

2025 学年第一学期阶段学习自我评估

八年级数学学科试卷

(完卷时间: 90 分钟, 满分: 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 若 -4 是 a 的一个平方根, $(\sqrt{9})^2$ 的平方根是 b , 则 $\sqrt{a+b}$ 的值为 ()

A. $\sqrt{19}$

B. 5

C. 5 或 $\sqrt{7}$

D. $\sqrt{13}$ 或 $\sqrt{19}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了平方根和算术平方根的定义, 熟练掌握平方根的定义是解题的关键. 本题先依据平方根的性质求得 a, b 的值, 然后再进行计算即可.

【详解】解: $\because -4$ 是 a 的一个平方根,

$$\therefore a = 16,$$

$$\because (\sqrt{9})^2 = 9 \text{ 的平方根是 } b,$$

$$\therefore b = \pm 3,$$

$$\therefore \text{当 } a = 16, b = 3 \text{ 时, } \sqrt{a+b} = \sqrt{19},$$

$$\text{当 } a = 16, b = -3 \text{ 时, } \sqrt{a+b} = \sqrt{13}.$$

故选: D.

2. 关于 x 的一元二次方程 $kx^2 + 4x - 1 = 0$ 有两个实数根, 则 k 的取值范围是 ()

A. $k > -4$

B. $k \geq -4$

C. $k \geq -4$ 且 $k \neq 0$

D. $k > -4$ 且 $k \neq 0$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程根的判别式. 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$. 一元二次方程有两个不相等的实数根, $\Delta > 0$; 一元二次方程有两个相等的实数根, $\Delta = 0$; 一元二次方程没有实数根, $\Delta < 0$. 熟练掌握是解决问题的关键.

根据方程 $kx^2 + 4x - 1 = 0$ 有两个实数根, 求解 $\Delta = 4^2 - 4k \times (-1) = 4k + 16 \geq 0$, 且 $k \neq 0$ 即可得到答案.

【详解】解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $kx^2 + 4x - 1 = 0$ 有两个实数根,

$$\therefore \Delta = 4^2 - 4k \times (-1) = 4k + 16 \geq 0,$$

$$\therefore k \geq -4,$$

$$\text{又 } k \neq 0.$$

$$\therefore k \geq -4, \text{ 且 } k \neq 0.$$

故选: C.

3. 下列各数中, 是无理数的是 ()

A. -1

B. 0

C. $\frac{22}{7}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了无理数的识别, 无限不循环小数叫无理数, 初中范围内常见的无理数有三类: ① π 类, 如 2π , $\frac{\pi}{3}$ 等; ②开方开不尽的数, 如 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ 等; ③虽有规律但却是无限不循环的小数, 如0.1010010001... (两个1之间依次增加1个0), 0.2121121112... (两个2之间依次增加1个1)等, 据此可得答案.

【详解】解: 由无理数的定义可知, 四个数中, 只有 $\sqrt{3}$ 是无理数,

故选: D.

4. 下列说法正确的是 ()

A. 近似数2万与20000的精确度相同

B. 近似数0.001精确到千分位

C. 近似数 1.35×10^5 精确到百分位

D. 近似数38与38.0的精确度相同

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了精确度, 一个数精确到哪一位, 即看该近似数的最后一位在什么位就精确到什么位, 据此求解即可.

【详解】解: A、2万精确到万位, 20000精确到个位, 故原说法错误, 不符合题意;

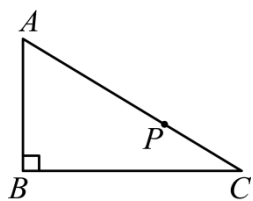
B、近似数0.001精确到千分位, 说法正确, 符合题意;

C、近似数 1.35×10^5 精确到千位, 故原说法错误, 不符合题意;

D、近似数38精确到个位, 38.0精确到十分位, 因此原说法错误, 故不符合题意;

故选: B.

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 6$, $BC = 8$, $\angle B = 90^\circ$, 若 P 是 AC 上的一个动点, 则 $AP + BP + CP$ 的最小值是 ()



A. 14.8

B. 15

C. 15.2

D. 16

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查解直角三角形，勾股定理，动点问题等知识，解题的关键是掌握垂线段最短和等面积法. 利用勾股定理求出 AC ，根据垂线段最短，求出 BP 的最小值即可解决问题.

【详解】 解： $\because AB = 6, BC = 8, \angle B = 90^\circ$,

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$$\therefore AP + BP + PC = BP + AC = BP + 10,$$

根据垂线段最短得，当 $BP \perp AC$ 时， BP 的值最小，此时 $AP + BP + PC$ 取得最小值，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} BP \times AC,$$

$$\therefore BP = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{6 \times 8}{10} = 4.8,$$

$$\therefore AP + BP + PC \text{ 的最小值 } 10 + 4.8 = 14.8.$$

故选：A.

