

华曜初中 2025 学年第一学期初二年级 12 月阶段性练习数学试卷

满分：150 分，时间：100 分钟

(请将所有解答写在答题纸上相应区域)

一、选择题 (每题有且仅有一个正确答案, 每题 4 分, 共 24 分)

1. 点 $A(-3, a)$, 点 $B(-1, b)$ 都在直线 $y = \frac{1}{2}x + k$ 上, 则 a, b 的大小关系是 ()

- A. $a > b$ B. $a < b$ C. $a = b$ D. 无法确定

【答案】B

【解析】

【分析】根据一次函数的增减性进行判断即可.

【详解】解: $\because k = \frac{1}{2} > 0$

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大

$\because -3 < -1$

$\therefore a < b$

故选: B.

【点睛】本题考查一次函数的增减性, 熟练掌握一次函数的性质是解决问题的关键.

2. 下列函数中, 是一次函数的是 ()

① $y = -3x$, ② $y = 2x^{-1} + 3$, ③ $y = kx + b$, ④ $y = x + \pi^2$, ⑤ $y = 1 - \frac{2}{x}$

- A. ①② B. ①③④ C. ①④ D. ①②③④⑤

【答案】C

【解析】

【分析】根据一次函数的定义对每一项进行分析, 即可得出答案.

【详解】解: ① $y = -3x$ 是一次函数, 符合题意;

② $y = 2x^{-1} + 3$, 未知数的次数不是 1, 不是一次函数, 不符合题意;

③ $y = kx + b$ 当 $k=0$ 时, 不是一次函数, 不符合题意;

④ $y = x + \pi^2$ 是一次函数, 符合题意;

⑤ $y = 1 - \frac{2}{x}$ 未知数的次数不是 1, 不是一次函数, 不符合题意;

故选 C.

【点睛】此题主要考查了一次函数定义，关键是掌握一次函数的定义：一般地，形如 $y=kx+b$ ($k\neq 0$, k 、 b 是常数) 的函数，叫做一次函数.

3. 下列命题中，假命题是 ()

- A. 具有中心对称性的四边形是平行四边形
- B. 菱形的两条对角线互相垂直平分
- C. 矩形的每一组邻角都相等
- D. 平行四边形四个顶点的两两连接的线段中，不是平行就是相等

【答案】D

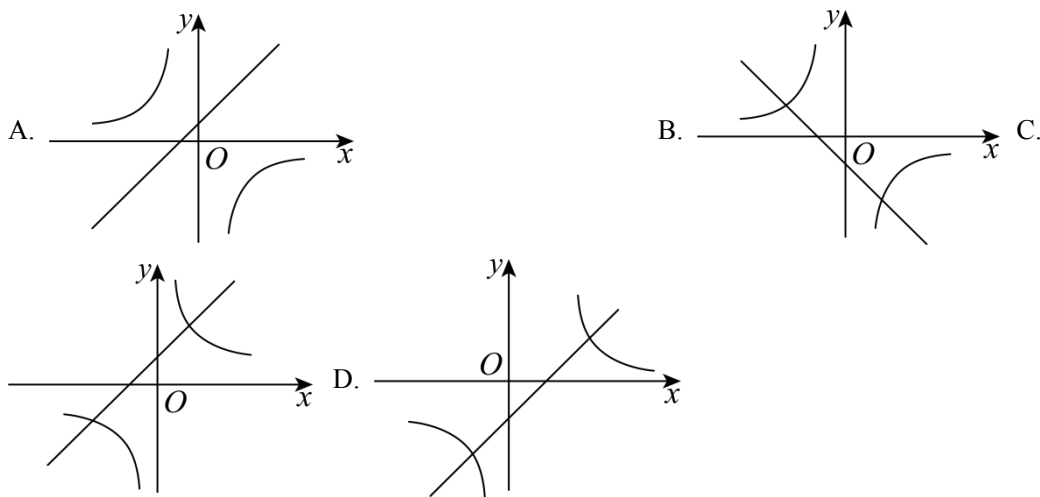
【解析】

【分析】本题考查几何命题的真假判断，涉及平行四边形、菱形、矩形的性质. 根据平行四边形、菱形、矩形的性质，逐项判断，即可求解.

【详解】解：A：具有中心对称性的四边形一定是平行四边形，是真命题，故本选项不符合题意；
B：菱形的对角线互相垂直且平分，是真命题，故本选项不符合题意；
C：矩形的每一组邻角都是直角，故相等，是真命题，故本选项不符合题意；
D：平行四边形的对角线既不平行（相交）也不一定相等（如一般平行四边形），原命题为假命题，故本选项符合题意.

故选 D.

4. 函数 $y = \frac{k}{x}$ 和 $y = k(x-1)$ ($k > 0$) 在同一直角坐标系中的大致图像是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了反比例函数和一次函数的图象性质，熟练掌握反比例函数 (k 的符号对应图象所在象限)、一次函数 (系数对增减性和与坐标轴交点的影响) 的图象特征是解题的关键.

