题考查解一元一次不等式，解出不等式的解集即可求解.

【详解】解： $6-2x>1$

$$-2x > -5$$

$$x < \frac{5}{2},$$

$\therefore$ 不等式 $6-2x>1$ 的非负整数解是：0, 1, 2.

故答案为：0，1，2.

8. 一件商品的成本是 30 元，如果按原价的八八折销售，至少可获得 10% 的利润. 设这件商品的原价为 x 元，那么可以列出不等式_____.

【答案】 $0.88x - 30 \geq 30 \times 10\%$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元一次不等式的实际应用，根据利润等于原价乘以折扣再减去进价列出不等式即可.

【详解】 解：由题意得， $0.88x - 30 \geq 30 \times 10\%$ ，

故答案为： $0.88x - 30 \geq 30 \times 10\%$.

9. 已知 $\sqrt{2x-1}=1$ ，则 $x=$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查了算术平方根的意义，熟练掌握算术平方根的意义是解题的关键. 根据算术平方根的意义，可得 $2x-1=1$ ，即可解得 x 的值.

【详解】 解： $\because \sqrt{2x-1}=1$ ，

$\therefore 2x-1=1$ ，

$\therefore x=1$.

故答案为： 1.

10. $\sqrt{16}$ 的平方根是_____.

【答案】 ± 2

【解析】

【详解】 解： $\because \sqrt{16}=4$

$\therefore \sqrt{16}$ 的平方根是 ± 2 .

故答案为 ± 2 .

11. 已知 $\sqrt[3]{0.5} \approx 0.7937$ ， $\sqrt[3]{5} \approx 1.7100$ ，则 $\sqrt[3]{500} \approx$ _____.

【答案】 7.937

【解析】

【分析】 根据立方根的运算法则即可求解.

【详解】 $\because \sqrt[3]{0.5} \approx 0.7937$

$$\therefore \sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{0.5 \times 1000} = \sqrt[3]{0.5} \times \sqrt[3]{1000} \approx 0.7937 \times 10 = 7.937$$

故答案为：7.937.

【点睛】此题主要考查立方根的应用，解题的关键是熟知立方根的性质变形.

12. 在数轴上表示 $-\sqrt{3}$ 的点与表示数 3 的点之间的距离是_____.

【答案】 $\sqrt{3}+3$

【解析】

【分析】本题主要考查了数轴上两点距离计算，之间用较大的数减去较小的数即可得到答案.

【详解】解：在数轴上表示 $-\sqrt{3}$ 的点与表示 3 的点之间的距离是 $3 - (-\sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3}$ ，

故答案为： $\sqrt{3}+3$.

13. 比较大小： $-\frac{\sqrt{15}}{2}$ _____ -2 (填 “ $<$ ” “ $>$ ” 或 “ $=$ ”).

【答案】 $>$

【解析】

【分析】本题考查了实数大小的比较，关键要熟记实数大小的比较方法：正实数都大于 0，负实数都小于 0，正实数大于一切负实数，两个负实数绝对值大的反而小.

根据 $-\sqrt{16} < -\sqrt{15}$ ，即 $-4 < -\sqrt{15}$ ，即可求解.

【详解】解： $\because -\sqrt{16} < -\sqrt{15}$ ，

$$\therefore -4 < -\sqrt{15}，$$

$$\therefore -2 < -\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

故答案为： $>$.

14. 若一个正数的两个平方根分别是 $a-1$ 和 $a-3$ ，则 a 的值为_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】本题考查了根据平方根求参数.

根据平方根求出 a 的值即可.

【详解】解：∵一个正数的两个平方根分别是 $a-1$ 和 $a-3$ ，

$$\therefore a-1+a-3=0,$$

解得： $a=2$ ，

故答案为： 2 .

15. 把循环小数 $0.\dot{2}\dot{3}$ 写成分数形式为： _____.

【答案】 $\frac{23}{99}$

【解析】

【分析】 本题考查循环小数化为分数的方法. 先设循环小数为未知数，通过等式性质消去循环部分，再求解方程得到分数形式.