6. 等腰三角形的腰和底分别是 $x^2 - 12x + 20 = 0$ 的两根，则该三角形的周长为 ()

A. 14

B. 22

C. 22 或 14

D. 22 或 14

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程，等腰三角形的定义，三角形的三边关系，因式分解法求出方程的解，根据等腰三角形的定义和三角形的三边关系，确定等腰三角形的腰，根据周长公式进行计算即可.

【详解】 解： $x^2 - 12x + 20 = 0$,

$$(x - 10)(x - 2) = 0,$$

解得 $x_1 = 10, x_2 = 2$,

$\therefore 2 + 2 < 10$ 不能构成三角形，

$\therefore 10$ 为等腰三角形的腰长， 2 为底边长，

$\therefore$ 该三角形的周长为 $10 + 10 + 2 = 22$;

故选 B.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 在实数范围内分解因式: $2x^2 - 5x - 1 =$ _____.

【答案】 $2\left(x + \frac{\sqrt{33}-5}{4}\right)\left(x - \frac{5+\sqrt{33}}{4}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了对一个多项式进行因式分解的能力, 当要求在实数范围内进行分解时, 分解的结果一般分到出现无理数为止.

【详解】 解: $2x^2 - 5x - 1$

$$= 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right) - \frac{25}{8} - 1$$

$$= 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{33}{8}$$

$$= (\sqrt{2})^2 \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{66}}{4}\right)^2$$

$$= \left[\sqrt{2}\left(x - \frac{5}{4}\right) + \frac{\sqrt{66}}{4}\right] \left[\sqrt{2}\left(x - \frac{5}{4}\right) - \frac{\sqrt{66}}{4}\right]$$

$$= \left(\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{66}-5\sqrt{2}}{4}\right) \left(\sqrt{2}x - \frac{5\sqrt{2}+\sqrt{66}}{4}\right),$$

$$= 2\left(x + \frac{\sqrt{33}-5}{4}\right) \left(x - \frac{5+\sqrt{33}}{4}\right),$$

故答案为: $2\left(x + \frac{\sqrt{33}-5}{4}\right) \left(x - \frac{5+\sqrt{33}}{4}\right)$.

8. $x^2 - x = 0$ 的根为_____.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = 1$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程, 通过因式分解法求解方程即可, 选择合适的方法进行计算是解此题的关键.

【详解】 解: $\because x^2 - x = 0,$

$$\therefore x(x-1)=0,$$

$$\therefore x=0 \text{ 或 } x-1=0,$$

$$\therefore x_1=0, \quad x_2=1,$$

故答案为: $x_1=0, \quad x_2=1$.

9. 请写出一个无理数, 使它的值在 5 和 6 之间: _____. (写出一个即可)

【答案】 $\sqrt{26}$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题考查了估算无理数, 根据无理数的估算求解即可.

【详解】 解: $\because \sqrt{25}=5, \sqrt{36}=6, \quad \sqrt{25}<\sqrt{26}<\sqrt{36},$

$$\therefore 5<\sqrt{26}<6,$$

故答案为: $\sqrt{26}$.

10. 一元二次方程 $x^2+6x+4=0$ 配方得_____.

【答案】 $(x+3)^2=5$

【解析】

【分析】 本题考查了配方法, 熟练掌握配方法是解题的关键. 先把常数项移项, 然后在方程两边加上一次项系数一半的平方, 即可解答.

【详解】 解: $x^2+6x+4=0$

$$x^2+6x=-4$$

$$x^2+6x+9=-4+9$$

$$(x+3)^2=5.$$

故答案为: $(x+3)^2=5$.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边, 下列条件能判断 $\triangle ABC$ 是直角三角形的是 _____.

① $\angle A-\angle B=\angle C$; ② $\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$; ③ $(b+c)(b-c)=a^2$; ④ $a=1, \quad b=\sqrt{2}, \quad c=3$

【答案】 ①②③

【解析】

【分析】 本题考查勾股定理的逆定理，三角形内角和定理。根据直角三角形的判定方法，逐一用勾股定理的逆定理和三角形内角和定理分析各选项是否存在 90° 角即可判断①、②、③；根据三角形三边关系即可判断④。

【详解】 解：① $\angle A - \angle B = \angle C$ ，结合内角和得 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，
由 $\angle A + \angle B + \angle A - \angle B = 180^\circ$ ，解得 $\angle A = 90^\circ$ ，
 $\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形；

