

尚德实验学校 2025 学年初二年级 10 月阶段素养测评

一、单选题（每题 2 分，共 12 分）

1. 下列实数中，属于无理数的是（ ）

- A. $\sqrt{2}$ B. 0.4 C. 0 D. -1

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了无理数，无理数是指无限不循环小数。根据无理数的定义判断各选项是否为无限不循环小数。

【详解】解：选项 A： $\sqrt{2}$ 是开方不尽的数，无法表示为分数，属于无理数。

选项 B：0.4 是有限小数，可写为 $\frac{2}{5}$ ，属于有理数。

选项 C：0 是整数，属于有理数。

选项 D：-1 是整数，属于有理数。

故选：A。

2. 下列计算正确的是（ ）

- A. $\sqrt{a^2} = a$ B. $\sqrt{(-a)^2} = \pm a$ C. $\sqrt{a^4} = a^2$ D. $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查二次根式的性质，注意区分： $(\sqrt{a})^2 = a$ 和 $\sqrt{a^2} = |a|$ 是解题的关键。

根据二次根式的性质、绝对值的定义逐个选项判断即可。

【详解】A. $\sqrt{a^2} = |a|$ ，选项错误，不符合题意；

B. $\sqrt{(-a)^2} = |a|$ ，选项错误，不符合题意；

C. $\sqrt{a^4} = a^2$ ，选项正确，符合题意；

D. $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = |a| + |b|$ ，选项错误，不符合题意；

故选：C。

3. 下列各式中，与 $\sqrt{2a}$ 是同类二次根式的是（ ）

A. $2\sqrt{a}$

B. $\sqrt{\frac{1}{a}}$

C. $\sqrt{8a}$

D. $\sqrt{2a^2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了同类二次根式，利用二次根式的性质化简等知识点，熟练掌握同类二次根式的定义是解题的关键：把几个二次根式化为最简二次根式后，如果它们的被开方数相同，那么这几个二次根式叫做同类二次根式．利用二次根式的性质把各个二次根式化简，再根据同类二次根式的定义判断即可．

【详解】解：A. $2\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{2a}$ 不是同类二次根式，故选项A不符合题意；

B. $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ ，与 $\sqrt{2a}$ 不是同类二次根式，故选项B不符合题意；

C. $\sqrt{8a} = \sqrt{4 \times 2a} = 2\sqrt{2a}$ ，与 $\sqrt{2a}$ 是同类二次根式，故选项C符合题意；

D. $\sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$ ，与 $\sqrt{2a}$ 不是同类二次根式，故选项D不符合题意；

故选：C．

4. 若 $\sqrt{\frac{1}{x-2}}$ 有意义，则 x 的取值范围是（ ）

A. $x \geq 2$

B. $x \geq -2$

C. $x > 2$

D. $x > -2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查二次根式有意义的条件，分式有意义的条件，要使表达式 $\sqrt{\frac{1}{x-2}}$ 有意义，需满足根号内的值非负且分母不为零，由此列式求解即可．

【详解】解：根据题意， $\frac{1}{x-2} \geq 0$ ， $x-2 \neq 0$ ，

$\therefore x$ 的取值范围为 $x > 2$ ，

故选：C．

5. 下列说法正确的是（ ）

A. $\sqrt{9}$ 的算术平方根是 3

B. 16 的平方根是 -4

C. 0 的算术平方根是 0

D. 0.1 的立方根是 0.001

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查平方根、算术平方根和立方根的概念. 对于两个实数 a 、 b , 若满足 $a^2 = b$, 那么 a 就叫做 b 的平方根, 若 a 为非负数, 那么 a 就叫做 b 的算术平方根, 若满足 $a^3 = b$, 那么 a 就叫做 b 的立方根, 据此求解即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{9} = 3$ 的算术平方根是 $\sqrt{3}$, 原说法错误, 不符合题意;

B、16 的平方根是 ± 4 , 原说法错误, 不符合题意;

C、0 的算术平方根是 0, 原说法正确, 符合题意;

D、0.1 的立方根是 $\sqrt[3]{0.1}$, 不是 0.001, 原说法错误, 不符合题意;

故选: C.