根据 $k > 0$ ，分别分析反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的象限分布，以及一次函数 $y = k(x-1)$ 的增减性和与坐标轴的交点，再匹配选项即可。

【详解】解：∵ $k > 0$ ，

∴ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象位于第一、三象限，

∵ $k > 0$ ，一次函数 $y = k(x-1) = kx - k$ ，

∴ 一次函数中， y 随 x 的增大而增大（图象从左到右上升），

令 $x = 0$ ，得 $y = -k$ ，

∵ $k > 0$ ，

∴ 一次函数与 y 轴的交点为 $(0, -k)$ ，位于 y 轴负半轴，

结合选项，只有 D 符合上述特征。

故选：D。

5. 根据下列条件，不能判定四边形是平行四边形的是（ ）

A. 一组对边平行且相等的四边形

B. 一组对边相等一组对角是直角的四边形

C. 对角线相等的四边形

D. 对角线互相平分的四边形

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查平行四边形的判定条件；根据初中数学教材，平行四边形的判定包括：一组对边平行且相等、两组对边分别相等、对角线互相平分等；选项 A 和 D 是标准判定条件，能判定平行四边形；选项 B 通过推导可知能判定；选项 C 对角线相等不能判定平行四边形，如等腰梯形。

【详解】解：A. 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；

B. 一组对边相等且一组对角是直角的四边形：连接对角线，利用勾股定理可证另一组对边相等，从而判定平行四边形；

C. 对角线相等的四边形不能判定平行四边形，如等腰梯形对角线相等但不是平行四边形；

D. 对角线互相平分的四边形是平行四边形；

故选：C。

6. 在直角坐标平面 xOy 上，到点 $A(6, 8)$ ， $B(8, 0)$ 和原点 O 的距离相等的点 W 的坐标是 (x, y) ，那么下列等式不成立的是（ ）

A. $-16x + 64 = 0$

B. $12x + 16y = 100$

C. $4x-16y=100$

D. $xy=13$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了平面直角坐标系中两点间距离公式的应用，以及根据等量关系列方程、解方程组的能力；解题的关键是利用点到点的距离公式建立等式，再通过化简和验证判断各选项是否成立；易错点是在运用距离公式时可能出现的计算错误，或在化简过程中符号处理不当.

根据题意，点 $W(x, y)$ 到点 $A(6, 8)$ 、 $B(8, 0)$ 和原点 $O(0, 0)$ 的距离相等，即 $WA = WB = WO$ ；分别利用两点间距离公式列出 $WA = WO$ 和 $WB = WO$ 的方程，并进行化简；将化简得到的方程与选项中的方程逐一对比，判断其是否成立.

【详解】解：设点 $W(x, y)$ 到 $A(6, 8)$ 、 $B(8, 0)$ 、 $O(0, 0)$ 的距离相等

$$WA = \sqrt{(x-6)^2 + (x-8)^2}, \quad WB = \sqrt{(x-8)^2 + y^2}, \quad WO = \sqrt{x^2 + y^2}$$

由 $WB = WO$ 得：

$$\sqrt{(x-8)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{两边平方得：} (x-8)^2 + y^2 = x^2 + y^2,$$

$$\text{化简得：} (x-8)^2 = x^2,$$

$$\text{即 } x^2 - 16x + 64 = x^2,$$

$$\therefore -16x + 64 = 0$$

选项 A 正确，不符合题意；

由 $WA = WO$ 得：

$$\sqrt{(x-6)^2 + (x-8)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{两边平方得：} (x-6)^2 + (x-8)^2 = x^2 + y^2,$$

$$\text{展开：} x^2 - 12x + 36 + y^2 - 16y + 64 = x^2 + y^2,$$

$$\text{化简得：} -12x - 16y + 100 = 0, \text{ 即 } 12x + 16y = 100$$

选项 B 正确，不符合题意；

联立方程：

$$\begin{cases} 12x + 16y = 100 \\ -16x + 64 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{13}{4} \end{cases}$$

$$4x - 16y = 4 \times 4 - 16 \times \frac{13}{4} = -36 \neq 100$$

选项 C 错误，符合题意；

$$xy = 4 \times \frac{13}{4} = 13$$

选项 D 正确，不符合题意；

故选 C.

二、填空题 (每题 4 分, 共 48 分)

7. 五边形一共有_____条对角线.

【答案】 5

【解析】

【分析】由 n 边形的对角线有: $\frac{n(n-3)}{2}$ 条, 再把 $n=5$ 代入计算即可得.

【详解】解: $\because n$ 边形共有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线,

$\therefore$ 五边形共有 $\frac{5(5-3)}{2} = 5$ 条对角线.

故答案为: 5

【点睛】本题考查的是多边形的对角线的条数, 掌握 n 边形的对角线的条数是解题的关键.

8. 平行四边形一组对角的和为 260° , 那么这个平行四边形中较小内角的度数为_____.

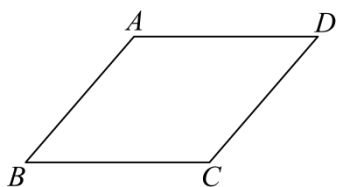
【答案】 50°

【解析】

【分析】此题考查了平行四边形的性质. 解题的关键是注意数形结合思想与平行四边形的对角相等定理的应用.

根据平行四边形对角相等的性质, 结合四边形内角和定理求解即可.

【详解】解: 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle A + \angle C = 260^\circ$,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore \angle B = \angle D, \angle A = \angle C, AD \parallel BC,$

$\therefore \angle B + \angle A = 180^\circ$

$\therefore \angle A + \angle C = 260^\circ,$

$\therefore \angle A = \angle C = 130^\circ,$

$\therefore \angle B = 180^\circ - \angle A = 50^\circ,$

$\therefore$ 在这个平行四边形中较小的一个内角等于 50° .