② $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$ ，则最大角 $\angle C = \frac{3}{1+2+3} \times 180^\circ = 90^\circ$ ，
 $\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形；

③ $(b+c)(b-c) = a^2$ ，展开得 $b^2 - c^2 = a^2$ ，即 $b^2 = a^2 + c^2$ ，
 $\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形；

④ $a = 1$ ， $b = \sqrt{2}$ ， $c = 3$ ， $\because 1 + \sqrt{2} < 3$ ，
 $\therefore a + b < c$ ，
 $\therefore$ 不能构成三角形；

综上，能判断 $\triangle ABC$ 是直角三角形的是①②③。

故答案为：①②③。

12. 如果 $\sqrt{2x-6}$ 与 $\sqrt{2+y}$ 互为相反数，那么 $x^2 + y$ 的算术平方根是_____。

【答案】 $\sqrt{7}$

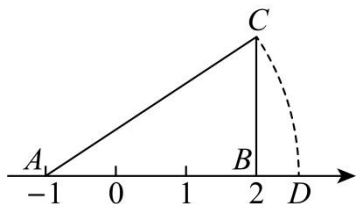
【解析】

【分析】 本题考查了算术平方根的非负性，求一个数的算术平方根等知识。先根据 $\sqrt{2x-6}$ 与 $\sqrt{2+y}$ 互为相反数，求出 $x = 3, y = -2$ ，进而得到 $x^2 + y = 3^2 + (-2) = 7$ ，即可求出 $x^2 + y$ 的算术平方根是 $\sqrt{7}$ 。

【详解】 解： $\because \sqrt{2x-6}$ 与 $\sqrt{2+y}$ 互为相反数，
 $\therefore \sqrt{2x-6} + \sqrt{2+y} = 0$ ，
 $\therefore 2x-6 = 0, 2+y = 0$ ，
 $\therefore x = 3, y = -2$ ，
 $\therefore x^2 + y = 3^2 + (-2) = 7$ ，

$\therefore x^2 + y$ 的算术平方根是 $\sqrt{7}$.

13. 如图, 数轴上点 A 表示的数是 -1 , 点 B 表示的数是 2 , $CB \perp AB$ 于点 B , 且 $BC = 2$, 以点 A 为圆心, AC 为半径在点 A 右侧画弧交数轴于点 D , 则点 D 表示的数是_____.



【答案】 $\sqrt{13}-1$ ## $-1+\sqrt{13}$

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理, 以及数轴上的点与实数的一一对应的关系, 解题的关键是勾股定理求出 AC 的长.

根据题意得 $AB = 3$, $BC = 2$, $\angle CBA = 90^\circ$, 则 $\triangle CBA$ 是直角三角形, 根据勾股定理得 AC 的长, 得 $OD = AD - AO$, 即可得.

【详解】 解: 由题意得, $AB = 3$, $BC = 2$,

$\therefore CB \perp AB$,

$\therefore \angle CBA = 90^\circ$,

$\therefore \triangle CBA$ 是直角三角形,

即 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$,

$\therefore AD = AC = \sqrt{13}$,

$\therefore OD = AD - 1 = \sqrt{13} - 1$,

即点 D 表示的数为: $\sqrt{13} - 1$,

故答案为: $\sqrt{13} - 1$.

14. 据统计: 2025 年南汇新城镇发放临港惠民消费券, 带动消费约 11 亿元, “11 亿” 用科学记数法表示为_____. (1 亿 = 100000000)

【答案】 1.1×10^9

【解析】

【分析】 本题考查的知识点是科学记数法, 解题关键是熟练掌握科学记数法的定义.

将 “11 亿” 转换为数值 1100000000, 再写成科学记数法形式 $a \times 10^n$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数.

【详解】解：11 亿 $= 11 \times 100000000 = 1100000000 = 1.1 \times 10^9$,

故答案为： 1.1×10^9 .

15. 俗语有云：“一天不练手脚慢，两天不练丢一半，三天不练门外汉，四天不练瞪眼看。”其意思是知识和技艺在学习后，如果不及时复习，那么学习过的东西就会被遗忘. 假设每天“遗忘”的百分比是一样的，根据“两天不练丢一半”，则每天“遗忘”的百分比约为_____. (参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.414$)

【答案】 29.3%

【解析】

【分析】本题通过设每天“遗忘”的百分比为 x ，依据“两天不练丢一半”这一条件建立一元二次方程，求解方程并结合实际意义确定 x 的值. 本题主要考查一元二次方程在实际问题中的应用，熟练掌握根据等量关系列一元二次方程并求解是解题的关键.