【详解】解：设循环小数为 m ，设 $m=0.\dot{2}\dot{3}$ ，

两边同时乘以 100，得 $100m=23.\dot{2}\dot{3}$ ，

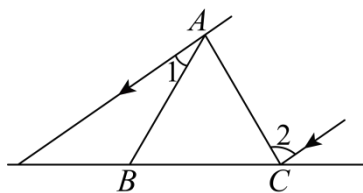
$$\therefore 100m-m=23.\dot{2}\dot{3}-0.\dot{2}\dot{3}=23,$$

$$99m=23,$$

解得： $m=\frac{23}{99}$.

故答案为： $\frac{23}{99}$.

16. 如图，一束平行光线照射在等边 ABC 上，如果 $\angle 1=25^\circ$ ，那么 $\angle 2=$ _____ $^\circ$.

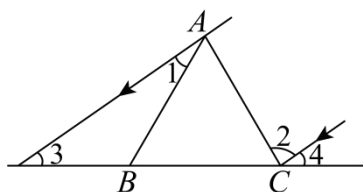


【答案】 85

【解析】

【分析】 本题考查的是平行线的性质，等边三角形的性质，三角形的外角的性质，先求解 $\angle 3$ ，再结合等边三角形与三角形的外角的性质可得答案.

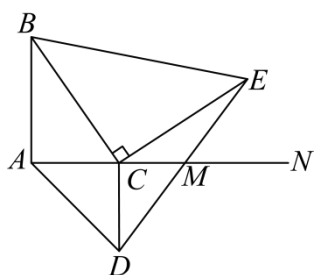
【详解】解：如图，



$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形,
 $\therefore \angle ACB = \angle ABC = 60^\circ = \angle 1 + \angle 3$,
 $\therefore \angle 3 = 60^\circ - 25^\circ = 35^\circ$;
 $\therefore$ 平行光线,
 $\therefore \angle 4 = \angle 3 = 35^\circ$,
 $\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle ACB - \angle 4 = 85^\circ$,

故答案为: 85.

17. 如图所示, 线段 $AB = 10\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$, 射线 $AN \perp AB$ 于点 A , 点 C 是射线上一动点, 分别以 AC 、 BC 为直角边作等腰直角三角形, 得 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BCE$, 连接 DE 交射线 AN 于点 M , 则 CM 的长为_____.



【答案】5

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定和性质, 等腰直角三角形的性质, 解题的关键是添加辅助线构造全等三角形. 过点 E 作 $EH \perp AN$ 于点 H , 先证明 $\triangle BAC \cong \triangle CHE$, 得到 $AC = HE$, 结合题意可推得 $CD = HE$, 再证明 $\triangle CMD \cong \triangle HME$, 可得 $CM = HM$, 即得答案.

【详解】 解: 过点 E 作 $EH \perp AN$ 于点 H ,

$$\therefore \angle ECH + \angle CEH = 90^\circ,$$

$\because \triangle BCE$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore BC = CE, \angle BCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECH + \angle BCA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCA = \angle CEH,$$

$\because AN \perp AB$,

$$\therefore \angle BAC = \angle CHE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BAC \cong \triangle CHE (\text{AAS}),$$

$$\therefore AC = HE,$$

$\because \triangle ACD$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AC = CD,$$

$$\therefore CD = HE,$$

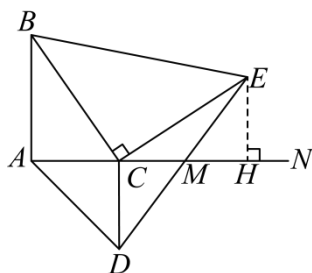
$$\because \angle DCM = \angle EHM = 90^\circ, \quad \angle CMD = \angle HME,$$

$$\therefore \triangle CMD \cong \triangle HME (\text{AAS}),$$

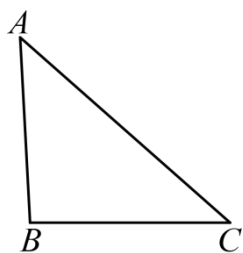
$$\therefore CM = HM,$$

$$\therefore CM = \frac{1}{2}CH = 5\text{cm}.$$

故答案为: 5.



18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 42^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 旋转得 $\triangle DBE$, 点 A 、 C 的对应点分别是点 D 、 E , 线段 BE 交边 AC 于点 F , 连接 CE 、 AD , 如果 $\triangle CEF$ 是等腰三角形, 那么 $\angle ADE$ 的度数是_____.