故答案为: 50° .

9. 直线 $y = 2x - 1$ 的截距是_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 根据截距的定义: 直线 $y = kx + b$ 中, b 就是截距, 即可得到答案.

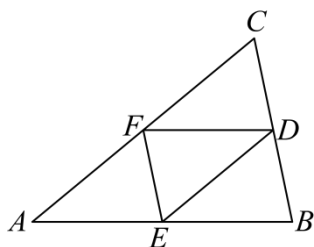
【详解】 解: 令 $x = 0$, 得 $y = -1$,

$\therefore$ 直线 $y = 2x - 1$ 的截距是 -1 ,

故答案为: -1 .

【点睛】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征及一次函数性质, 熟记截距的定义是解题的关键.

10. 如图, $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel AC, DF \parallel AB$, $\triangle ABC$ 的周长为 128, 则 $\triangle CDF$ 与 $\triangle BDE$ 的周长和为_____.



【答案】 128

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行四边形的判定与性质、相似三角形的判定与性质, 熟练掌握平行四边形的对

边相等及平行线判定相似三角形的性质是解题的关键.

先证明四边形 $AEDF$ 是平行四边形, 得到对应边相等, 再结合平行线判定三角形相似, 推导 $\triangle CDF$ 与 $\triangle BDE$ 的周长和与 $\triangle ABC$ 周长的关系.

【详解】解: $\because DE \parallel AC, DF \parallel AB,$

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形,

$\therefore DF = AE, DE = AF;$

$\therefore \triangle CDF$ 的周长为 $CF + FD + DC$, $\triangle BDE$ 的周长为 $BE + ED + DB$,

$\therefore CDF$ 与 BDE 的周长和为 $(CF + FD + DC) + (BE + ED + DB)$

$= (CF + DE) + (FD + BE) + (DC + DB)$

$= (CF + AF) + (AE + BE) + (DC + DB)$

$= AB + AC + BC$

$= 128,$

故答案为: 128.

11. 函数 $y = x + k + 2$ 是正比例函数, 则 k 的值为_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题主要考查了正比例函数的定义. 根据正比例函数的定义, 函数解析式中常数项必须为零即可解答.

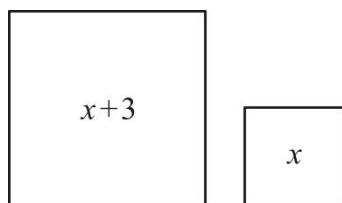
【详解】解: $\because$ 函数 $y = x + k + 2$ 是正比例函数,

$\therefore k + 2 = 0,$

解得: $k = -2.$

故答案为: -2

12. 如图所示, 用一根总长 36 的铁丝恰好围成两个没有公共部分的正方形, 剪裁材料损耗不计, 一个正方形比另一个正方形的面积大 3, 设较小的正方形面积为 x , 可列方程: _____.



【答案】 $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = 9$

【解析】

【分析】 本题主要考查了正方形的周长与面积公式、二次根式的应用，熟练掌握正方形的周长公式（周长 $=4\times$ 边长）及面积与边长的关系（边长 $=$ 面积的算术平方根）是解题的关键.

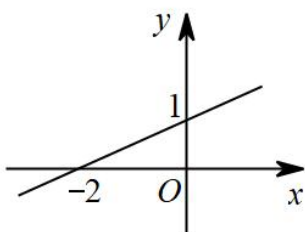
先根据面积表示出两个正方形的边长，再结合铁丝总长（即两个正方形的周长和）列出方程.

【详解】 解：由题意可得 $4\sqrt{x}+4\sqrt{x+3}=36$ ，

化简得 $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=9$ ，

故答案为： $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=9$.

13. 下图是一次函数 $y=kx+b$ 的图像，当 x _____ 时，函数图像在 x 轴的上方.



【答案】 >-2

【解析】

【分析】 观察图象，在 x 轴的上方时，找自变量的取值范围.

【详解】 解：根据图象，得

在 x 轴的上方时， $y>0$

$\therefore x>-2$

故答案为： >-2 .

【点睛】 本题考查一次函数图象问题，读懂图象是解决问题的关键.

14. 线段 AB 、 CD 相交于点 M ，且 $AM=BM$ ， $CM=DM$ ，那么 AC 与 BD 的位置关系是_____.

【答案】 平行

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形，通过证明三角形全等，得出内错角相等，从而判定两直线平行.

【详解】 $\because AM=BM$ ，

$CM=DM$ ，

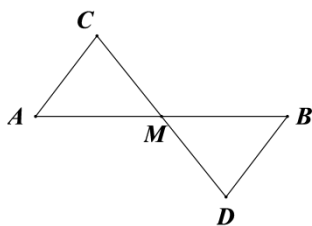
$\angle AMC=\angle BMD$ ，

$\therefore \triangle AMC\cong\triangle BMD(SAS)$ ，

$$\therefore \angle ACM = \angle BDM .$$

$$\therefore AC \parallel BD .$$

故答案为：平行.



15. 已知菱形的两条对角线的长分别是 6 和 8，则菱形的面积为_____.

