

存志学校 2025-2026 学年初二上学期第一次阶段检测

数学试卷

时间：100min 满分：150 分

一、选择题（本大题共 6 题，每题 2 分，满分 12 分）

1. 计算 $5.99 \times 10^7 - 4.98 \times 10^8$ ，结果用科学记数法表示为（ ）

- A. -1.01×10^{-8} B. 1.01×10^8 C. -4.381×10^8 D. -43.81×10^7

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查科学记数法，将两个数统一为相同指数后相减，再调整结果至科学记数法标准形式即可。

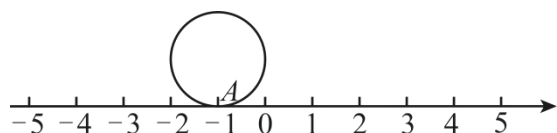
【详解】解： $5.99 \times 10^7 - 4.98 \times 10^8$ ，

$$\text{原式} = 0.599 \times 10^8 - 4.98 \times 10^8$$

$$= -4.381 \times 10^8,$$

故选：C.

2. 如图，把半径为 1 的圆放到数轴上，圆上一点 A 与表示 -1 的点重合，圆沿着数轴滚动一周，此时点 A 表示的数是（ ）



- A. $1 + 2\pi$ B. $-1 + \pi$
C. $-1 + 2\pi$ 或 $-1 - 2\pi$ D. $-1 + \pi$ 或 $-1 - \pi$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查数轴上的点，圆的周长，掌握相关知识是解题关键。分两种情况讨论：当圆沿着数轴往右或往左滚动一周，所经过的路径长为圆的周长，据此解答。

【详解】解：圆滚动一周所经过的路径长为： $2\pi r = 2\pi \times 1 = 2\pi$

当圆沿着数轴往右滚动一周，此时点 A 表示的数是： $-1 + 2\pi$ ；

当圆沿着数轴往左滚动一周，此时点 A 表示的数是： $-1 - 2\pi$ ，

综上所述，点 A 表示的数是 $-1 + 2\pi$ 或 $-1 - 2\pi$ ，

故选：C.

3. 设 $m = \frac{\sqrt{52}-1}{2}$, 则 m 的取值为 ()

- A. $1 < m < 2$ B. $2 < m < 3$ C. $3 < m < 4$ D. $4 < m < 5$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查无理数的估算, 先估算 $\sqrt{52}$ 的值, 确定其范围, 进而求解即可.

【详解】解: $\because 7 < \sqrt{52} < 8$,

$$\therefore 6 < \sqrt{52} - 1 < 7,$$

$$\therefore 3 < \frac{\sqrt{52}-1}{2} < 3.5,$$

$$\therefore 3 < m < 3.5,$$

故选: C.

4. 在下列代数式中: $\sqrt{\frac{\pi}{3}}$ 、 $\sqrt{27a}$ 、 $\sqrt{42}$ 、 $\frac{1}{\sqrt{0.7}}$ 、 $-\sqrt{(x^2-y^2)(x+y)}$ 、 $\sqrt[3]{5^2}$ 、 $\sqrt{x^2+y^2}$, 最简二次根式的个数是 ()

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查最简二次根式的定义, 正确掌握最简二次根式的定义是解题的关键.

根据最简二次根式的定义: “被开方数中不含能开得尽方的因数或因式, 被开方数的因数是整数, 因式是整式” 进行逐一判断即可.

【详解】解: 对于 $\sqrt{\frac{\pi}{3}}$, π 是无理数, 不是最简二次根式;

对于 $\sqrt{27a} = \sqrt{9 \times 3a} = 3\sqrt{3a}$, 被开方数中 $27a$ 含有能开得尽方的因数 9, 不是最简二次根式;

对于 $\sqrt{42}$, 被开方数 $42 = 2 \times 3 \times 7$, 被开方数 42 不含有能开得尽方的因数, 满足最简二次根式的定义, 是最简二次根式;

对于 $\frac{1}{\sqrt{0.7}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{10}}} = \frac{\sqrt{10}}{7}$, 被开方数是小数, 不满足被开方数的因数是整数这一条件, 不是最简二次根式;

对于 $-\sqrt{(x^2 - y^2)(x + y)} = -\sqrt{(x - y)(x + y)(x + y)}$, 被开方数中含有能开得尽方的因式, 不是最简二次根式;

对于 $\sqrt[3]{5^2}$, 它是三次根式, 不是二次根式;

对于 $\sqrt{x^2 + y^2}$, 被开方数中 $x^2 + y^2$ 不含有能开得尽方的因数或因式, 是最简二次根式;

综上. 最简二次根式有 $\sqrt{42}$ 、 $\sqrt{x^2 + y^2}$.

故选: C.

5. 下列说法中错误的个数是 ()

①一个有理数除以无理数若有意义, 则运算结果必为无理数;

②带根号的都是无理数;

③无理数可以分为正无理数和负无理数两类;

④无理数是无限小数;

⑤0.101001000100001 是无理数.

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查的无理数和实数的定义和分类, 根据无理数, 实数的定义和分类逐一判断即可, 掌握相关知识是解题的关键.

【详解】解: ①若有理数为 0, 则除以无理数运算结果为 0 (有理数), 原说法错误, 故①符合题意;

②带根号的数不一定都是无理数, 原说法错误, 故②符合题意;

③无理数可以分为正无理数和负无理数两类, 正确, 故③不符合题意;

④无理数是无限小数, 正确, 故④不符合题意;

⑤0.101001000100001 是有理数, 原说法错误, 故⑤符合题意;

故选: C.

6. 已知 $a = (\pi - 3)^2$, $b = 0.1$, $c = (\pi - 3)^{-1}$, 则 ()

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $b < a < c$

D. $b < c < a$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查数的大小比较.

先估算, 再进行比较即可.