6. 若最简二次根式 $\sqrt{a}$ 能与 $\sqrt{28}$ 合并, 则 a 可以是 ()

A. 4

B. 5

C. 7

D. 14

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查最简二次根式定义、合并同类二次根式、二次根式性质等知识, 先由 $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$, 再由 $\sqrt{a}$ 是最简二次根式, 可得 $a = 7$ 即可确定答案, 熟记最简二次根式定义、合并同类二次根式、二次根式性质是解决问题的关键.

【详解】解: $\because \sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$, $\sqrt{a}$ 是最简二次根式, 且最简二次根式 $\sqrt{a}$ 能与 $\sqrt{28}$ 合并,

$\therefore a = 7$,

故选: C.

二、填空题 (每题 2 分, 共 24 分)

7. $\sqrt{5} - 2$ 的相反数是_____.

【答案】 $2 - \sqrt{5}$

【解析】

【分析】根据相反数的定义解答即可.

【详解】 $\sqrt{5} - 2$ 的相反数是 $-(\sqrt{5} - 2) = 2 - \sqrt{5}$;

故答案为 $2 - \sqrt{5}$.

【点睛】此题考查相反数的定义, 解题关键在于掌握其定义.

8. $\sqrt[3]{-8}$ 的倒数是_____.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了倒数的定义和立方根的求法，先算出 $\sqrt[3]{-8}$ ，再求出倒数即可.

【详解】 解： $\frac{1}{\sqrt[3]{-8}} = -\frac{1}{2}$,

故答案为： $-\frac{1}{2}$.

9. 如果一个实数的平方根与它的立方根相等，则这个数是_____.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题考查了平方根和立方根，掌握的平方根和立方根的定义是解题的关键.

根据平方根和立方根的定义即可求解.

【详解】 解： 设这个实数为 x ,

当 $x=0$ 时，它的平方根是 0，立方根是 0，二者相等，符合题意；

当 $x=1$ 时，它的平方根是 ± 1 ，立方根是 1，不符合题意；

综上，这个数是 0.

故答案为： 0.

10. 若 $\sqrt{(x-2)^2} = 2-x$ ，则 x 的取值范围为_____.

【答案】 $x \leq 2$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的性质，解题的关键是熟练运用二次根式的性质，本题属于基础题.

根据二次根式的性质列出不等式即可求出答案.

【详解】 解： 由题意可知： $x-2 \leq 0$,

$\therefore x \leq 2$

故答案为： $x \leq 2$.

11. 比较大小： $3\sqrt{2}$ _____ $2\sqrt{3}$ (填 “>”， “<”， “=”).

【答案】 >

【解析】

【分析】 本题主要考查了实数的大小比较，利用平方法将无理数的大小转化为有理数的大小比较成为解题的关键.

将无理数的大小转化为有理数的大小比较即可.

【详解】 解: $\because (3\sqrt{2})^2 = 18, (2\sqrt{3})^2 = 12, 18 > 12,$

$\therefore 3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}.$

12. 在全球范围内，我国北斗卫星导航系统的授时精度优于 0.00000002s ，用科学记数法表示 0.00000002 为_____.

【答案】 2×10^{-8}

【解析】

【分析】 本题主要考查了用科学记数法表示较小的数，掌握形式为 $a \times 10^{-n}$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ 是关键.

用科学记数法表示较小的数，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

【详解】 解: $0.00000002 = 2 \times 10^{-8},$

故答案为: $2 \times 10^{-8}.$

13. $\sqrt{2} - 3$ 的有理化因式是_____

【答案】 $\sqrt{2} + 3$

【解析】

【分析】 一般二次根式的有理化因式是符合平方差公式的特点的式子，据此解答即可.

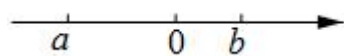
【详解】 一般二次根式的有理化因式是符合平方差公式的特点的式子

$\therefore \sqrt{2} - 3$ 的有理化因式是 $\sqrt{2} + 3$

故答案为 $\sqrt{2} + 3$

【点睛】 本题考查二次根式的有理化因式，熟练掌握平方差公式是解题关键.