【答案】 24

【解析】

【分析】 此题主要考查了菱形的性质，正确把握菱形面积求法是解题关键.

直接利用菱形的面积等于对角线乘积的一半，进而得出答案.

【详解】 解： $\because$ 菱形的两条对角线长分别是 6 和 8，

$$\therefore \text{菱形的面积为：} \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24 .$$

故答案为：24.

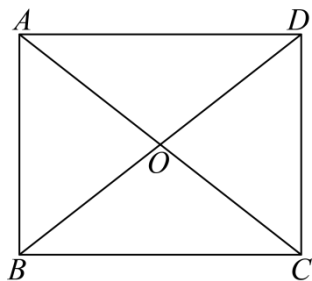
16. 已知矩形的一条对角线长是 8 cm，两条对角线的一个交角为 60° ，则矩形的周长为_____.

【答案】 $(8\sqrt{3} + 8)$ cm

【解析】

【分析】 利用矩形的性质得到 $AB = CD$ ， $AD = BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AC = BD = 8$ cm，再证 AOB 是等边三角形，则 $AB = OA = 4$ cm $= CD$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理得 $BC = 4\sqrt{3}$ ，进一步即可得到矩形的周长.

【详解】 解：如图：



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AB = CD, AD = BC, \angle ABC = 90^\circ, AC = BD = 8 \text{ cm}, AO = OC = \frac{1}{2} AC = 4 \text{ cm},$$

$$OB = OD = \frac{1}{2}BD = 4\text{cm},$$

$$\therefore AO = OB = 4\text{cm},$$

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形,

$$\therefore AB = OA = 4\text{cm} = CD,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, 由勾股定理得: } BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)},$$

$$\text{即 } AD = 4\sqrt{3}\text{cm},$$

$$\therefore \text{矩形 } ABCD \text{ 的周长是: } AB + BC + CD + AD = 4 + 4\sqrt{3} + 4 + 4\sqrt{3} = (8\sqrt{3} + 8) \text{ (cm)}.$$

$$\text{故答案为: } (8\sqrt{3} + 8)\text{cm}$$

【点睛】此题考查了矩形的性质、等边三角形的判定和性质、勾股定理等知识，数形结合和准确计算是解题的关键.

17. 观察反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图像可以发现直线 $y = x$ 是它的一条对称轴, 于是小明希望在用描点法绘制函数 $y = \frac{10}{x}$ 的图像时在每个象限都取 5 个点, 使得除了双曲线 $y = \frac{10}{x}$ 与直线 $y = x$ 的交点以外的点的横纵坐标都是整数, 考虑到正比例函数和反比例函数的对称性, 他认为只需要再取四条经过原点的直线与双曲线 $y = \frac{10}{x}$ 的交点就能高效地找出余下八个点, 这四条直线的斜率的和是_____.

【答案】13

【解析】

【分析】本题主要考查了反比例函数与正比例函数综合, 根据 $10 = 1 \times 10 = 2 \times 5 = -1 \times (-10) = -2 \times (-5)$ 可得反比例函数 $y = \frac{10}{x}$ 上横纵坐标均为整数的点有八个, 分别位于四条经过原点的直线上, 计算这四条直线斜率的和即可.

【详解】解: $\because 10 = 1 \times 10 = 2 \times 5 = -1 \times (-10) = -2 \times (-5),$

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{10}{x}$ 的图象上横纵坐标都为整数的点有 $(-5, -2), (-2, -5), (-10, -1), (-1, -10),$

$(5, 2), (2, 5), (10, 1), (1, 10),$

设经过点 $(-5, -2)$ 的正比例函数解析式为 $y = kx,$

$$\therefore -5k = -2,$$

$$\therefore k = \frac{2}{5},$$

$$\therefore \text{经过点}(-5, -2) \text{的正比例函数解析式为 } y = \frac{2}{5}x,$$

$$\text{同理可得经过点}(-2, -5) \text{的正比例函数解析式为 } y = \frac{5}{2}x,$$

$$\text{经过点}(-10, -1) \text{的正比例函数解析式为 } y = \frac{1}{10}x,$$

$$\text{经过点}(-1, -10) \text{的正比例函数解析式为 } y = 10x,$$

由正比例函数和反比例函数的对称性可知，横纵坐标互为相反数的两个点所在的直线一定经过原点，则这 8 个点分别在经过原点的四条直线上，

$$\therefore \text{这四条直线的斜率的和是 } \frac{2}{5} + \frac{5}{2} + \frac{1}{10} + 10 = 13,$$

故答案为：13.

18. 关于 x 的方程 $\frac{k}{x-1} + k - 1 = \frac{k+1}{x}$ 只有一个实数解，则实数 k 所有可能的值的绝对值之和为_____.

【答案】 $2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式有意义的条件、解分式方程、一元二次方程根的判别式等知识点，掌握根与系数的关系是解题的关键.

先根据分式有意义的条件确定分式方程 x 的取值范围，再将分式方程整理成 $(k-1)x^2 - kx + (k+1) = 0$,

再分 $k-1=0$ 、 $k-1 \neq 0$ 以及分式方程存在增根三种情况求得 k 的值，最后再求绝对值的和即可.

【详解】 解：原分式方程 $\frac{k}{x-1} + k - 1 = \frac{k+1}{x}$ 的 x 的取值范围为 $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$.