【详解】解： $a = (\pi - 3)^2 \approx 0.14^2 = 0.0196$ ， $b = 0.1$ ， $c = (\pi - 3)^{-1} \approx \frac{1}{0.14} = \frac{50}{7} > 7$ ，

$\therefore a < b < c$ ．

故选 A．

二、填空题（本大题共 12 题，每小题 2 分，满分 24 分）

7. $\sqrt{625}$ 的平方根是__．

【答案】 ± 5

【解析】

【分析】直接开根号，再求平方根即可．

【详解】解： $\sqrt{625} = 25$

25 的平方根等于 ± 5 ．

故答案为： ± 5 ．

【点睛】此题重点考查学生对平方根的理解，会计算一个数的平方根是解题的关键．

8. 写出 $\sqrt{3-a}$ 的一个有理化因式：_____．

【答案】 $2\sqrt{3-a}$ （答案不唯一）

【解析】

【分析】本题主要考查了有理化因式，根据有理化因式与原式的乘积是整式即可，掌握知识点的应用是解题的关键．

【详解】解： $\because \sqrt{3-a} \times 2\sqrt{3-a} = 2(3-a) = 6-2a$

$\therefore \sqrt{3-a}$ 的一个有理化因式为： $2\sqrt{3-a}$ ，

故答案为： $2\sqrt{3-a}$ （答案不唯一）

9. 将代数式 $\frac{3}{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}$ 分母有理化，结果是_____．

【答案】 $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题考查了分母有理化．分子分母同乘以 $(\sqrt{5}-2\sqrt{2})$ 求解作答即可．

【详解】解： $\frac{3}{\sqrt{5}+2\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5}-2\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+2\sqrt{2})(\sqrt{5}-2\sqrt{2})} = \frac{3(\sqrt{5}-2\sqrt{2})}{5-8} = \frac{3(\sqrt{5}-2\sqrt{2})}{-3} = 2\sqrt{2}-\sqrt{5},$

故答案为： $2\sqrt{2}-\sqrt{5}.$

10. 若方程 $(m-1)x^2 + 2x = x^2$ 是关于 x 的一元二次方程，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \neq 2$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的定义，先把方程化成一般式，再根据一元二次方程的定义解答即可求解，掌握一元二次方程的定义是解题的关键.

【详解】解： 方程整理成一般式为 $(m-2)x^2 + 2x = 0,$

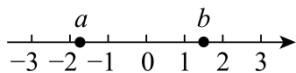
$\therefore$ 方程是关于 x 的一元二次方程，

$\therefore m-2 \neq 0,$

$\therefore m \neq 2,$

故答案为： $m \neq 2.$

11. a 、 b 在数轴上的位置如图，化简： $-\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(b-1)^2} - \sqrt{(a-b)^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$



【答案】 $2a-2b+2$

【解析】

【分析】 本题考查了利用数轴判断式子的正负，二次根式的化简，整式加减，根据数 a 、 b 在数轴上的位置确定 $a+1$ ， $b-1$ 及 $a-b$ 的符号，再根据二次根式的性质进行开方运算，再合并同类项，掌握二次根式的化简是解题的关键.

【详解】解： 由 a 、 b 在数轴上的位置可得： $-2 < a < -1$ ， $1 < b < 2$ ， $a < b$ ，

$\therefore a+1 < 0$ ， $b-1 > 0$ ， $a-b < 0$ ，

$$\therefore -\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(b-1)^2} - \sqrt{(a-b)^2}$$

$$= -|a+1| - |b-1| - |a-b|$$

$$= a+1 - (b-1) + a-b$$

$$= a+1-b+1+a-b$$

$$= 2a-2b+2,$$

故答案为: $2a-2b+2$.

12. 在数轴上, 点 A 与原点距离 $\sqrt{5}$ 个单位, 点 B 和原点相距 3 个单位, 则 AB 之间的距离为_____.

【答案】 $3-\sqrt{5}$ 或 $3+\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了数轴与实数, 数轴上两点间距离, 由题意可得点 A 表示的数为 $-\sqrt{5}$ 或 $\sqrt{5}$, 点 B 表示的数为 -3 或 3 , 再分四种情况, 利用两点距离求出 AB 即可求解, 掌握数轴上两点间距离公式是解题的关键.

【详解】 解: 由题意得, 点 A 表示的数为 $-\sqrt{5}$ 或 $\sqrt{5}$, 点 B 表示的数为 -3 或 3 ,

当点 A 表示的数为 $-\sqrt{5}$, 点 B 表示的数为 -3 时, $AB = -\sqrt{5} - (-3) = 3 - \sqrt{5}$;

当点 A 表示的数为 $-\sqrt{5}$, 点 B 表示的数为 3 时, $AB = 3 - (-\sqrt{5}) = 3 + \sqrt{5}$;

当点 A 表示的数为 $\sqrt{5}$, 点 B 表示的数为 -3 时, $AB = \sqrt{5} - (-3) = 3 + \sqrt{5}$;

当点 A 表示的数为 $\sqrt{5}$, 点 B 表示的数为 3 时, $AB = 3 - \sqrt{5}$;

综上, AB 之间的距离为 $3 - \sqrt{5}$ 或 $3 + \sqrt{5}$,

故答案为: $3 - \sqrt{5}$ 或 $3 + \sqrt{5}$.

13. 若 $|x+y+4| + \sqrt{(x-2)^2} = 0$, 则 $3x+2y =$ _____.

【答案】 -6

【解析】

【分析】 先根据非负数的性质求出 x 和 y 的值, 然后代入 $3x+2y$ 计算即可.

【详解】 由题意得

$$\begin{cases} x+y+4=0 \\ x-2=0 \end{cases},$$

解之得

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-6 \end{cases},$$

$$3x+2y=6-12=-6.$$

故答案为-6.

【点睛】 本题考查了二元一次方程组的解法，以及非负数的性质，①非负数有最小值是零；②有限个非负数之和仍然是非负数；③有限个非负数的和为零，那么每一个加数也必为零，初中范围内的非负数有：绝对值，算术平方根和偶次方.

14. 对于 $\sqrt{540a}$ ，当 $\sqrt{540a}$ 是整数时，最小的正整数 $a =$ _____.