【详解】解：设每天“遗忘”的百分比为 x ，由题意得

$$(1-x)^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \quad (x_2 > 1, \text{ 不符合题意, 舍去}).$$

$$\therefore \frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0.293 = 29.3\%,$$

$\therefore$ 每天“遗忘”的百分比约为 29.3% .

故答案为： 29.3% .

16. 若 m, n 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两个实数根，则 $2m^2 + 4n^2 - 4n + 2025$ 的值为_____.

【答案】 2039

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程根与系数的关系及根的概念，解题的关键是整体思想的应用. 由 m, n 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两个实数根可得： $m^2 = 2m + 1, n^2 = 2n + 1, m + n = 2$ ，代入所求式子即可得到答案.

【详解】解： $\because m, n$ 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两个实数根，

$$\therefore m^2 - 2m - 1 = 0, n^2 - 2n - 1 = 0, m + n = 2,$$

$$\therefore m^2 = 2m + 1, n^2 = 2n + 1,$$

$$\therefore 2m^2 + 4n^2 - 4n + 2025$$

$$= 2(2m+1) + 4(2n+1) - 4n + 2025$$

$$= 4m + 2 + 8n + 4 - 4n + 2025$$

$$= 4m + 4n + 2031$$

$$= 4 \times 2 + 2031$$

$$= 2039,$$

故答案为：2039.

17. 等腰三角形一腰上的高等于该三角形某一条边的长度的一半，则其顶角等于_____.

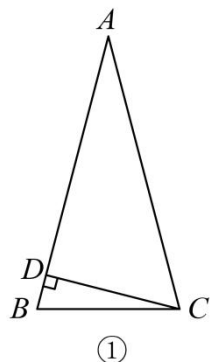
【答案】 30° 或 120° 或 150°

【解析】

【分析】本题考查了直角三角形 30° 角所对的直角边等于斜边的一半的性质，等腰三角形两底角相等的性质，熟记性质并求出顶角和底角的度数是解题的关键.

首先根据题意作图，然后分别从等腰三角形一腰上的高在内部与在外部去分析，根据直角三角形中，如果直角边是斜边的一半，则此直角边所对的角是 30° 角，再由等边对等角的知识，即可求得这个三角形的顶角.

【详解】解：如图①：



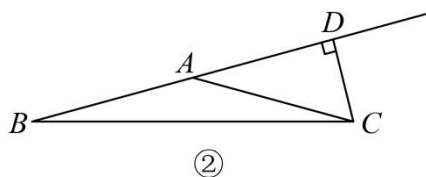
$$\because CD \perp AB,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\because CD = \frac{1}{2} AC,$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ,$$

如图②：



$$\because CD \perp AB,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\because CD = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore \angle CAD = 30^\circ,$$

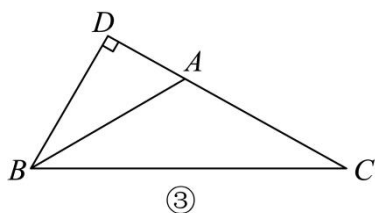
$$\therefore \angle DAC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$$\because AB = AC, \angle B + \angle ACB = \angle CAD,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACB = 30^\circ \div 2 = 15^\circ,$$

$$\text{则 } \angle BAC = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ;$$

如图③,



$$\because BD \perp CD, \quad BD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \angle C = 30^\circ,$$

$$\because AB = AC,$$

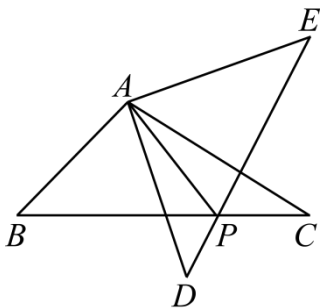
$$\therefore \angle ABC = \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$$

$$\therefore \text{这个三角形的顶角为: } 30^\circ \text{ 或 } 120^\circ \text{ 或 } 150^\circ$$

故答案为: 30° 或 120° 或 150°

18. 如图, 已知 ABC , $\angle ABC < 60^\circ$, 将 ABC 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 ADE , DE 与 BC 交于点 P .