两边乘以公分母 $x(x-1)$ ，得：

$$x(x-1)\left(\frac{k}{x-1} + k - 1\right) = x(x-1) \cdot \frac{k+1}{x},$$

$$\text{简化后为：} xk + x(x-1)(k-1) = (x-1)(k+1),$$

展开并整理得： $(k-1)x^2 - kx + (k+1) = 0$ ，此为关于 x 的二次方程，但系数含 k .

①：当 $k-1=0$ ，即 $k=1$ 时，方程为一次方程.

将 $k=1$ 代入原方程，解得 $x=2$ ，符合题意，故 $k=1$ 符合条件.

②：当 $k-1 \neq 0$ ，即 $k \neq 1$ ，方程为二次方程.

二次方程有唯一实数解时判别式为零:

$$\Delta = (-k)^2 - 4(k-1)(k+1) = k^2 - 4(k^2 - 1) = -3k^2 + 4 = 0, \text{ 解得: } k = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

当 $k = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时, $x = \frac{k}{2(k-1)}$, 经检验均不为 0 或 1, 故 $k = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 符合条件.

情况三: 考虑增根可能性.

若 $x=0$ 是根, 代入二次方程得 $k+1=0$, 即 $k=-1$.

当 $k=-1$, 原方程解得 $x = \frac{1}{2}$, 满足题意, 故 $k=-1$ 符合条件.

若 $x=1$ 是根, 代入二次方程得 $k=0$.

当 $k=0$, 原方程解得 $x=-1$, 满足题意, 故 $k=0$ 符合条件.

综上, 所有符合条件的 k 值为 $1, 0, -1, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

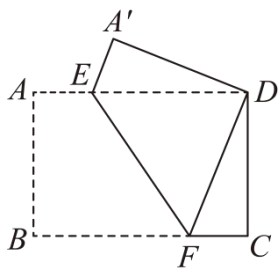
其绝对值之和为:

$$|1| + |0| + |-1| + \left| \frac{2\sqrt{3}}{3} \right| + \left| -\frac{2\sqrt{3}}{3} \right| = 1 + 0 + 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

故答案为 $2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

三、解答题 (共 78 分)

19. 如图, 把一张矩形纸片, 折叠后使顶点 B 和顶点 D 重合, 折痕为 EF , 若 $AB=3$, $BC=5$, 求重叠部分 $\triangle DEF$ 的面积.



【答案】 5.1

【解析】

【分析】 本题主要考查了矩形的性质、折叠的性质及勾股定理的应用, 熟练掌握折叠前后对应边相等、对应角相等, 并利用勾股定理建立方程求解线段长度是解题的关键.

利用矩形和折叠的性质, 设 DE 为未知数, 结合勾股定理列方程求出 DE 的长度, 再根据三角形面积公式

计算 $\triangle DEF$ 的面积.

【详解】解：设 $DE = x$,

$\because$ 矩形 $ABCD$ 中, $AD = BC = 5$, $AB = CD = 3$,

$\therefore AE = AD - DE = 5 - x$.

$\because$ 折叠后 B 与 D 重合,

$\therefore A'E = AE = 5 - x$, $A'D = AB = 3$, $\angle A' = \angle A = 90^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle A'ED$ 中, 由勾股定理得 $A'E^2 + A'D^2 = DE^2$, 即 $(5-x)^2 + 3^2 = x^2$,

解得 $x = 3.4$,

$\therefore \triangle DEF$ 的高为 $CD = 3$,

$$\therefore S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \times DE \times CD = \frac{1}{2} \times 3.4 \times 3 = 5.1.$$

20. 已知直线 $y = kx + b$ 经过点 $A(0, -3)$, 且平行于直线 $y = -2x - 1$.

(1) 求这条直线 $y = kx + b$ 的表达式

(2) 如果这条直线 $y = kx + b$ 经过点 $B(m, 3)$, 求点 A 与点 B 之间的距离.

【答案】(1) $y = -2x - 3$; (2) $3\sqrt{10}$

【解析】

【分析】(1) 根据一次函数图象上点的坐标特征易得 $b = -3$, 根据两直线平行的问题易得 $k = -2$, 从而可确定直线 l 的解析式;

(2) 根据一次函数图象上点的坐标特征, 把 $B(m, 3)$ 代入 (1) 中的解析式即可求出 m 的值, 然后根据勾股定理即可求得点 A 与点 B 之间的距离.

【详解】解: (1) $\because y = kx + b$ 经过点 $A(0, -3)$,

$$\therefore b = -3,$$

$\because$ 直线 $y = kx + b$ 平行于直线 $y = -2x - 1$,

$$\therefore k = -2,$$

$\therefore$ 直线 l 的解析式为 $y = -2x - 3$;

(2) $\because$ 直线 $y = kx + b$ 经过点 $B(m, 3)$,

$$\therefore -2m - 3 = 3,$$

$$\therefore m = -3,$$

$$\therefore B(-3, 3),$$

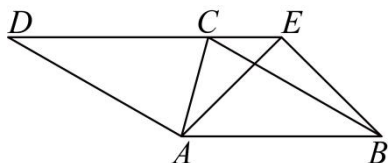
$$\therefore A(0, -3),$$

$$\therefore AB = \sqrt{(-3-0)^2 + (3+3)^2} = 3\sqrt{10},$$

故点 A 与点 B 之间的距离为 $3\sqrt{10}$.