【答案】 15

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式，由 $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ 即可求解，理解题意是解题的关键.

【详解】 解： $\because 540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$,

$\therefore$ 当 $\sqrt{540a}$ 是整数时，最小的正整数 $a = 3 \times 5 = 15$,

故答案为：15.

15. 若最简二次根式 $^{3x-y}\sqrt{3y+4x}$ 与最简二次根式 $\sqrt{2x-y+6}$ 是同类二次根式，则 $x+y =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了同类二次根式的定义，解二元一次方程组，代数式求值，根据同类二次根式的定义得到关于 x 、 y 的方程组，解方程求出 x 、 y 的值，再代入代数式计算即可求解，掌握同类二次根式的定义是解题的关键.

【详解】 解：由题意得，
$$\begin{cases} 3x-y=2 \\ 3y+4x=2x-y+6 \end{cases}$$

化简得，
$$\begin{cases} 3x-y=2 \\ x+2y=3 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

$\therefore x+y=1+1=2$,

故答案为：2.

16. 已知 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，例如， $[1.5]=1$ ， $[\sqrt{6}]=2$ ， $[\sqrt{9}]=3$ ，那么

$[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{98}]=$ _____.

【答案】 606

【解析】

【分析】本题主要考查取整函数，明确取整函数的性质： $\left[\sqrt{n}\right]=k$ 等价于 $k^2 \leq n < (k+1)^2$ 即每个整数 k 对应一段连续的 n 值，计算每一段的和即可得出结论.

【详解】解： $\left[\sqrt{n}\right]=k$ 当且仅当 $k^2 \leq n < (k+1)^2$ (k 为整数),

当 $k=1$ 时, $1 \leq n < 4$, $n=1,2,3$, 共 3 个, 和为 $1 \times 3 = 3$;

当 $k=2$ 时, $4 \leq n < 9$, $n=4,5,\dots,8$, 共 5 个, 和为 $2 \times 5 = 10$;

当 $k=3$ 时, $9 \leq n < 16$, $n=9,10,\dots,15$, 共 7 个, 和为 $3 \times 7 = 21$;

当 $k=4$ 时, $16 \leq n < 25$, $n=16,17,\dots,24$, 共 9 个, 和为 $4 \times 9 = 36$;

当 $k=5$ 时, $25 \leq n < 36$, $n=25,26,\dots,35$, 共 11 个, 和为 $5 \times 11 = 55$;

当 $k=6$ 时, $36 \leq n < 49$, $n=36,37,\dots,48$, 共 13 个, 和为 $6 \times 13 = 78$;

当 $k=7$ 时, $49 \leq n < 64$, $n=49,50,\dots,63$, 共 15 个, 和为 $7 \times 15 = 105$;

当 $k=8$ 时, $64 \leq n < 81$, $n=64,65,\dots,80$, 共 17 个, 和为 $8 \times 17 = 136$;

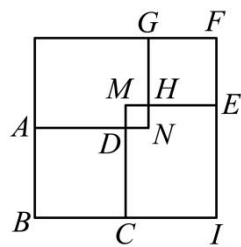
当 $k=9$ 时, $81 \leq n \leq 98$, $n=81,82,\dots,98$, 共 18 个, 和为 $9 \times 18 = 162$;

$$\therefore \left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \dots + \left[\sqrt{98}\right] = 3 + 10 + 21 + 36 + 55 + 78 + 105 + 136 + 162 = 606,$$

故答案为: 606.

17. 如图, 在大正方形纸片中放置两个小正方形 (正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFGH$), 已知: $AB = \sqrt{23} + 1$,

$EF = \sqrt{23} - 1$, $S_{\text{四边形}MCIE} = 25$, 则大正方形的边长为_____.



【答案】 $\sqrt{26} + \sqrt{23}$ ## $\sqrt{23} + \sqrt{26}$

【解析】

【分析】本题考查了算术平方根的应用, 平方差、完全平方公式, 设大正方形的边长为 x , 则有

$CI = x - \sqrt{23} - 1$, $EI = x - \sqrt{23} + 1$, 然后通过 $S_{\text{四边形}MCIE} = 25$, 则 $(x - \sqrt{23} - 1)(x - \sqrt{23} + 1) = 25$, 所

以 $(x - \sqrt{23})^2 = 26$ ，然后求出 x 的值即可，掌握知识点的应用是解题的关键。

【详解】解：设大正方形的边长为 x ，

$$\therefore AB = \sqrt{23} + 1, \quad EF = \sqrt{23} - 1,$$

$$\therefore CI = x - \sqrt{23} - 1, \quad EI = x - \sqrt{23} + 1,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}MCIE} = 25,$$

$$\therefore (x - \sqrt{23} - 1)(x - \sqrt{23} + 1) = 25,$$

$$(x - \sqrt{23})^2 - 1 = 25$$

$$(x - \sqrt{23})^2 = 26$$

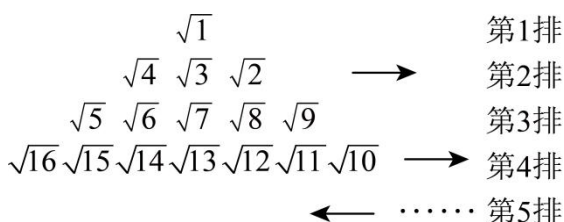
$$x - \sqrt{23} = \pm\sqrt{26},$$

$$\therefore x = \sqrt{26} + \sqrt{23} \text{ 或 } x = -\sqrt{26} + \sqrt{23} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore \text{大正方形的边长为 } \sqrt{26} + \sqrt{23},$$

故答案为： $\sqrt{26} + \sqrt{23}$.

18. 将 $\sqrt{1}$ 、 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{4}$ 、.....按如图方式排列，若规定 (x, y) 表示第 x 排从左向右第 y 个数，若 $\sqrt{2028}$ 在 (a, b) ，则 $a - b$ 的值为_____.