【答案】 29° 或 43°

【解析】

【分析】 本题考查了图形旋转, 等腰三角形, 三角形的内角和定理, 解题的关键是熟练掌握旋转的性质. 由图形旋转可得两个等腰三角形底角对应相等, 分类讨论, 根据三角形的内角和定理, 分别可得每种情况下 $\angle BEC$ ($\angle BDA$) 的度数, 从而可得 $\angle ADE$ 的度数.

【详解】 解: $\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 旋转得 $\triangle DBE$, $\angle BAC = 45^\circ$,

$$\therefore \angle BDE = 45^\circ, \quad AB = AD, \quad CB = EB, \quad \angle ABD = \angle DBE - \angle ABE = \angle ABC - \angle ABE = \angle EBC$$

$$\therefore \angle BDA = \angle BAD = \frac{180^\circ - \angle ABD}{2} = \frac{180^\circ - \angle CBE}{2} = \angle BEC = \angle BCE,$$

$\because \triangle CEF$ 是等腰三角形,

$$\therefore CE = CF \text{ 或 } CE = EF,$$

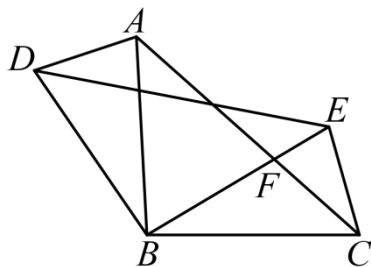
当 $CE = CF$ 时, 设 $\angle ECF = \alpha$,

$$\begin{aligned}
&\because \angle ACB = 42^\circ, \\
&\therefore \angle CFE = \angle BEC = \angle BCE = 42^\circ + \alpha, \\
&\therefore \angle CFE + \angle BEC + \angle ECF = 42^\circ + \alpha + 42^\circ + \alpha + \alpha = 180^\circ, \\
&\therefore \alpha = 32^\circ, \\
&\therefore \angle BDA = \angle BEC = 42^\circ + \alpha = 74^\circ, \\
&\therefore \angle ADE = \angle BDA - \angle BDE = 74^\circ - 45^\circ = 29^\circ,
\end{aligned}$$

当 $EC = EF$ 时, 设 $\angle ECF = \beta$, 则 $\angle EFC = \angle ECF = \beta$,

$$\begin{aligned}
&\because \angle ACB = 42^\circ, \\
&\therefore \angle BEC = \angle BCE = 42^\circ + \beta \\
&\therefore \angle BEC + \angle CFE + \angle ECF = 42^\circ + \beta + \beta + \beta = 180^\circ, \\
&\therefore \beta = 46^\circ, \\
&\therefore \angle BDA = \angle BEC = 42^\circ + \beta = 42^\circ + 46^\circ = 88^\circ, \\
&\therefore \angle ADE = \angle BDA - \angle BDE = 88^\circ - 45^\circ = 43^\circ
\end{aligned}$$

故答案为: 29° 或 43° .



三、简答题 (每题 7 分, 满分 42 分)

19. 计算: $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} \times \sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{(-2)^2}$.

【答案】 $-2\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了立方根, 平方根, 化简二次根式, 熟练掌握以上知识点是解题的关键. 先化简立方根, 平方根, 二次根式, 然后计算乘法, 最后计算减法即可.

【详解】 解: 原式 $= -\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} - \sqrt{4}$
 $= -\frac{1}{3} - 2$

$$= -2\frac{1}{3}$$

20. 计算: $\sqrt[3]{8} + |-\sqrt{2}| + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$.

【答案】 4

【解析】

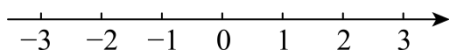
【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，立方根，化简绝对值，二次根式的乘法等，熟练掌握其运算规则是解题的关键. 先算立方根，化简绝对值，然后计算二次根式的乘法，最后从左到右进行计算即可.

【详解】 解: 原式 $= 2 + \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{2}$

$$= 2 + 2$$

$$= 4$$

21. 解不等式组: $\begin{cases} 4x-3 \leq 2x+2 \\ \frac{x+1}{3} - \frac{3x+1}{2} < 1 \end{cases}$, 并把解集在数轴上表示



【答案】 $-1 < x \leq \frac{5}{2}$, 数轴见解析

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次不等式组、将不等式组的解集表示在数轴上，熟练掌握一元一次不等式组的解法是解题关键. 先分别求出两个不等式的解集，再找出它们的公共部分即为不等式组的解集，然后将不等式组的解集表示在数轴上即可得.