【点睛】本题考查了两条直线相交或平行问题：两条直线的交点坐标，就是由这两条直线相对应的一次函数表达式所组成的二元一次方程组的解；若两条直线是平行的关系，那么它们的自变量系数相同，即 k 值相同.

21. 如图，以菱形 $ABCD$ 的一边 AB 为斜边作与菱形位于直线 AB 同侧的等腰直角三角形 ABE ，点 E 恰好在线段 DC 的延长线上，已知“直角三角形中等于斜边长一半的直角边所对的锐角必为 30° ”，将此真命题作为定理，求出菱形 $ABCD$ 的较大内角的度数.

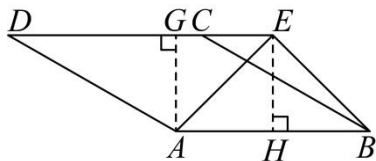


【答案】 150° .

【解析】

【分析】本题主要考查了菱形的性质、等腰直角三角形的性质及直角三角形的特殊边角关系，熟练掌握菱形的性质并结合辅助线将条件转化是解题的关键. 通过作辅助线，利用菱形性质、等腰直角三角形性质及题目给定定理，推导菱形内角.

【详解】解：过点 A 作 $AG \perp DE$ 于 G ，过点 E 作 $EH \perp AB$ 于 H .



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AD = AB, \quad AB \parallel DC.$$

$\because \triangle ABE$ 是等腰直角三角形， $EH \perp AB$ ，

$$\therefore AH = BH,$$

$$\therefore EH = \frac{1}{2}AB.$$

$\because AB \parallel DC$ ， $AG \perp DE$ ， $EH \perp AB$ ，

$$\therefore \angle AGE = \angle AGD = \angle GAH = \angle AHE = 90^\circ,$$

∴ 四边形 $AHEG$ 是矩形,

∴ $AG = EH$.

∴ $AG = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AD$.

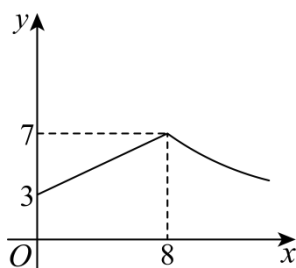
∴ 在 $\text{Rt}\triangle ADG$ 中, $AG = \frac{1}{2}AD$, $AG \perp DE$,

∴ $\angle ADC = 30^\circ$ (题目给定定理: 直角三角形中等于斜边长一半的直角边所对的锐角必为 30°).

∴ $AB \parallel DC$,

∴ $\angle DAB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

22. 一款有能量回收功能的电动车的一次加速到停止加速后因能量回收产生的速度衰减过程大致趋势如图, x 轴为时间轴 (单位: 每个单位长度为一个单位时间), y 轴为速度轴 (每个单位长度为一个单位速度), 研究该车在较短的一段时间内 ($0 \leq x \leq 30$) 的速度 y 的大小关于时间 x 的函数, 该车加速的过程近似于一个一次函数图像的一部分, 速度衰减过程近似于一个反比例函数图像的一部分.



(1) 根据图中信息, 分别求出两段图像所对应的函数的解析式, 并写出各自的定义域;

(2) 若有另一辆同款电动车, 与原电动车同时以同样的起始速度启动加速, 但在 30 个单位时间内都不停止加速, 那么两车的速度差能否达到 10 个单位速度的差距? 若可能, 问经过多少个单位时间达到此速度差; 若不可能, 请说明理由.

【答案】 (1) 加速段: $y = \frac{1}{2}x + 3$, 自变量取值范围 $0 \leq x \leq 8$. 衰减段:

解析式为 $y = \frac{56}{x}$, 自变量取值范围 $8 < x \leq 30$.

(2) 两车的速度差能达到 10 个单位速度的差距, $7 + \sqrt{161}$ 个单位时间达到此速度差.

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数与反比例函数的解析式求解、函数自变量取值范围的确定及方程的应用, 熟练掌握待定系数法求函数解析式、结合自变量取值范围分析实际问题解题的关键.

(1) 加速段设一次函数, 代入两点求解析式及定义域; 衰减段设反比例函数, 代入点求解析式及定义域.

(2) 另一辆车速度用延续的一次函数, 分两段列速度差方程, 验证解是否在对应定义域内.