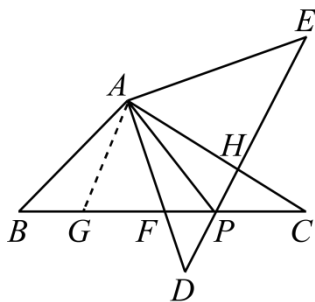
下列结论: ① $\angle EPC = 60^\circ$; ② $ED \perp AC$; ③ $PA + PC = PE$; ④ PA 平分 $\angle BPE$. 其中正确的是 _____. (填序号)

【答案】 ①③④

【解析】

【分析】 本题主要考查利用旋转的性质求解相关角度和线段关系. 其中 $\angle EPC = 60^\circ$ 是很容易确定的, 利用三角形内角和可以确定①是对的; ②如果 $ED \perp AC$, 则 $\angle AHE = 90^\circ$, 得到 $\angle E = 30^\circ$, 而 $\angle C$ 的大小无法确定, 故无法确定 $ED \perp AC$; 证明 $PA + PC = PE$ 需要构造等边三角形, 证明全等转移线段长, 即证明 $\triangle AGP$ 为等边三角形, 即可证明 $AP = GP$, 最后证明 $\triangle ABG \cong \triangle ADP$ (SAS), 即可证明③是对的; ④通过第③的全等可直接证明 $\angle APE = \angle BPA = 60^\circ$, 所有④也是正确的.

【详解】 解: 设 AD 交 BC 于点 F ,



由旋转的性质可得: $\angle B = \angle D$, $\angle C = \angle E$, $\angle BAD = \angle CAE = 60^\circ$, $AE = AC$,

$$\therefore \angle B + \angle BAD = \angle D + \angle BPD,$$

$$\therefore \angle BPD = \angle BAD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EPC = \angle BPD = 60^\circ, \text{ 故①正确;}$$

设 DE 交 AC 于点 H ,

$$\therefore \angle CAE = 60^\circ,$$

若 $ED \perp AC$, 则 $\angle AHE = 90^\circ$,

$$\therefore \angle E = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC < 60^\circ, \angle C = \angle E, \text{ 而 } \angle C \text{ 的大小无法确定,}$$

$$\therefore ED \perp AC \text{ 不成立, 故②错误;}$$

在 BC 上截取 $BG = PD$,

由旋转的性质得: $\angle B = \angle D$, $BC = DE$, $AB = AD$, $\angle BAD = 60^\circ$,

$$\therefore CG = PE,$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADP \text{ (SAS),}$$

$$\therefore AG = AP, \angle BAG = \angle DAP,$$

$$\therefore \angle BAG + \angle DAG = \angle DAP + \angle DAG,$$

$$\text{即 } \angle BAD = \angle GAP = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle APG$ 是等边三角形,

$\therefore AP = PG, \angle APB = 60^\circ,$

$\therefore AP + PC = PG + PC = CG = PE,$

故③正确;

$\therefore \angle EPC = 60^\circ,$

$\therefore \angle BPE = 120^\circ,$

$\therefore \angle APE = \angle APB = 60^\circ,$

$\therefore PA$ 平分 $\angle BPE,$

故④正确.

故答案为: ①③④.

三、简答题 (19-20 题, 每小问 5 分, 共 20 分, 21-22 题每题 6 分, 共 12 分)

19. 解方程:

(1) $x^2 - x - 1 = 0$

(2) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{16}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$

【答案】 (1) $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(2) $x = -5$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程, 解分式方程, 熟知解一元二次方程和解分式方程的方法是解题的关键.

(1) 利用公式法解方程即可;

(2) 先把原方程去分母化为整式方程, 再解方程并检验即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: $x^2 - x - 1 = 0$

$\therefore a = 1, b = -1, c = -1,$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0,$

$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$

解得 $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$;

【小问 2 详解】

解: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{16}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$

去分母得 $(x+2)^2 - 16 = x-2$,

去括号得 $x^2 + 4x + 4 - 16 = x - 2$,

化为一般式得 $x^2 + 3x - 10 = 0$,

$\therefore (x+5)(x-2) = 0$,

$\therefore x-2=0$ 或 $x+5=0$,

解得 $x=2$ 或 $x=-5$,

检验: 当 $x=-5$ 时, $(x+2)(x-2) \neq 0$, 则 $x=-5$ 是原方程的解,

当 $x=2$ 时, $(x+2)(x-2) = 0$, 则 $x=2$ 不是原方程的解,

综上所述, 原方程的解为 $x=-5$.

20. 计算:

(1) $(2-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{27}-\sqrt{12}) \div \sqrt{3}$

(2) $\sqrt{8x} - 2\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{0.5x} (x \geq 0)$

【答案】(1) $8-4\sqrt{3}$

(2) $\frac{3\sqrt{2x}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算,

(1) 根据二次根式的混合运算法则计算即可;

(2) 先把二次根式化为最简二次根式, 再根据二次根式加减法法则计算即可.