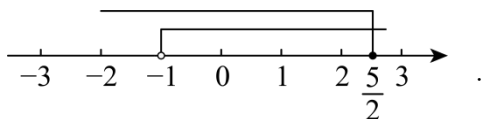
【详解】 解: $\begin{cases} 4x-3 \leq 2x+2 \text{ ①} \\ \frac{x+1}{3} - \frac{3x+1}{2} < 1 \text{ ②} \end{cases}$,

解不等式①得: $x \leq \frac{5}{2}$,

解不等式②得: $x > -1$,

所以不等式组的解集为 $-1 < x \leq \frac{5}{2}$,

把解集在数轴上表示如下:



22. 求下列方程中 x 的值: $(x+1)^2 + 8 = 72$.

【答案】 7 或 -9

【解析】

【分析】 本题主要考查了平方根的定义, 熟练掌握平方根的定义是解题的关键. 先通过移项将常数项移到等号右边, 得到 $(x+1)^2$ 的表达式, 再利用平方根的定义求出 $x+1$ 的值, 进而求出 x .

【详解】 解: $(x+1)^2 + 8 = 72$

$$(x+1)^2 = 64$$

$$x+1 = \pm\sqrt{64}$$

$$x+1 = \pm 8$$

当 $x+1=8$ 时, $x=8-1=7$;

当 $x+1=-8$ 时, $x=-8-1=-9$,

所以 x 的值为 7 或 -9.

23. 教材中用两个面积为 1 的小正方形分别沿对角线剪开, 拼成一个面积为 2 的大正方形, 如图②, 可以求出大正方形的边长为 $\sqrt{2}$. 现有 5 个边长为 1 的小正方形, 排列形式如图③, 类比图①的方法, 请在图③中用实线把它们分割, 然后在图④中拼接成一个新的正方形.

要求: 在图③中画出分割线, 并在正方形网格图④中直接用实线画出拼接成的新的大正方形, 且大正方形的边长为 $\sqrt{5}$.

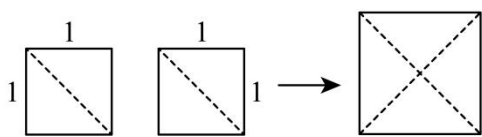


图 ②

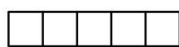


图 ③



图 ④

【答案】 作图见详解

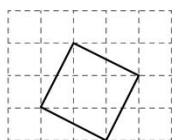
【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质, 勾股定理, 解题的关键是学会利用数形结合思想解决问题. 利用勾股定理在网格中分别找到 1×2 的长方形, 依次连接顶点即可.

【详解】 解: 如图: 排列形式如图③, 画出分割线并在正方形网格图④中用实线画出拼接成的新正方形.



图③



图④

24. 如图，这是某电影院的价目表. 某社团 16 人去此电影院看电影，打算以比赛奖金 1600 元购买电影票、爆米花与饮料. 如果要让每人拿到一张电影票和一杯饮料，那么最多可买多少盒爆米花？

价目表		
电影票	爆米花	饮料
80元/张	25元/盒	20元/杯
*每张电影票能使用下列其中一种优惠.		
优惠一：饮料一杯16元；		
优惠二：爆米花一盒+饮料一杯30元.		

【答案】 最多可买 4 盒爆米花

【解析】

【分析】 本题主要考查一元一次不等式的应用，设可以买 x 盒爆米花，利用总价=单价×数量，结合总价不超过 1600 元，可列出关于 x 的一元一次不等式，解之可得出 x 的取值范围，再取其中的最大整数值，即可得出结论.

【详解】 解：设可以买 x 盒爆米花，根据题意得：

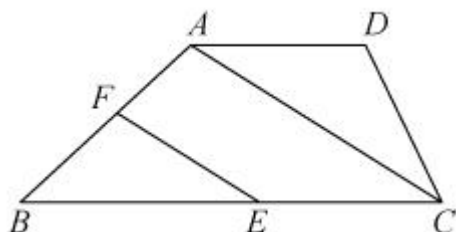
$$80 \times 16 + 16 \times (16 - x) + 30x \leq 1600,$$

解得， $x \leq 4$ ，

所以，最多可买 4 盒爆米花.