【小问 1 详解】

解：加速段：设解析式为 $y = kx + b$ ，代入 $(0, 3)$ ， $(8, 7)$ 得

$$\begin{cases} b = 3 \\ 8k + 3 = 7 \end{cases},$$

解得 $k = \frac{1}{2}$ ， $b = 3$ ，

$\therefore y = \frac{1}{2}x + 3$ ，自变量取值范围 $0 \leq x \leq 8$ 。

衰减段：设解析式为 $y = \frac{m}{x}$ ，代入 $(8, 7)$ 得

$$m = 8 \times 7 = 56,$$

$\therefore$ 解析式为 $y = \frac{56}{x}$ ，自变量取值范围 $8 < x \leq 30$ 。

【小问 2 详解】

解：由题意可得另一辆车速度函数： $y = \frac{1}{2}x + 3$ ($0 \leq x \leq 30$)。

当 $0 \leq x \leq 8$ 时，两车速度相同，速度差为 0，无法达到 10。

当 $8 < x \leq 30$ 时，有 $\left(\frac{1}{2}x + 3\right) - \frac{56}{x} = 10$ ，

$$\frac{1}{2}x - \frac{56}{x} - 7 = 0,$$

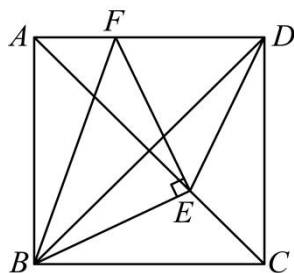
$$x^2 - 14x - 112 = 0,$$

解得 $x = 7 + \sqrt{161}$ 或 $x = 7 - \sqrt{161}$ (舍去)，

经检验， $x = 7 + \sqrt{161}$ 是原分式方程的解。

$\therefore$ 两车的速度差能达到 10 个单位速度的差距， $7 + \sqrt{161}$ 个单位时间达到此速度差。

23. 如图，已知在菱形 $ABCD$ 中，点 E 为对角线 AC 上一点，连结 BE ，过点 E 作 $EF \perp BE$ ，与 AD 交于点 F ， $EF = BE$ 。



(1) 求证： $\angle DFE = \angle ABE$ ；

(2) 求证： $\angle ABC = 90^\circ$ 。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 通过证明 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADE$ 全等得到 $BE = DE$ 、 $\angle ABE = \angle EDF$ ，结合 $EF = BE$ 推出 $DE = EF$ ，进而证得 $\angle DFE = \angle ABE$ ；

(2) 利用菱形性质、全等三角形判定与性质，结合等腰三角形三线合一、矩形及正方形的判定，推导得出 $\angle ABC = 90^\circ$ 。

【小问 1 详解】

解：∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形， AC 是对角线，

∴ $AB = AD$ ， $\angle BAE = \angle DAE$ 。

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle BAE = \angle DAE, \\ AE = AE \end{cases}$$

∴ $\triangle ABE \cong \triangle ADE$ (SAS)，

∴ $BE = DE$ ， $\angle EDF = \angle ABE$ ，

又∵ $BE = EF$ ，

∴ $DE = EF$ ，

∴ $\angle DFE = \angle EDF = \angle ABE$ ；

【小问 2 详解】

解：∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形， AC 是对角线，

∴ $AB = AD$ ， $\angle BAE = \angle DAE$ 。

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle BAE = \angle DAE, \\ AE = AE \end{cases}$$

∴ $\triangle ABE \cong \triangle ADE$ (SAS)，

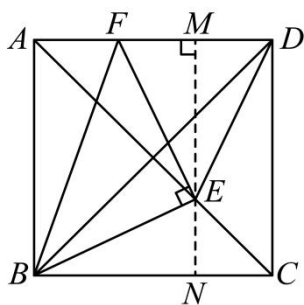
∴ $BE = DE$ 。

又∵ $BE = EF$ ，

∴ $DE = EF$ ，

∴ $\triangle DEF$ 是等腰三角形。

过点 E 作 $EM \perp AD$ 于 M ，交 BC 于 N ，



$\therefore \angle DEM = \frac{1}{2} \angle DEF$ (等腰三角形三线合一).

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $AD \parallel BC$, $EM \perp AD$,

$\therefore \angle BNE = \angle EMD = \angle CMF = 90^\circ$,

$\therefore \angle FEM = 90^\circ - \angle BEN = \angle EBN$,

$\therefore DE = EF$, $MN \perp AD$,

$\therefore \angle DEM = \angle FEM = \angle EBC = \frac{1}{2} \angle DEF$,

$\because AC$ 是菱形对角线,

$\therefore \angle ECD = \angle ECB$,

又 $\because CE = CE$, $CD = CB$,

$\therefore \triangle CDE \cong \triangle CBE$ (SAS),

$\therefore \angle CDE = \angle CBE = \frac{1}{2} \angle DEF = \angle DEM$,

$\therefore EM \parallel CD$.

又 $\because EM \perp AD$,

$\therefore \angle ADC = \angle EMF = 90^\circ$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$.

【点睛】 本题主要考查了菱形的性质、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的性质、正方形的判定, 熟练掌握菱形的性质及全等三角形的判定方法是解题的关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 平行四边形 $ABCD$ 的两个顶点 C 、 D 落在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图像在第一象限内的一支上, 点 A 在 y 轴正半轴上, 点 B 在 x 轴正半轴上.

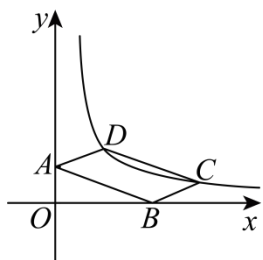


图1

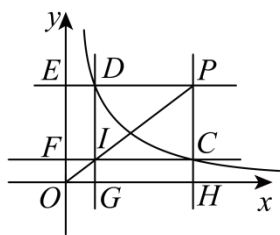


图2

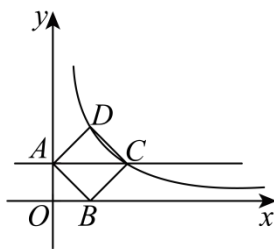


图3

(1) 如图 1, 若点 $OA=1$, $OB=\frac{8}{3}$, 直接写出 C 、 D 两点的坐标;