【答案】 -43

【解析】

【分析】 本题主要考查了数字变化的规律及代数式求值，根据所给各数的排列方式，发现前 n 排数的总个数的变化规律，据此可解决问题.

【详解】解：由题知，

第 1 排数的个数为： $1 = 1^2$ ；

前 2 排数的总数为： $1 + 3 = 2^2$ ；

前 3 排数的总数为： $1 + 3 + 5 = 3^2$ ；

....,

所以前 n 排数的总数为 n^2 ，且第 n 排有 $(2n-1)$ 个数.

当 $n=45$ 时， $n^2=45^2=2025$ ， $2n-1=2\times 45-1=89$ ，

所以，数字 $\sqrt{2028}$ 是第 46 排，从左往右的 89 个数.

因为第 46 排有 $2\times 46-1=91$ 个数，且从右到左依次减小，

则 $a=46$ ， $b=91-(2028-2025)+1=89$ ，

所以 $a-b=46-89=-43$.

故答案为：-43.

三、简答题 (本大题共 2 题，满分 26 分)

19. 比较大小：

(1) $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ _____ $2+\sqrt{6}$ ；

(2) $\sqrt{15}-\sqrt{12}$ _____ $\sqrt{16}-\sqrt{13}$.

【答案】(1) <

(2) >

【解析】

【分析】本题考查了无理数的大小比较，二次根式的混合运算，熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

(1) 分别计算两个无理数的平方，比较平方的大小，即可得解；

(2) 对两个无理数进行分子有理化，得到分子相同的分数，比较分母的大小，即可得解.

【小问 1 详解】

解： $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2=3+7+2\sqrt{21}=10+2\sqrt{21}$ ， $(2+\sqrt{6})^2=4+6+4\sqrt{6}=10+4\sqrt{6}=10+2\sqrt{24}$ ，

$\therefore 21 < 24$ ，

$\therefore \sqrt{21} < \sqrt{24}$ ，

$\therefore 10+2\sqrt{21} < 10+2\sqrt{24}$ ，

$\therefore \sqrt{3}+\sqrt{7} < 2+\sqrt{6}$ ；

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \sqrt{15} - \sqrt{12} = \frac{15-12}{\sqrt{15} + \sqrt{12}} = \frac{3}{\sqrt{15} + \sqrt{12}}, \quad \sqrt{16} - \sqrt{13} = \frac{16-13}{\sqrt{16} + \sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{16} + \sqrt{13}},$$

$$\therefore \sqrt{16} > \sqrt{15}, \quad \sqrt{13} > \sqrt{12},$$

$$\therefore \sqrt{16} + \sqrt{13} > \sqrt{15} + \sqrt{12},$$

$$\therefore \sqrt{15} - \sqrt{12} > \sqrt{16} - \sqrt{13}.$$

20. 计算:

$$(1) \sqrt[3]{(\sqrt{13})^2 - (\sqrt{5})^2} + (\sqrt{8} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{8} - \sqrt{2})^2;$$

$$(2) \sqrt{a} \div \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right);$$

$$(3) \frac{2}{b} \sqrt{2ab^5} \cdot \left(-\frac{3}{2} \sqrt{4a^3b} \right) \div 3 \sqrt{\frac{2b}{a}} \div \sqrt{\frac{b^2}{a}};$$

$$(4) (\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6})^2 (\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{3}}.$$

【答案】 (1) 18 (2) $\frac{a\sqrt{ab} - ab}{a - b}$

$$(3) -2a^3\sqrt{b}$$

$$(4) 163 + 64\sqrt{6} + 2\sqrt{2}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的运算，熟练掌握二次根式混合运算法则是解答本题的关键.

(1) 原式根据完全平方公式将括号展开，合并即可；

(2) 原式先计算括号内的，把除法转换为乘法后进行分母有理化可得结果；

(3) 原式根据二次根式乘除法运算法则进行计算即可；

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & \sqrt[3]{(\sqrt{13})^2 - (\sqrt{5})^2} + (\sqrt{8} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{8} - \sqrt{2})^2 \\ &= \sqrt[3]{13-5} + (2\sqrt{2} + \sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 \\ &= \sqrt[3]{8} + (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2 \\ &= 2 + 18 - 2 \end{aligned}$$

$$=18;$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & \sqrt{a} \div \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \\ &= \sqrt{a} \div \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} \\ &= \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{a\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \\ &= \frac{a\sqrt{ab} - ab}{a - b}; \end{aligned}$$

【小问 3 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & \frac{2}{b} \sqrt{2ab^5} \cdot \left(-\frac{3}{2} \sqrt{4a^3b} \right) \div 3 \sqrt{\frac{2b}{a}} \div \sqrt{\frac{b^2}{a}} \\ &= \frac{2}{b} \cdot b^2 \sqrt{2ab} \cdot \left(-\frac{3}{2} \times 2a \sqrt{ab} \right) \div 3 \sqrt{\frac{2b}{a}} \div \sqrt{\frac{b^2}{a}} \\ &= -\frac{3}{2} \times \frac{2}{b} \cdot b^2 \cdot 2a \sqrt{2a^2b^2} \div 3 \sqrt{\frac{2b}{a}} \div \sqrt{\frac{b^2}{a}} \\ &= -\frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{b} \cdot b^2 \cdot 2a \sqrt{2a^2b^2 \times \frac{a}{2b} \times \frac{a}{b^2}} \\ &= -2ab \sqrt{\frac{a^4}{b}} \\ &= -2a^3 \sqrt{b}; \end{aligned}$$

【小问 4 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} \right)^2 \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6} \right)^2 + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} \\ &= \left[\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} \right) \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6} \right) \right]^2 + \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{3})^2}{(\sqrt{6} - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{3})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{6})^2 \right]^2 + \frac{9+6\sqrt{2}}{6-3} \\
&= (8+4\sqrt{6})^2 + 3+2\sqrt{2} \\
&= 64+64\sqrt{6}+96+3+2\sqrt{2} \\
&= 163+64\sqrt{6}+2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

四、解答题 (本大题共 5 题, 满分 38 分)

21. 已知 $x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $y = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, 求代数式 $x^2 + y^2$ 的值.