【小问 1 详解】

解: $(2-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{27}-\sqrt{12}) \div \sqrt{3}$

$$= 4 - 4\sqrt{3} + 3 + (3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) \div \sqrt{3}$$

$$= 7 - 4\sqrt{3} + \sqrt{3} \div \sqrt{3}$$

$$= 7 - 4\sqrt{3} + 1$$

$$= 8 - 4\sqrt{3};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \sqrt{8x} - 2\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{0.5x}$$

$$= 2\sqrt{2x} - \sqrt{2x} + \frac{1}{2}\sqrt{2x}$$

$$= \frac{3\sqrt{2x}}{2}.$$

21. 已知 $2x-1$ 的算术平方根是 3, $2y+3$ 的立方根是 -1 , 求 $x-y$ 的平方根.

【答案】 $\pm\sqrt{7}$

【解析】

【分析】 本题考查了平方根, 立方根, 根据定义计算即可.

【详解】 解: $\because 2x-1$ 的算术平方根是 3,

$$\therefore 2x-1=9,$$

$$\text{解得: } x=5,$$

$$\because 2y+3 \text{ 的立方根是 } -1,$$

$$\therefore 2y+3=-1,$$

$$\text{解得: } y=-2,$$

$$\therefore x-y=5-(-2)=7$$

$$\therefore x-y \text{ 的平方根是 } \pm\sqrt{7}.$$

22. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若该方程的两个实数根的平方和为 21, 求 m 的值.

【答案】(1) $m > -\frac{5}{4}$

(2) $m = \sqrt{10} - 1$

【解析】

【分析】本题考查根的判别式，方程的解，解一元二次方程.

(1) 根据方程有两个不相等的实数根，得到判别式大于 0，进行求解即可；

(2) 利用一元二次方程的根与系数的关系，得到关于 m 的一元二次方程，进行求解即可.

【小问 1 详解】

根据题意，得 $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2-1) > 0$,

解得 $m > -\frac{5}{4}$.

【小问 2 详解】

解：设 $x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1 = 0$ 的两个根分别为 a, b ,

$$\therefore a+b = -2m-1, ab = m^2-1,$$

$\therefore$ 该方程的两个实数根的平方和为 21，即 $a^2 + b^2 = 21$,

$$\therefore (a+b)^2 - 2ab = 21,$$

$$\therefore (-2m-1)^2 - 2(m^2-1) = 21,$$

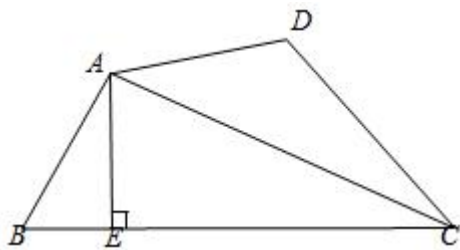
解得： $m = -\sqrt{10} - 1$ 或 $m = \sqrt{10} - 1$,

$$\therefore m > -\frac{5}{4},$$

$$\therefore m = \sqrt{10} - 1.$$

四、解答题 (第 23-24 题每题 8 分，共 16 分，25 题 10 分)

23. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB=AD$ ， $BC>CD$ ， AC 平分 $\angle BCD$ ，过点 A 作 $AE \perp BC$ ，垂足为点 E .



(1) 求证： $CE = CD + BE$;

(2) 如果 $CE=3BE$, 求 $S_{\triangle ABC}: S_{\triangle ACD}$ 的值.

【答案】(1) 证明见详解;

(2) $S_{\triangle ABC}: S_{\triangle ACD}=2:1$.

【解析】

【分析】(1) 过点 A 作 $AF \perp CD$ 交 CD 延长线于 F , 先根据 AC 平分 $\angle BCD$, $AE \perp BC$, $AF \perp CD$, 得出 $AE=AF$, $\angle AEB=\angle AFD=90^\circ$, 再证 $Rt\triangle ABE \cong Rt\triangle ADF$ (HL), 得出 $BE=DF$, 然后证明 $Rt\triangle ACE \cong Rt\triangle ACF$ (HL) 即可;

(2) 先求出 $BC=4BE$, $CD=2BE$, 然后 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC \times AE = 2BE \times AE$, $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}CD \times AF = BE \times AE$ 即可.