四、解答题（本大题共 3 题，第 25 题 10 分，第 26 题 12 分，第 27 题 14 分，满分 36 分）

25. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle D = 116^\circ$ ， AC 平分 $\angle BCD$ ， E 是 BC 上一点， $EF \parallel AC$ 交 AB 于点 F .



(1) 求 $\angle DAC$ 的大小；

(2) 若 $\angle BFE = 3\angle B$ ，求 $\angle BAC$ 的大小.

【答案】 (1) 32°

(2) 111°

【解析】

【分析】(1) 利用平行线求出 $\angle DCB$ 的度数，再利用角平分线求出 $\angle ACB$ 的度数，然后再次利用平行线的性质即可解题；

(2) 根据平行线得到 $\angle BAC = \angle BFE = 3\angle B$ ，利用三角形的内角和解题即可。

【小问 1 详解】

解： $\because AD \parallel BC$ ， $\angle D = 116^\circ$ ，

$$\therefore \angle DCB = 180^\circ - \angle D = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ,$$

$\because AC$ 平分 $\angle BCD$ ，

$$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \angle DCB = \frac{1}{2} \times 64^\circ = 32^\circ,$$

又 $\because AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle DAC = \angle ACB = 32^\circ;$$

【小问 2 详解】

解： $\because EF \parallel AC$ ，

$$\therefore \angle BAC = \angle BFE = 3\angle B,$$

在 $\triangle ABC$ 中，

$$\therefore \angle BAC + \angle B = 180^\circ - 32^\circ = 148^\circ,$$

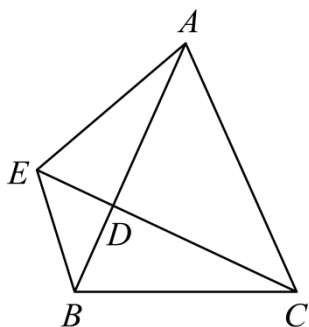
$$\therefore 3\angle B + \angle B = 148^\circ,$$

解得： $\angle B = 37^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAC = 3\angle B = 111^\circ.$$

【点睛】 本题考查平行线的性质、角平分线的定义、三角形的内角和定理，熟练掌握三角形的内角和定理是解题的关键。

26. 如图，已知等腰 $\triangle ABC$ ， $AB = AC$ ， D 是边 AB 上一点（不与点 A 、 B 重合）， E 是线段 CD 延长线上一点， $\angle BEC = \angle BAC$ 。



(1) 说明 $\angle EBA = \angle DCA$ 的理由;

(2) 小华在研究这个问题时, 提出了一个新的猜想: 点 D 在运动的过程中 (不与点 A 、 B 重合), $\angle AEC$ 与 $\angle ABC$ 是否会相等? 小丽思考片刻后, 提出了自己的想法: 可以在线段 CE 上取一点 H , 使得 $CH = BE$, 连接 AH , 然后通过学过的知识就能得到 $\angle AEC$ 与 $\angle ABC$ 相等. 你能否根据小丽同学的想法, 说明 $\angle AEC = \angle ABC$ 的理由.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据 $\angle BEC = \angle BAC$, 结合 $\angle EDB = \angle ADC$, 利用三角形内角和定理证明 $\angle EBA = \angle DCA$ 即可;

(2) 根据 (1) 得 $\angle EBA = \angle DCA$, 结合 $AB = AC$, $CH = BE$, 证明 $\triangle AEB \cong \triangle AHC$ (SAS), 得到 $\angle BAE = \angle CAH$, $AE = AH$, 继而得到 $\angle BAE + \angle DAH = \angle CAH + \angle DAH$ 即 $\angle EAH = \angle BAC$. 继而得到 $180^\circ - \angle EAH = 180^\circ - \angle BAC$, 故 $2\angle AEC = 2\angle ABC$, 得证 $\angle AEC = \angle ABC$.