【答案】 34.

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的运算, 分母有理化, 平方差公式、完全平方公式, 先通过分母有理化得出 $x = 3+2\sqrt{2}$, $y = 3-2\sqrt{2}$, 然后代入即可求解, 掌握运算法则是解题的关键.

【详解】 解: $\because x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, y = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1},$

$$\therefore x = 3+2\sqrt{2}, y = 3-2\sqrt{2},$$

$$\therefore x^2 + y^2 = (3-2\sqrt{2})^2 + (3+2\sqrt{2})^2$$

$$= 9-12\sqrt{2}+8+9+12\sqrt{2}+8$$

$$= 34.$$

22. 若 $x = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$, 求 $x^4 - (2+\sqrt{3})x^2 + (1+2\sqrt{3})x + \frac{1}{x} - \frac{3\sqrt{3}-11}{2}$ 的值.

【答案】 $26+10\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的运算, 分母有理化, 代数式求值, 由 $x = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$, 得

$$x = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3}+1, \quad \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \quad \text{则 } x^2 = (\sqrt{3}+1)^2 = 4+2\sqrt{3}, \quad \text{故有}$$

$x^4 = (x^2)^2 = (4 + 2\sqrt{3})^2 = 28 + 16\sqrt{3}$ ，然后代入即可求解，掌握知识点的应用是解题的关键。

【详解】解：由 $x = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$ ，得 $x = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3}+1$ ， $\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ，

$$\therefore x^2 = (\sqrt{3}+1)^2 = 4 + 2\sqrt{3},$$

$$\therefore x^4 = (x^2)^2 = (4 + 2\sqrt{3})^2 = 28 + 16\sqrt{3},$$

$$\therefore x^4 - (2 + \sqrt{3})x^2 + (1 + 2\sqrt{3})x + \frac{1}{x} - \frac{3\sqrt{3}-11}{2}$$

$$= 28 + 16\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})(4 + 2\sqrt{3}) + (1 + 2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1) + \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{3\sqrt{3}-11}{2}$$

$$= 28 + 16\sqrt{3} - (14 + 8\sqrt{3}) + 7 + 3\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{3\sqrt{3}-11}{2}$$

$$= 28 + 16\sqrt{3} - 14 - 8\sqrt{3} + 7 + 3\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{11}{2}$$

$$= 26 + 10\sqrt{3}.$$

23. 已知 $\frac{1}{2}(2y-x-z) = \sqrt{1-x} + 2\sqrt{\frac{1}{2}y - \frac{3}{2}} + \sqrt{2-z}$ ，求 $x-y+z$ 的值。

【答案】 $x-y+z$ 的值为 $-\frac{5}{2}$ 。

【解析】

【分析】 本题考查了配方法，二次根式的性质，非负性的性质，代数式求值，由

$$\frac{1}{2}(2y-x-z) = \sqrt{1-x} + 2\sqrt{\frac{1}{2}y - \frac{3}{2}} + \sqrt{2-z}，\text{配方为 } (\sqrt{2y-6}-1)^2 + (\sqrt{1-x}-1)^2 + (\sqrt{2-z}-1)^2 = 0，$$

然后通过非负性质求出 $y = \frac{7}{2}$ ， $x = 0$ ， $z = 1$ ，然后代入即可求解，

掌握知识点的应用是解题的关键。

【详解】解： $\because \frac{1}{2}(2y-x-z) = \sqrt{1-x} + 2\sqrt{\frac{1}{2}y - \frac{3}{2}} + \sqrt{2-z}$ ，

$$\therefore 2y-x-z = 2\sqrt{1-x} + 2\sqrt{2y-6} + 2\sqrt{2-z}，$$

$$2y - 2\sqrt{2y-6} - x - 2\sqrt{1-x} - z - 2\sqrt{2-z} = 0$$

$$\left[(2y-6) - 2\sqrt{2y-6} + 1\right] + \left[(1-x) - 2\sqrt{1-x} + 1\right] + \left[(2-z) - 2\sqrt{2-z} + 1\right] = 0$$

$$\left(\sqrt{2y-6}\right)^2 - 2\sqrt{2y-6} + 1^2 + \left(\sqrt{1-x}\right)^2 - 2\sqrt{1-x} + 1^2 + \left(\sqrt{2-z}\right)^2 - 2\sqrt{2-z} + 1^2 = 0$$

$$\left(\sqrt{2y-6}-1\right)^2 + \left(\sqrt{1-x}-1\right)^2 + \left(\sqrt{2-z}-1\right)^2 = 0,$$

$$\therefore \sqrt{2y-6}-1=0, \quad \sqrt{1-x}-1=0, \quad \sqrt{2-z}-1=0,$$

$$\therefore y = \frac{7}{2}, \quad x = 0, \quad z = 1,$$

$$\therefore x - y + z = 0 - \frac{7}{2} + 1 = -\frac{5}{2},$$

$$\therefore x - y + z \text{ 的值为 } -\frac{5}{2}.$$

24. 化简:

$$(1) \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+2} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+10}.$$

$$(2) \frac{1+2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})} + \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{7}+3}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{7}+3)}.$$

【答案】(1) 9

(2) 1

【解析】

【分析】(1) 先进行分母有理化，再相加即可求解；

(2) 把原式转化为 $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+3}$ ，再进行分母有理化，最后相加即可求解；

本题考查了分式的化简求值，掌握分式的性质和运算法则是解题的关键.