14. 实数 a, b 在数轴上的对应点如图所示，则 $|a-b| - \sqrt{a^2} =$ _____.



【答案】 b

【解析】

【分析】根据数轴得出 $a < 0 < b$ ，即可知 $a - b < 0$ ，根据绝对值的性质和二次根式的性质即可化简原式.

【详解】解：根据数轴得： $a < 0$ ， $b > 0$ ，

$$\therefore a - b < 0,$$

$$\therefore |a - b| - \sqrt{a^2} = -(a - b) + a = -a + b + a = b;$$

故答案为： b .

【点睛】本题主要考查实数和数轴、二次根式的性质和绝对值的性质，熟练掌握二次根式的性质： $\sqrt{a^2} = |a|$ 是解题的关键.

15. 已知 $\sqrt{18n}$ 是正整数，则正整数 n 的最小值是 ____ .

【答案】 2

【解析】

【分析】本题考查的知识点是二次根式的性质与化简，解题关键是将 $\sqrt{18n}$ 分解成一个完全平方数和一个代数式的积的形式. 将 $\sqrt{18n}$ 分解成 $3\sqrt{2n}$ ，则 $2n$ 是完全平方数，即可求得满足条件的最小正整数.

【详解】解： $\because \sqrt{18n} = \sqrt{9 \times 2n} = 3\sqrt{2n}$ 是正整数，

即 $2n$ 是完全平方数，

$\therefore$ 正整数 n 的最小值是 2 .

故答案为： 2 .

16. 已知 $a + b = -8$, $ab = 6$ ，则 $b\sqrt{\frac{b}{a}} + a\sqrt{\frac{a}{b}} =$ _____ .

【答案】 $-\frac{26\sqrt{6}}{3}$

【解析】

【分析】本题考查二次根式的运算，解题的关键是掌握二次根式的混合运算，分母有理化，完全平方公式，进行解答，即可.

【详解】解： $\because a + b = -8 < 0$ ， $ab = 6 > 0$ ，

$$\therefore a < 0, \quad b < 0,$$

$$\therefore b\sqrt{\frac{b}{a}} + a\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\begin{aligned}
&= b\sqrt{\frac{ab}{a^2}} + a\sqrt{\frac{ab}{b^2}} \\
&= -\frac{b\sqrt{ab}}{a} - \frac{a\sqrt{ab}}{b} \\
&= -\frac{b^2\sqrt{ab}}{ab} - \frac{a^2\sqrt{ab}}{ab} \\
&= -\sqrt{ab} \times \frac{b^2 + a^2}{ab} \\
&= -\sqrt{ab} \times \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} \\
&= -\sqrt{6} \times \frac{(-8)^2 - 2 \times 6}{6} \\
&= -\frac{26\sqrt{6}}{3}.
\end{aligned}$$

故答案为: $-\frac{26\sqrt{6}}{3}$.

17. 已知 $a > 0$, 那么 $\sqrt{\frac{-a}{b}}$ 可化简为_____.

【答案】 $-\frac{\sqrt{-ab}}{b}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的化简, 熟练掌握二次根式有意义的条件是解题的关键, 根据题意得到 $b < 0$, 再根据二次根式的性质化简即可.

【详解】 解: $\because a > 0$, 且 $\sqrt{\frac{-a}{b}}$ 有意义,

$$\therefore \frac{-a}{b} \geq 0,$$

$$\therefore b < 0,$$

$$\therefore \sqrt{\frac{-a}{b}} = \sqrt{\frac{-a \cdot b}{b \cdot b}} = \sqrt{\frac{-ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{-ab}}{|b|} = \frac{\sqrt{-ab}}{-b} = -\frac{\sqrt{-ab}}{b},$$

故答案为: $-\frac{\sqrt{-ab}}{b}$.