【小问 1 详解】

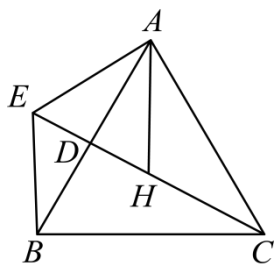
$$\because \angle BEC = \angle BAC, \angle EDB = \angle ADC,$$

$$\therefore 180^\circ - \angle BEC - \angle BDE = 180^\circ - \angle BAC - \angle ADC,$$

$$\therefore \angle EBA = \angle DCA;$$

【小问 2 详解】

解: 根据题意, 作图如下,



根据 (1) 得 $\angle EBA = \angle DCA$,

$$\because AB = AC, CH = BE,$$

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle AHC \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CAH, AE = AH,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle AHE,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle DAH = \angle CAH + \angle DAH \text{ 即 } \angle EAH = \angle BAC.$$

$$\therefore 180^\circ - \angle EAH = 180^\circ - \angle BAC,$$

$$\therefore 2\angle AEC = 2\angle ABC,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle ABC.$$

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质，三角形全等的判定和性质，三角形内角和定理，对等角相等，熟练掌握等腰三角形的性质，三角形全等的判定和性质是解题的关键.

27. 定义：在等腰三角形中，过某底角顶点的一条射线分这个底角所成的两个角中恰好有一个角等于这个等腰三角形的顶角，那么称这条射线为这个等腰三角形的“等角分割线”.

已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 在边 AC 上.

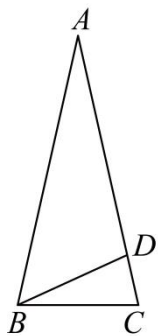


图1

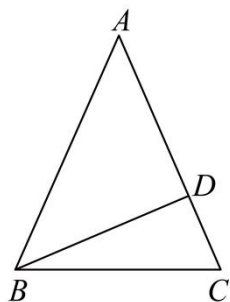


图2

- (1) 如图 1，如果 $BD = BC$ ，求证： BD 是 $\triangle ABC$ 的“等角分割线”；
- (2) 如图 2，如果 $BD \perp AC$ ，且 BD 是 $\triangle ABC$ 的“等角分割线”，求 $\angle C$ 的度数；
- (3) BD 是 $\triangle ABC$ 的“等角分割线”， $\angle BAC$ 的平分线交 BD 于点 F ，如果 $DF = DC$ ，那么 $\angle BAC$ 的度数为_____.

【答案】(1) 详见解析

(2) 67.5°

(3) 45° 或 $\frac{180^\circ}{7}$

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质，线段垂直平分线的性质，全等三角形的判定与性质，三角形的外角性质，三角形内角和定理等知识点.

(1) 由等边对等角得到 $\angle ABC = \angle C$ ， $\angle BDC = \angle C$ ，则 $\angle ABC = \angle BDC$ ，再由三角形的外角性质即可求证；

(2) 先由等腰三角形性质以及三角形内角和定理得到 $\angle A = 180^\circ - 2\angle C$ ，再由外角性质得到 $\angle ABD = 2\angle C - 90^\circ$ ， $\angle DBC = 90^\circ - \angle C$ ，然后再分类讨论即可；

(3) 分两种情况讨论，当 $\angle DBC = \angle BAC$ 时，由三线合一得到 $AE \perp BC$ ， $BE = CE$ ，设 $\angle BAE = \angle CAE = x$ ，则 $\angle DBC = \angle BAC = 2x$ ，可得 AE 垂直平分 BC ，则 $\angle DBC = \angle FCB = 2x$ ，然

后根据外角性质表示出 $\angle DFC = \angle DCF = 4x$ 再由三角形内角和定理得到

$\angle CAE + \angle ACE + \angle AEC = 180^\circ$ ；当 $\angle ABD = \angle BAC$ 时，设 $\angle BAE = \angle CAE = x$ ，则

$\angle ABD = \angle BAC = 2x$ ，则 $\angle FDC = \angle BAC + \angle ABD = 4x$ ，由 $\triangle ABF \cong \triangle ACF$ (SAS)，以及等腰三角形性质得到 $\angle DFC = \angle DCF = 2x$ ，在 $\triangle DFC$ 中由三角形内角和定理建立方程求解。

【小问 1 详解】

证明： $\because AB = AC$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle C$ ，

$\because BD = BC$ ，

$\therefore \angle BDC = \angle C$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle BDC$ ，