【小问 1 详解】

证明: 过点 A 作 $AF \perp CD$ 交 CD 延长线于 F ,

$\because AC$ 平分 $\angle BCD$, $AE \perp BC$, $AF \perp CD$,

$\therefore AE=AF$, $\angle AEB=\angle AFD=90^\circ$,

在 $Rt\triangle ABE$ 和 $Rt\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} AB = AD \\ AE = AF \end{cases},$$

$\therefore Rt\triangle ABE \cong Rt\triangle ADF$ (HL),

$\therefore BE=DF$,

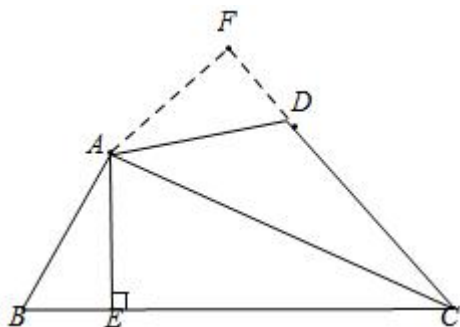
在 $Rt\triangle ACE$ 和 $Rt\triangle ACF$ 中,

$$\begin{cases} AC = AC \\ AE = AF \end{cases},$$

$\therefore Rt\triangle ACE \cong Rt\triangle ACF$ (HL),

$\therefore CE=CF$,

$\therefore CE=CF=CD+DF=CD+BE$;



【小问 2 详解】

解: $BC=BE+EC=BE+3BE=4BE$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 4BE \cdot AE = 2BE \cdot AE,$$

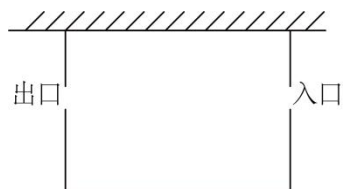
$$\therefore CD=CF-FD=CE-BE=3BE-BE=2BE,$$

$$\therefore S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} CD \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot 2BE \cdot AE = BE \cdot AE,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} : S_{\triangle ADC} = 2BE \cdot AE : BE \cdot AE = 2 : 1.$$

【点睛】 本题考查角平分线性质，三角形全等判定与性质，三角形面积，线段和差倍分，掌握角平分线性质，三角形全等判定与性质，三角形面积，线段和差倍分是解题关键.

24. 如图，某艺术中心准备用 26 米长的墙为一边，用 48 米隔栏绳为另三边，设立一个面积为 300 平方米的长方形等候区，为了方便群众进出，在两边空出两个各为 1 米的出入口（出入口不用隔栏绳）. 假设这个长方形平行于墙的一边为长，垂直于墙的一边为宽，那么围成的这个长方形的长与宽分别是多少米？



【答案】 长方形的长为 20 米，宽为 15 米

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的应用，设这个长方形的长为 x 米，则宽为 $\frac{1}{2}(48-x)+1=25-\frac{1}{2}x$ ，然后根据长方形的面积是 300 平方米列出方程求解即可得到答案. 解题的关键在于能够根据题意列出方程进行求解.

【详解】 解：设这个长方形的长为 x 米，则宽为 $\frac{1}{2}(48-x)+1=\left(25-\frac{1}{2}x\right)$ 米，

由题意得： $x\left(25-\frac{1}{2}x\right)=300$ ，即 $x^2-50x+600=0$ ，

解得 $x=20$ 或 $x=30$ ，

$\therefore$ 平行于墙的一边为长，墙长为 26 米，

$\therefore$ 长方形的长不能超过 26 米，

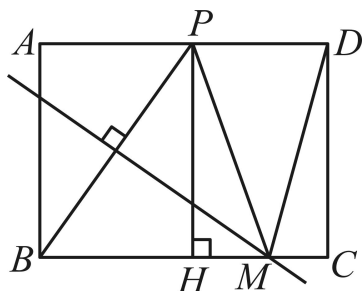
$\therefore x=20$ ，

$$\therefore 25-\frac{1}{2}x=15,$$

$\therefore$ 长方形的长为 20 米，宽为 15 米.

答：长方形的长为 20 米，宽为 15 米.

25. 如图，在长方形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 8$ ，点 P 是边 AD 上的一个动点，连接 BP ，作 BP 的中垂线交边 BC 于点 M .



- (1) 设 $AP = x$ ， $BM = y$ ，用含 x 的代数式表示 y ；
- (2) 过点 P 作 $PH \perp BC$ 于点 H ，若 $MH = 1$ ，求 AP 的长；
- (3) 连接 PM ， MD ，若 $\triangle PMD$ 是以 PM 为腰的等腰三角形，求 AP 的长.