18. 我们根据二次根式的相关知识容易知道: $\sqrt{2\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{3\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{4\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$, 类比上述式子,

若 $\sqrt{9\frac{9}{n}}=9\sqrt{\frac{9}{n}}$, 则 $n=$ _____.

【答案】 80

【解析】

【分析】 本题考查二次根式中的规律探究, 根据已有等式, 得到 $\sqrt{(m+1)\frac{m+1}{(m+1)^2-1}}=(m+1)\sqrt{\frac{m+1}{(m+1)^2-1}}$,

进而求解即可.

【详解】 解: $\because \sqrt{2\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{3\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{4\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}, \dots,$

$$\therefore \sqrt{(m+1)\frac{m+1}{(m+1)^2-1}}=(m+1)\sqrt{\frac{m+1}{(m+1)^2-1}},$$

$$\therefore m+1=9,$$

$$\therefore m=8,$$

$$\therefore n=(m+1)^2-1=(8+1)^2-1=80,$$

故答案为: 80.

三、解答题 (30+4+4+5+5+5+5+6)

19. 计算:

$$(1) 3\sqrt{3}-2\sqrt{12}+\sqrt{48}$$

$$(2) \frac{2}{3}\sqrt{9x}+6\sqrt{\frac{x}{4}}-2x\sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$(3) 3\sqrt{20}\times\frac{\sqrt{5}}{4}\div\sqrt{12}$$

$$(4) 2x\sqrt{\frac{1}{x}}\div 3\sqrt{4x^3}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{9x^4}$$

$$(5) -\sqrt{6}\div(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$(6) \sqrt{18} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 4\sqrt{\frac{1}{8}}$$

【答案】(1) $3\sqrt{3}$

$$(2) 3\sqrt{x}$$

$$(3) \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

$$(4) \frac{x}{6}$$

$$(5) -3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

$$(6) -3$$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算.

(1) 先化简各二次根式, 再计算加减即可;

(2) 先化简各二次根式, 再计算加减即可;

(3) 先化简各二次根式, 再计算乘除, 最后分母有理化即可;

(4) 先化简各二次根式, 再计算乘除即可;

(5) 将除法转换为乘法, 分母有理化后计算乘法即可;

(6) 先化简二次根式, 分母有理化, 再计算加减即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: 原式} = 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 3\sqrt{3};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: 原式} = 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 3\sqrt{x};$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: 原式} = 6\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{4} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{6 \times 5}{4 \times 2\sqrt{3}} = \frac{30}{8\sqrt{3}} = \frac{15}{4\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{4};$$

【小问 4 详解】

$$\text{解: 原式} = 2x \cdot \frac{\sqrt{x}}{x} \div (3 \cdot 2x\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{6} \cdot 3x^2$$

$$= 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{6x\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}x^2$$

$$= \frac{x}{6};$$

【小问 5 详解】

$$\text{解: 原式} = -\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{1}$$

$$= -\sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$= -\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}$$

$$= -\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$= -3\sqrt{2} - 2\sqrt{3};$$

【小问 6 详解】

$$\text{解: 原式} = 3\sqrt{2} - (3 + 2\sqrt{2}) - \sqrt{2}$$

$$= 3\sqrt{2} - 3 - 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$= -3.$$

$$20. \text{ 解方程: } \sqrt{3} - 2\sqrt{6}x = -2\sqrt{2}$$

【答案】

$$x = \frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{12}$$

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程.

通过移项将未知数项分离, 然后除以系数, 并有理化分母求解即可.

$$\text{【详解】 解: } \sqrt{3} - 2\sqrt{6}x = -2\sqrt{2}$$

$$\text{移项, 得 } -2\sqrt{6}x = -2\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$\text{两边同除以 } -2\sqrt{6}, \text{ 得 } x = \frac{-2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$$

有理化分母, 得 $x = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{(2\sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{6}}{12}$

化简分子, 得 $(2\sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{6} = 2\sqrt{12} + \sqrt{18} = 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

所以 $x = \frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{12}$.