【小问1详解】

$$\text{解: 原式} = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{100} - \sqrt{99}$$

$$= \sqrt{100} - 1$$

$$= 10 - 1$$

$$= 9;$$

【小问2详解】

$$\begin{aligned}
\text{解: 原式} &= \frac{(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})} + \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{7})+(\sqrt{7}+3)}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{7}+3)} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{1+\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{7}+3} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} \right) \\
&= \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+3} \\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{7}}{2} \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}+3-\sqrt{7}) \\
&= \frac{1}{2} \times 2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

25. 设等式 $\sqrt{a(b-a)} + \sqrt{a(c-a)} = \sqrt{b-a} - \sqrt{a-c}$ 在实数范围内成立, 其中 a 、 b 、 c 是两两不同的实数,

求 $\frac{4b^2+bc-c^2}{b^2-bc+c^2}$ 的值.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件, 分式化简求值, 由二次根式有意义得条件得 $b-a \geq 0$, $a-c \geq 0$, 即得 $c-a \leq 0$, 进而可得 $a=0$, 即等式可变为 $\sqrt{b}-\sqrt{-c}=0$, 得到 $b=-c$, 再代入分式化简即可求解, 掌握二次根式有意义的条件是解题的关键.

【详解】 解: 由二次根式有意义的条件得, $b-a \geq 0$, $a-c \geq 0$,
 $\therefore c-a \leq 0$,
 又 $\because a(b-a) \geq 0$, $a(c-a) \geq 0$,
 $\therefore a \geq 0$ 且 $a \leq 0$,
 $\therefore a=0$,
 $\therefore$ 等式可变为 $\sqrt{b}-\sqrt{-c}=0$,
 $\therefore b=-c$,

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{原式} &= \frac{4c^2 - c^2 - c^2}{c^2 + c^2 + c^2} \\
 &= \frac{2c^2}{3c^2} \\
 &= \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

五、综合实践（本大题共 8 题，满分 50 分）

26. 已知实数 a 满足 $\sqrt{a-2025} + |2024-a| = a$ ，则 $a-2025^2 =$ _____.

【答案】 -2024

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件，绝对值的性质，代数式求值，由了二次根式有意义的条件可得 $a \geq 2025$ ，即得 $2024-a < 0$ ，进而得到 $\sqrt{a-2025} + a - 2024 = a$ ，即得到 $a = 2025 + 2024^2$ ，再代入代数式计算即可求解，掌握二次根式有意义的条件是解题的关键.

【详解】 解：由题意可得， $a - 2025 \geq 0$ ，

$$\therefore a \geq 2025,$$

$$\therefore 2024 - a < 0,$$

$$\therefore \sqrt{a-2025} + |2024-a| = a,$$

$$\therefore \sqrt{a-2025} + a - 2024 = a,$$

$$\therefore \sqrt{a-2025} = 2024,$$

$$\therefore a - 2025 = 2024^2,$$

$$\therefore a = 2025 + 2024^2,$$

$$\therefore a - 2025^2$$

$$= 2025 + 2024^2 - 2025^2$$

$$= 2025 + (2024 + 2025)(2024 - 2025)$$

$$= 2025 - 4049$$

$$= -2024,$$

故答案为： -2024 .

27. 比较大小: $\sqrt{x+2y}-\sqrt{2y}$ _____ $\sqrt{2y}-\sqrt{2y-x}$. (用“>”、“<”、“≥”或“≤”填空)

【答案】 ≤

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的大小比较，二次根式的混合运算，先计算出

$$\sqrt{x+2y}-\sqrt{2y}-\left(\sqrt{2y}-\sqrt{2y-x}\right)=\sqrt{x+2y}+\sqrt{2y-x}-2\sqrt{2y}, \text{ 令 } S=\sqrt{x+2y}+\sqrt{2y-x},$$

$T=2\sqrt{2y}$, 求出 S^2 与 T^2 的值, 比较 S^2 与 T^2 的大小, 即可得解, 熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】 解: $\sqrt{x+2y}-\sqrt{2y}-\left(\sqrt{2y}-\sqrt{2y-x}\right)$

$$=\sqrt{x+2y}-\sqrt{2y}-\sqrt{2y}+\sqrt{2y-x}$$

$$=\sqrt{x+2y}+\sqrt{2y-x}-2\sqrt{2y},$$

$$\text{令 } S=\sqrt{x+2y}+\sqrt{2y-x}, \quad T=2\sqrt{2y},$$

$$\text{则 } S^2=x+2y+2y-x+2\sqrt{x+2y}\sqrt{2y-x}=4y+2\sqrt{(x+2y)(2y-x)}=4y+2\sqrt{4y^2-x^2}, \quad T^2=8y,$$

$$\therefore S^2-T^2=2\sqrt{4y^2-x^2}-4y=2\left(\sqrt{4y^2-x^2}-2y\right),$$

$$\therefore 4y^2-x^2 \leq 4y^2,$$

$$\therefore \sqrt{4y^2-x^2}-2y \leq 0,$$

$$\therefore S^2-T^2 \leq 0,$$

$$\therefore S^2 \leq T^2,$$

$$\therefore \sqrt{x+2y}-\sqrt{2y}-\left(\sqrt{2y}-\sqrt{2y-x}\right) \leq 0,$$

$$\therefore \sqrt{x+2y}-\sqrt{2y} \leq \left(\sqrt{2y}-\sqrt{2y-x}\right),$$

故答案为: ≤.

28. 计算:

$$(1) \sqrt{\frac{13}{2}}-2\sqrt{3+\sqrt{8}}=_____;$$

$$(2) \sqrt{32+16\sqrt{3}+12\sqrt{5}+8\sqrt{15}}=_____.$$

【答案】 ①. $2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ②. $3 + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{15}$

【解析】

【分析】 本题主要考查复式二次根式的化简，掌握二次根式的性质和化简方法是解答本题的关键.

(1) 从最里层的二次根式进行化简即可；

(2) 设 $\sqrt{32+16\sqrt{3}+12\sqrt{5}+8\sqrt{15}} = a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} + d\sqrt{15}$ ，两边平方后对比系数求出 a, b, c, d 的值即可.