【答案】(1) $y = \frac{x^2 + 36}{2x}$

(2) AP 的长为 $1 + \sqrt{37}$ 或 $-1 + \sqrt{37}$

(3) AP 的长为 $\frac{9}{2}$

【解析】

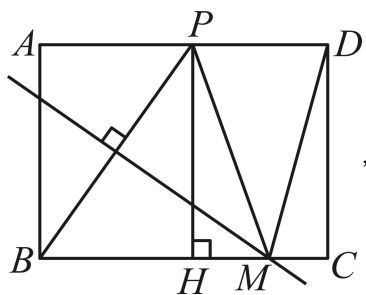
【分析】(1) 证明四边形 $ABHP$ 为长方形，得出 $PH = AB = 6$ ， $BH = AP = x$ ，由线段垂直平分线的性质可得 $PM = BM = y$ ，从而得出 $HM = |y - x|$ ，在 $\text{Rt}\triangle PHM$ 中，再由勾股定理计算即可得出结果；

(2) 由 (1) 可得 $PH = AB = 6$ ， $BH = AP = x$ ， $HM = |y - x| = 1$ ，从而得出 $y = x + 1$ 或 $y = x - 1$ ，再分两种情况：当 $y = x + 1$ 时；当 $y = x - 1$ 时，分别代入 $y = \frac{x^2 + 36}{2x}$ ，计算即可得出结果；

(3) 分两种情况：当 $PM = MD$ 时，此时 $PM = y$ ， $MD = \sqrt{(8 - y)^2 + 6^2}$ ；当 $PM = PD$ 时，此时 $PD = 8 - x$ ， $PM = y$ ，分别求解即可.

【小问 1 详解】

解：如图，



∵ 四边形 $ABCD$ 是长方形,

∴ $CD = AB = 6$, $AD = BC = 8$, $\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$,

∵ $PH \perp BC$,

∴ $\angle PHB = \angle PHC = \angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$,

∴ 四边形 $ABHP$ 为长方形,

∴ $PH = AB = 6$, $BH = AP = x$,

∵ 作 BP 的中垂线交边 BC 于点 M ,

∴ $PM = BM = y$,

∴ $HM = |y - x|$,

在 $\text{Rt}\triangle PHM$ 中, $HM^2 + PH^2 = PM^2$,

∴ $(|y - x|)^2 + 6^2 = y^2$,

∴ $y^2 + x^2 - 2xy + 6^2 = y^2$,

∴ $y = \frac{x^2 + 36}{2x}$;

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 可得: $PH = AB = 6$, $BH = AP = x$, $HM = |y - x| = 1$,

∴ $y = x + 1$ 或 $y = x - 1$,

当 $y = x + 1$ 时, 代入 $y = \frac{x^2 + 36}{2x}$ 得 $x + 1 = \frac{x^2 + 36}{2x}$,

化简可得: $x^2 + 2x - 36 = 0$,

解得: $x = -1 + \sqrt{37}$ 或 $x = -1 - \sqrt{37}$ (不符合题意, 舍去),

∴ $x = -1 + \sqrt{37}$,

当 $y = x - 1$ 时, 代入 $y = \frac{x^2 + 36}{2x}$ 得 $x - 1 = \frac{x^2 + 36}{2x}$,

整理可得: $x^2 - 2x - 36 = 0$,

解得: $x = 1 + \sqrt{37}$ 或 $x = 1 - \sqrt{37}$ (不符合题意, 舍去),

$\therefore x = 1 + \sqrt{37}$;

综上所述, AP 的长为 $1 + \sqrt{37}$ 或 $-1 + \sqrt{37}$;

【小问 3 详解】

解: $\because \triangle PMD$ 是以 PM 为腰的等腰三角形,

$\therefore$ 当 $PM = MD$ 时, 此时 $PM = y$, $MD = \sqrt{MC^2 + CD^2} = \sqrt{(8 - y)^2 + 6^2}$,

$\therefore y^2 = (8 - y)^2 + 6^2$,

整理可得: $16y = 100$,

解得: $y = \frac{25}{4}$,

将 $y = \frac{25}{4}$ 代入 $y = \frac{x^2 + 36}{2x}$ 可得: $\frac{x^2 + 36}{2x} = \frac{25}{4}$,

化简可得: $2x^2 - 25x + 72 = 0$,

解得: $x = 8$ (此时点 P 与点 D 重合, 不符合题意, 舍去) 或 $x = \frac{9}{2}$,

$\therefore AP = \frac{9}{2}$;

当 $PM = PD$ 时, 此时 $PD = 8 - x$, $PM = y$,

$\therefore y = 8 - x$,

代入 $y = \frac{x^2 + 36}{2x}$ 可得: $\frac{x^2 + 36}{2x} = 8 - x$,

化简可得: $3x^2 - 16x + 36 = 0$,

$\therefore \Delta = (-16)^2 - 4 \times 3 \times 36 = -176 < 0$,

$\therefore$ 此方程无解;

综上所述, AP 的长为 $\frac{9}{2}$.

【点睛】 本题考查了等腰三角形的判定与性质、线段垂直平分线的性质、勾股定理，熟练掌握以上知识点并灵活运用，采用分类讨论的思想是解此题的关键.