21. 已知: $a = 2 + \sqrt{5}$, $b = 2 - \sqrt{5}$, 分别求下列代数式的值:

(1) $a^2 - b^2$;

(2) $a^2 + ab + b^2$.

【答案】(1) $8\sqrt{5}$;

(2) 17.

【解析】

【分析】本题考查二次根式的化简求值, 熟练掌握运算法则是解答本题的关键.

(1) 根据 $a = 2 + \sqrt{5}$, $b = 2 - \sqrt{5}$, 可以求得 $a + b$ 和 $a - b$ 的值, 然后将所求式子变形, 再将 $a + b$ 和 $a - b$ 的值代入计算即可;

(2) 根据 $a = 2 + \sqrt{5}$, $b = 2 - \sqrt{5}$, 可以求得 $a + b$ 和 ab 的值, 然后将所求式子变形, 再将 $a + b$ 和 ab 的值代入计算即可.

【小问 1 详解】

解: $\because a = 2 + \sqrt{5}$, $b = 2 - \sqrt{5}$,

$$\therefore a + b = 4, \quad a - b = 2\sqrt{5},$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 4 \times 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5};$$

【小问 2 详解】

解: $\because a = 2 + \sqrt{5}$, $b = 2 - \sqrt{5}$,

$$\therefore a + b = 4, \quad ab = -1,$$

$$\therefore a^2 + ab + b^2 = (a + b)^2 - ab = 4^2 - (-1) = 16 + 1 = 17.$$

22. 已知: 一个正数 a 的两个不同平方根分别是 $x + 5$ 和 $4x - 10$.

(1) 求 x 与 a 的值;

(2) 求 $a - 9$ 的立方根.

【答案】(1) x 的值为 1, a 的值为 36

(2) 3

【解析】

【分析】本题考查了立方根, 平方根, 熟练掌握相关定义是解题的关键.

(1) 根据一个正数的两个平方根互为相反数列等式求得 x 的值, 根据平方根的定义求原数即可;

(2) 根据立方根的定义求 $a-9$ 的立方根即可.

【小问 1 详解】

解: 由题意得 $(x+5)+(4x-10)=0$,

解得 $x=1$,

$$x+5=1+5=6,$$

$$\therefore a=6^2=36,$$

即 x 的值为 1, a 的值为 36;

【小问 2 详解】

$$\text{解: } a-9=36-9=27,$$

$$\therefore a-9 \text{ 的立方根为 } \sqrt[3]{27}=3.$$

$$23. \text{ 先化简再求值: } \frac{a^2-a-6}{a+2} - \frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}, \text{ 其中 } a = \frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

【答案】1

【解析】

【分析】本题主要考查了分式的化简求值, 根据 a 的大小化简 $\sqrt{a^2-2a+1}$ 是解题的关键. 先将分子和分母分解因式, 并根据二次根式的性质化简, 再约分, 最后代入计算即可.

$$\text{【详解】解: } \because a = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}$$

$$\therefore a-1=2-\sqrt{3}-1=1-\sqrt{3}<0$$

$$\text{原式} = \frac{(a-3)(a+2)}{a+2} - \frac{\sqrt{(a-1)^2}}{a(a-1)}$$

$$= a-3 - \frac{1-a}{a(a-1)}$$

$$= a - 3 + \frac{1}{a}$$

当 $a = 2 - \sqrt{3}$ 时

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2 - \sqrt{3} - 3 + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \\ &= 2 - \sqrt{3} - 3 + \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} \\ &= 2 - \sqrt{3} - 3 + 2 + \sqrt{3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

24. 已知 $4a+1$ 的一个平方根是 5, $-1-3b$ 的立方根是 2, c 是 $\sqrt{7}$ 的整数部分, 求 $3a-2b+6c$ 的平方根.

【答案】 ± 6

【解析】

【分析】 此题题目主要考查算术平方根及平方根, 估算算术平方根的整数部分, 求代数式的平方根, 熟练掌握这些基本运算是解题关键. 根据算术平方根及平方根确定 $a=6$, $b=-3$, 再由估算算术平方根的整数部分确定 $c=2$, 将其代入代数式, 然后计算平方根即可.