【详解】 解：(1) $\sqrt{\frac{13}{2} - 2\sqrt{3+\sqrt{8}}}$

$$= \sqrt{\frac{13}{2} - 2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{13}{2} - 2\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{13}{2} - 2(1+\sqrt{2})}$$

$$= \sqrt{\frac{13}{2} - 2 - 2\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{2} - 2\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{8-4\sqrt{2}+1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2\sqrt{2}-1)^2}{2}}$$

$$= \frac{(2\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{2}$$

$$= 2 - \frac{\sqrt{2}}{2};$$

(2) 设 $\sqrt{32+16\sqrt{3}+12\sqrt{5}+8\sqrt{15}} = a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} + d\sqrt{15}$ (a, b, c, d 为正有理数),

平方得:

$$32+16\sqrt{3}+12\sqrt{5}+8\sqrt{15}$$

$$=a^2+3b^2+5c^2+15d^2+2ab\sqrt{3}+2ac\sqrt{5}+2ad\sqrt{15}+2bc\sqrt{15}+6bd\sqrt{15}+10cd\sqrt{3},$$

对比系数得:

$$\begin{cases} a^2+3b^2+5c^2+15d^2=32 \\ ab+5cd=8 \\ ac+3bd=6 \\ ad+bc=4 \end{cases}$$

尝试 $d=1, c=1$, 则 $ab+5=8, a+3b=6$,

解得 $a=3, b=1$,

$$\text{而 } a^2+3b^2+5c^2+15d^2=3^2+3\times 1^2+5\times 1^2+15\times 1^2=9+3+5+15=32,$$

所以, $a=3, b=1, c=1, d=1$ 满足条件,

$$\text{所以, } \sqrt{32+16\sqrt{3}+12\sqrt{5}+8\sqrt{15}}=3+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15}.$$

故答案为: (1) $2-\frac{\sqrt{2}}{2}$; (2) $3+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15}$.

29. 在数学中也经常用对仗 (对偶) 思想解决有关问题, 比如, 已知:

$(a+\sqrt{a^2+10})(b+\sqrt{b^2+10})=10$, 则 $(a+\sqrt{a^2+10})$ 的“对偶式”是 $(a-\sqrt{a^2+10})$, 通过

$(a+\sqrt{a^2+10})(a-\sqrt{a^2+10})=-10$, 可以得到 $b+\sqrt{b^2+10}=\sqrt{a^2+10}-a$, 同样也可以得到

$a+\sqrt{a^2+10}=\sqrt{b^2+10}-b$, 从而解决相应的问题. 请运用上述方法解决下列问题:

已知实数 x, y 满足 $(x+\sqrt{x^2+2025})(y+\sqrt{y^2+2025})=2025$, 则 $x+y+2025=$ _____.

【答案】 2025

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的混合运算, 根据题意构造 $x+\sqrt{x^2+2025}$ 的对偶式 $x-\sqrt{x^2+2025}$,

$y+\sqrt{y^2+2025}$ 的对偶式 $y-\sqrt{y^2+2025}$, 得出 $y+\sqrt{y^2+2025}=\sqrt{x^2+2025}-x$,

$x+\sqrt{x^2+2025}=\sqrt{y^2+2025}-y$, 两式相加得出 $x+y=0$, 从而可计算 $x+y+2025=2025$.

【详解】 解: 根据题意得: $x+\sqrt{x^2+2025}$ 的对偶式 $x-\sqrt{x^2+2025}$, $y+\sqrt{y^2+2025}$ 的对偶式

$y-\sqrt{y^2+2025}$,

$$\therefore y + \sqrt{y^2 + 2025} = \sqrt{x^2 + 2025} - x \quad ①,$$

$$x + \sqrt{x^2 + 2025} = \sqrt{y^2 + 2025} - y \quad ②,$$

①+②得,

$$\left(y + \sqrt{y^2 + 2025}\right) + \left(x + \sqrt{x^2 + 2025}\right) = \left(\sqrt{x^2 + 2025} - x\right) + \left(\sqrt{y^2 + 2025} - y\right),$$

$$x + y + \sqrt{x^2 + 2025} + \sqrt{y^2 + 2025} = \sqrt{x^2 + 2025} + \sqrt{y^2 + 2025} - x - y,$$

$$\therefore x + y = -x - y,$$

$$\therefore x + y = 0,$$

$$\therefore x + y + 2025 = 2025.$$

故答案为: 2025.

30. 求不超过 $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^6$ 的最大整数.

【答案】 3903

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式和平方差公式的应用, 二次根式的运算, 设 $\sqrt{5} + \sqrt{3} = x$, $\sqrt{5} - \sqrt{3} = y$,

则 $x + y = 2\sqrt{5}$, $xy = 2$, 可得 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 16$, 即得

$x^6 + y^6 = (x^2 + y^2)^3 - 3x^2y^2(x^2 + y^2) = 3904$, 即得到 $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^6 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^6 = 3904$, 进而根据

$0 < \sqrt{5} - \sqrt{3} < 1$ 即可求解, 正确计算是解题的关键.

【详解】 解: 设 $\sqrt{5} + \sqrt{3} = x$, $\sqrt{5} - \sqrt{3} = y$, 则 $x + y = 2\sqrt{5}$, $xy = (\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 2$,

$$\therefore x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (2\sqrt{5})^2 - 2 \times 2 = 16,$$

$$\therefore x^6 + y^6 = (x^2 + y^2)^3 - 3x^2y^2(x^2 + y^2) = 16^3 - 3 \times 4 \times 16 = 3904,$$

$$\text{即 } (\sqrt{5} + \sqrt{3})^6 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^6 = 3904,$$

$$\because 0 < \sqrt{5} - \sqrt{3} < 1,$$

$$\therefore 0 < (\sqrt{5} - \sqrt{3})^6 < 1,$$

$$\therefore \text{不超过 } (\sqrt{5} + \sqrt{3})^6 \text{ 的最大整数为 } 3903.$$

31. 计算: $\frac{3}{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}} + \frac{3}{8\sqrt{5}+5\sqrt{8}} + \frac{3}{11\sqrt{8}+8\sqrt{11}} + \cdots + \frac{3}{101\sqrt{98}+98\sqrt{101}}.$

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{101}}{101}$

【解析】

【分析】 本题主要考查分母有理化, 观察规律第 n 个加数为 $\frac{3}{(3n+2)\sqrt{3n-1}+(3n-1)\sqrt{3n+2}}$, 进行分母

有理化得 $\frac{1}{\sqrt{3n-1}} - \frac{1}{\sqrt{3n+2}}$, 将原式进行变形, 相加, 结果只剩下首尾两项, 从而可得结论.