$\because \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC, \angle BDC = \angle A + \angle ABD$ ，

$\therefore \angle ABD + \angle DBC = \angle A + \angle ABD$ ，

$\therefore \angle A = \angle DBC$ ，

$\therefore BD$ 是 ABC 的“等角分割线”；

【小问 2 详解】

解： $\because AB = AC$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle C$ ，

$\because \angle A + \angle ABC + \angle C = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle A = 180^\circ - 2\angle C$ ，

$\because BD \perp AC$ ，

$\therefore \angle BDC = 90^\circ, \angle BDA = 90^\circ$ ，

$\because \angle BDC = \angle A + \angle ABD, \angle BDA = \angle DBC + \angle C$ ，

$\therefore \angle ABD = 2\angle C - 90^\circ, \angle DBC = 90^\circ - \angle C$ ，

$\because BD$ 是 ABC 的“等角分割线”，

$\therefore$ ① $\angle A = \angle ABD, 180^\circ - 2\angle C = 2\angle C - 90^\circ$ ，

解得： $\angle C = 67.5^\circ$ ；

② $\angle A = \angle DBC, 180^\circ - 2\angle C = 90^\circ - \angle C$ ，

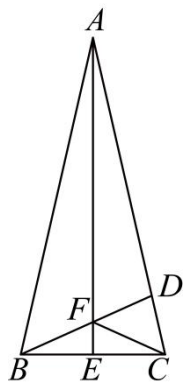
解得： $\angle C = 90^\circ$ (舍去)，

综上： $\angle C = 67.5^\circ$ ；

【小问 3 详解】

解：记 $\angle BAC$ 的平分线与 BC 交于点 E ，

①当 $\angle DBC = \angle BAC$ 时，



$\because AB = AC$ ， AE 平分 $\angle BAC$ ，

$\therefore AE \perp BC$ ， $\angle BAE = \angle CAE$ ， $BE = CE$ ，

设 $\angle BAE = \angle CAE = x$ ，则 $\angle DBC = \angle BAC = 2x$

$\because AE \perp BC$ ， $BE = CE$ ，

$\therefore AE$ 垂直平分 BC ，

$\therefore FB = FC$ ，

$\therefore \angle DBC = \angle FCB = 2x$ ，

$\therefore \angle DFC = \angle FBC + \angle FCB = 2x + 2x = 4x$ ，

$\because DF = DC$ ，

$\therefore \angle DFC = \angle DCF = 4x$ ，

$\therefore \angle ACE = \angle DCF + \angle FCB = 4x + 2x = 6x$ ，

$\because AE \perp BC$ ，

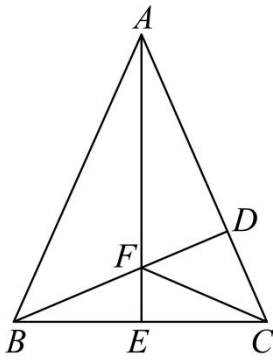
$\therefore \angle CAE + \angle ACE + \angle AEC = 180^\circ$ ，

$\therefore x + 6x + 90^\circ = 180^\circ$ ，

解得： $x = \frac{90^\circ}{7}$ ，

$\therefore \angle BAC = 2 \times \frac{90^\circ}{7} = \frac{180^\circ}{7}$ ；

②当 $\angle ABD = \angle BAC$ 时，



$\because AE$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle BAE = \angle CAE$,

设 $\angle BAE = \angle CAE = x$, 则 $\angle ABD = \angle BAC = 2x$,

$\therefore \angle FDC = \angle BAC + \angle ABD = 4x$,

$\because AB = AC$, $\angle BAE = \angle CAE$, $AF = AF$,

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ACF$ (SAS),

$\therefore \angle ACF = \angle ABD = 2x$,

$\because DF = DC$,

$\therefore \angle DFC = \angle DCF = 2x$,

$\because$ 在 $\triangle DFC$ 中, $\angle FDC + \angle DFC + \angle DCF = 180^\circ$,

$\therefore 4x + 2x + 2x = 180^\circ$,

解得: $x = 22.5^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 2 \times 22.5^\circ = 45^\circ$,

综上: $\angle BAC$ 的度数为 45° 或 $\frac{180^\circ}{7}$.