【详解】 解: $\because 4a+1$ 的算术平方根是 5,

$$\therefore 4a+1=25, \text{ 解得: } a=6.$$

$$\because -1-3b \text{ 的立方根是 } 2,$$

$$\therefore -1-3b=8,$$

$$\text{解得: } b=-3.$$

$$\because c \text{ 是 } \sqrt{7} \text{ 的整数部分, 而 } 2 < \sqrt{7} < 3,$$

$$\therefore c=2,$$

$$\therefore 3a-2b+6c$$

$$= 3 \times 6 - 2 \times (-3) + 6 \times 2$$

$$= 36,$$

$$\therefore 3a-2b+6c \text{ 的平方根为 } \pm 6.$$

25. 已知实数 x, y 满足 $y = \frac{\sqrt{16-x^2} + \sqrt{x^2-16} - 1}{x+4}$, 求 $\frac{7}{8}x+y$ 的立方根.

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件，分式有意义的条件.

根据二次根式有意义的条件，被开方数必须非负，从而得到 $x^2 = 16$ ，再结合分母不为零，得到 $x = 4$ ，进而求出 y 的值，然后计算代数式的值，最后求立方根.

【详解】 解： $\because$ 实数 x 、 y 满足 $y = \frac{\sqrt{16-x^2} + \sqrt{x^2-16} - 1}{x+4}$,

$$\therefore 16 - x^2 \geq 0 \text{ 且 } x^2 - 16 \geq 0,$$

$$\therefore x^2 \geq 16 \text{ 且 } x^2 \leq 16,$$

$$\therefore x^2 = 16,$$

$$\therefore x = \pm 4,$$

$$\because \text{分母 } x+4 \neq 0,$$

$$\therefore x \neq -4,$$

$$\therefore x = 4,$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{16-16} + \sqrt{16-16} - 1}{4+4} = \frac{0+0-1}{8} = -\frac{1}{8},$$

$$\therefore \frac{7}{8}x + y = \frac{7}{8} \times 4 + \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{28}{8} - \frac{1}{8} = \frac{27}{8},$$

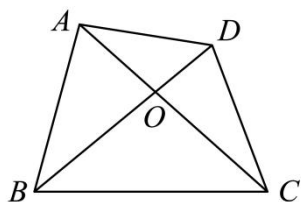
$$\therefore \frac{27}{8} \text{ 的立方根为 } \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{7}{8}x + y \text{ 的立方根为 } \frac{3}{2}.$$

26. 阅读材料：我们已经学习了实数以及二次根式的有关概念，同学们可以发现以下结果：

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, } \because a + \frac{1}{a} = (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + 2\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + 2,$$

$$\therefore \text{当 } \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ 即 } a = 1 \text{ 时, } a + \frac{1}{a} \text{ 的最小值为 } 2.$$



请利用以上结果解决下面的问题:

(1) 当 $a > 0$ 时, $a + \frac{4}{a}$ 的最小值为_____; 当 $a < 0$ 时, $a + \frac{4}{a}$ 的最大值为_____;

(2) 当 $a > 0$ 时, 求 $\frac{3a^2 + 4a + 5}{a}$ 的最小值;

(3) 如图, 已知四边形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 交于点 O , 若 $\triangle AOD$ 的面积为 2, $\triangle BOC$ 的面积为 3, 求四边形 $ABCD$ 面积的最小值.

【答案】 (1) 4; -4

(2) $4 + 2\sqrt{15}$

(3) $5 + 2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查的是完全平方公式的应用. 熟练掌握配方法, 完全平方的非负性, 二次根式的性质, 理解阅读部分的信息并灵活运用, 是解本题的关键.