【详解】 解: 观察式子中的加数可得, 第 n 个加数为 $\frac{3}{(3n+2)\sqrt{3n-1}+(3n-1)\sqrt{3n+2}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{3[(3n+2)\sqrt{3n-1}-(3n-1)\sqrt{3n+2}]}{[(3n+2)\sqrt{3n-1}+(3n-1)\sqrt{3n+2}][(3n+2)\sqrt{3n-1}-(3n-1)\sqrt{3n+2}]} \\ &= \frac{3[(3n+2)\sqrt{3n-1}-(3n-1)\sqrt{3n+2}]}{(3n+2)^2(3n-1)-(3n-1)^2(3n+2)} \\ &= \frac{3[(3n+2)\sqrt{3n-1}-(3n-1)\sqrt{3n+2}]}{(3n+2)(3n-1)[(3n+2)-(3n-1)]} \\ &= \frac{3[(3n+2)\sqrt{3n-1}-(3n-1)\sqrt{3n+2}]}{3(3n+2)(3n-1)} \\ &= \frac{(3n+2)\sqrt{3n-1}-(3n-1)\sqrt{3n+2}}{(3n+2)(3n-1)} \\ &= \frac{\sqrt{3n-1}}{3n-1} - \frac{\sqrt{3n+2}}{3n+2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3n-1}} - \frac{1}{\sqrt{3n+2}}, \end{aligned}$$

$\therefore 3n+2=101,$

$\therefore n=33,$

$\therefore \frac{3}{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}} + \frac{3}{8\sqrt{5}+5\sqrt{8}} + \frac{3}{11\sqrt{8}+8\sqrt{11}} + \cdots + \frac{3}{101\sqrt{98}+98\sqrt{101}}$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{8}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{11}} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{98}} - \frac{1}{\sqrt{101}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{101}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{101}}{101}.
\end{aligned}$$

32. 设 $2025x^3 = 2026y^3 = 2027z^3$, 且 $xyz > 0$, 且

$\sqrt[3]{2025x^2 + 2026y^2 + 2027z^2} = \sqrt[3]{2025} + \sqrt[3]{2026} + \sqrt[3]{2027}$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ 的值.

【答案】 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

【解析】

【分析】 本题考查了立方根条件求值问题, 设 $2025x^3 = 2026y^3 = 2027z^3 = k$, 则可得 $k \neq 0$, 由 $xyz > 0$,

则 $2025 = \frac{k}{x^3}$, $2026 = \frac{k}{y^3}$, $2027 = \frac{k}{z^3}$, 原等式变形为

$$\sqrt[3]{k \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)} = \sqrt[3]{\frac{k}{x^3}} + \sqrt[3]{\frac{k}{y^3}} + \sqrt[3]{\frac{k}{z^3}} = \sqrt[3]{k} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right), \text{再整理成} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^3 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \text{即可求解,}$$

掌握立方根的性质, 巧妙恒等变形使实际问题简化, 利用等式两边平方, 因式分解求出代数式的值是解题的关键.

【详解】 解: 设 $2025x^3 = 2026y^3 = 2027z^3 = k$, 则可得 $k \neq 0$,

$\therefore xyz > 0$,

$$\therefore 2025 = \frac{k}{x^3}, \quad 2026 = \frac{k}{y^3}, \quad 2027 = \frac{k}{z^3},$$

$$\therefore 2025x^2 + 2026y^2 + 2027z^2 = \frac{k}{x} + \frac{k}{y} + \frac{k}{z} = k \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right),$$

$$\therefore \sqrt[3]{2025x^2 + 2026y^2 + 2027z^2} = \sqrt[3]{2025} + \sqrt[3]{2026} + \sqrt[3]{2027},$$

$$\therefore \sqrt[3]{k \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)} = \sqrt[3]{\frac{k}{x^3}} + \sqrt[3]{\frac{k}{y^3}} + \sqrt[3]{\frac{k}{z^3}} = \sqrt[3]{k} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right),$$

$$\therefore k \neq 0, \quad xyz > 0,$$

$$\therefore x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0,$$

$$\therefore \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z},$$

$$\therefore \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^3 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z},$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

33. 求证: $\sqrt{\frac{1}{11 \cdots 1 \underset{(n-1)\text{个}}{\diamond} 22 \cdots 2 \underset{n\text{个}}{\diamond} 5}}$ 是有理数.

【答案】证明见解析.

【解析】

【分析】本题考查了算术平方根，有理数概念，运用条件代换成完全平方公式，即可求证，掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】解: $\therefore 11 \cdots 1 \underset{(n-1)\text{个}}{\diamond} 22 \cdots 2 \underset{n\text{个}}{\diamond} 5$

$$= 11 \cdots 1 \underset{2n\text{个}}{\diamond} + 11 \cdots 1 \underset{(n+1)\text{个}}{\diamond} + 3$$

$$= \frac{10^{2n} - 1}{9} + \frac{10^{n+1} - 1}{9} + 3$$

$$= \frac{10^{2n} + 10^{n+1} + 25}{9}$$

$$= \left(\frac{10^n + 5}{3} \right)^2,$$

$$\therefore \sqrt{\frac{1}{11 \cdots 1 \underset{(n-1)\text{个}}{\diamond} 22 \cdots 2 \underset{n\text{个}}{\diamond} 5}} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{10^n + 5}{3} \right)^2}} = \frac{1}{\frac{10^n + 5}{3}} = \frac{3}{10^n + 5}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{1}{11 \cdots 1 \underset{(n-1)\text{个}}{\diamond} 22 \cdots 2 \underset{n\text{个}}{\diamond} 5}} \text{ 是有理数.}$$