(1) 当 $a > 0$ 时, 由 $a + \frac{4}{a} = \left(\sqrt{a} - \frac{2}{\sqrt{a}}\right)^2 + 4$, 可得 $a + \frac{4}{a}$ 的最小值, 当 $a < 0$ 时, 由 $-a - \frac{4}{a} = \left(\sqrt{-a} - \frac{2}{\sqrt{-a}}\right)^2 + 4$, 可得 $a + \frac{4}{a}$ 的最大值;

(2) 当 $a > 0$ 时, 由 $\frac{3a^2 + 4a + 5}{a} = 3\left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{5}{3a}}\right)^2 + 4 + 2\sqrt{15}$, 可得 $a = \frac{\sqrt{15}}{3}$ 时, $\frac{3a^2 + 4a + 5}{a}$ 的最小值是 $4 + 2\sqrt{15}$;

(3) 设 $S_{\triangle AOB}$ 的面积为 a , 根据 $S_{\triangle AOD} : S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD} : S_{\triangle COB}$, 得 $S_{\triangle COD} = \frac{6}{a}$. 可得四边形的面积 $2 + 3 + a + \frac{6}{a} = \left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{6}{a}}\right)^2 + 5 + 2\sqrt{6}$, 可得当 $a = \sqrt{6}$ 时, 四边形 $ABCD$ 的面积的最小值为: $5 + 2\sqrt{6}$.

【小问 1 详解】

解: 当 $a > 0$ 时,

$$\therefore a + \frac{4}{a} = (\sqrt{a})^2 - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \frac{2}{\sqrt{a}} + \left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \frac{2}{\sqrt{a}} = \left(\sqrt{a} - \frac{2}{\sqrt{a}}\right)^2 + 4,$$

$\therefore$ 当 $\sqrt{a} = \frac{2}{\sqrt{a}}$ 即 $a = 2$ 时, $a + \frac{4}{a}$ 的最小值为 4;

当 $a < 0$ 时,

$$\therefore a + \frac{4}{a} = -\left(-a - \frac{4}{a}\right),$$

$$\therefore -a - \frac{4}{a} = (\sqrt{-a})^2 - 2 \cdot \sqrt{-a} \cdot \frac{2}{\sqrt{-a}} + \left(\frac{2}{\sqrt{-a}}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{-a} \cdot \frac{2}{\sqrt{-a}} = \left(\sqrt{-a} - \frac{2}{\sqrt{-a}}\right)^2 + 4,$$

$$\therefore -\left(-a - \frac{4}{a}\right) = -\left(\sqrt{-a} - \frac{2}{\sqrt{-a}}\right)^2 - 4 \leq -4,$$

$\therefore$ 当 $\sqrt{-a} = \frac{2}{\sqrt{-a}}$, 即 $a = -2$ 时, $a + \frac{4}{a}$ 的最大值为 -4 ;

故答案为: 4; -4 ;

【小问 2 详解】

解: 当 $a > 0$ 时,

$$\therefore \frac{3a^2 + 4a + 5}{a} = 3a + 4 + \frac{5}{a} = 3\left(a + \frac{5}{3a}\right) + 4 = 3\left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{5}{3a}}\right)^2 + 4 + 2\sqrt{15},$$

$\therefore$ 当 $\sqrt{a} = \sqrt{\frac{5}{3a}}$, 即 $a = \frac{\sqrt{15}}{3}$ 时, $\frac{3a^2 + 4a + 5}{a}$ 的最小值是: $4 + 2\sqrt{15}$.

【小问 3 详解】

解: 设 $S_{\triangle AOB}$ 的面积为 a ,

$$\therefore S_{\triangle AOD} : S_{\triangle AOB} = OD : OB = S_{\triangle COD} : S_{\triangle COB},$$

$$\therefore 2 : a = S_{\triangle COD} : 3,$$

$$\therefore S_{\triangle COD} = \frac{6}{a}.$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 的面积: } 2 + 3 + a + \frac{6}{a} = \left(a + \frac{6}{a}\right) + 5 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{6}{a}}\right)^2 + 5 + 2\sqrt{6},$$

$\therefore a > 0$,

$\therefore$ 当 $\sqrt{a} = \sqrt{\frac{6}{a}}$, 即 $a = \sqrt{6}$ 时, 四边形 $ABCD$ 的面积的最小值为: $5 + 2\sqrt{6}$.