(2) 如图 2, 分别过点 C 、 D 作两条坐标轴的平行线, $DE \parallel CF \parallel x$ 轴, 分别与 y 轴交于 E 、 F 两点, $DG \parallel CH \parallel y$ 轴, 分别与 x 轴交于 G 、 H 两点, CF 与 DG 交于点 I , DE 与 CH 交于点 P . 根据“出入相补”原理, 我们知道能使矩形 $DEFI$ 和矩形 $CHGI$ 面积相等的点, 一定在矩形 $OEPH$ 的对角线 OP 上. 记点 C 和点 D 的横坐标分别为 c 、 d , 试从直线 OP 经过点 I 的角度验证这个结论;

(3) 如图 3, 若直线 AC 是一次函数 $y=kx+a$ ($k \neq 0$) 的图像, 平行四边形 $ABCD$ 有无可能是菱形? 若可能, 求出菱形 $ABCD$ 对应的一次函数 $y=kx+a$ ($k \neq 0$); 若不可能, 请简述理由.

【答案】 (1) $C\left(4, \frac{1}{2}\right)$, $D\left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right)$

(2) 证明详见解析 (3) 不可能, 理由详见解析

【解析】

【分析】 (1) 设点 C 坐标为 $\left(c, \frac{2}{c}\right)$, 点 D 坐标为 $\left(d, \frac{2}{d}\right)$, 利用平行四边形对角线互相平分的性质, 结合中点公式构建方程组, 解出 c 和 d 的值即可;

(2) 根据平行关系可以用 c 和 d 表示出点 I 和点 P 的坐标, 设直线 OP 的一次函数解析式, 可以证出点 I 在该一次函数的图像上. 根据反比例函数 k 的几何意义可以得到, 此时矩形 $DEFI$ 和矩形 $CHGI$ 面积相等, 结论得证;

(3) 先假设存在, 用字母表示出 A 、 B 、 C 、 D 四点的坐标. 根据菱形对角线互相平分和邻边相等的性质, 求出字母间的关系, 并构建方程, 化简后可求得点 A 和点 C 的坐标之间的关系, 从而验证假设是否成立.

【小问 1 详解】

解: 设点 C 坐标为 $\left(c, \frac{2}{c}\right)$, 点 D 坐标为 $\left(d, \frac{2}{d}\right)$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ 对角线 AC 与 BD 互相平分,

$$\therefore \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases},$$

$$\text{代入坐标得, } \begin{cases} 0 + c = \frac{8}{3} + d \text{ ①} \\ 1 + \frac{2}{c} = 0 + \frac{2}{d} \text{ ②} \end{cases},$$

$$\text{将①代入②得, } 1 + \frac{2}{\frac{8}{3} + d} = \frac{2}{d},$$

$$\text{化简得, } 3d^2 + 8d - 16 = 0,$$

$$\text{解得, } d_1 = \frac{4}{3}, \quad d_2 = -4 \text{ (负值舍去),}$$

$$\text{将 } d = \frac{4}{3} \text{ 代入①得, } c = 4,$$

$$\therefore \begin{cases} c = 4 \\ d = \frac{4}{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 坐标为 } \left(4, \frac{1}{2}\right), \text{ 点 } D \text{ 坐标为 } \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right);$$

【小问 2 详解】

$$\therefore \text{点 } C、\text{点 } D \text{ 落在反比例函数 } y = \frac{2}{x} \text{ 图像上,}$$

又∵ 点 C 和点 D 的横坐标分别为 c 、 d ,

$$\therefore \text{点 } C \text{ 坐标为 } \left(c, \frac{2}{c}\right), \text{ 点 } D \text{ 坐标为 } \left(d, \frac{2}{d}\right),$$

∵ $DE \parallel CF \parallel x$ 轴, 且点 E 、点 F 在 y 轴上,

$$\therefore \text{点 } E \text{ 的坐标为 } \left(0, \frac{2}{d}\right), \text{ 点 } F \text{ 的坐标为 } \left(0, \frac{2}{c}\right),$$

同理, 点 G 的坐标为 $(d, 0)$, 点 H 的坐标为 $(c, 0)$,

$$\therefore \text{点 } I \text{ 的坐标为 } \left(d, \frac{2}{c}\right), \text{ 点 } P \text{ 的坐标为 } \left(c, \frac{2}{d}\right),$$

$$\therefore S_{\text{矩形}OCHF} = CH \cdot CF = c \cdot \frac{2}{c} = 2, \quad S_{\text{矩形}OEDG} = DG \cdot DE = d \cdot \frac{2}{d} = 2,$$

$$\text{又} \because S_{\text{矩形}CHFI} = S_{\text{矩形}OCHF} - S_{\text{矩形}OGIF}, \quad S_{\text{矩形}DEFI} = S_{\text{矩形}OEDG} - S_{\text{矩形}OGIF},$$

$$\therefore S_{\text{矩形}CHFI} = S_{\text{矩形}DEFI},$$

设直线 OP 的解析式为 $y = kx$,

$$\text{将 } x = c, \quad y = \frac{2}{d} \text{ 代入, } \frac{2}{d} = ck,$$

$$\text{解得, } k = \frac{2}{cd},$$

$$\therefore \text{直线 } OP \text{ 的解析式为 } y = \frac{2}{cd}x,$$

$$\text{当 } x = d \text{ 时, } y = \frac{2}{cd} \cdot d = \frac{2}{c},$$

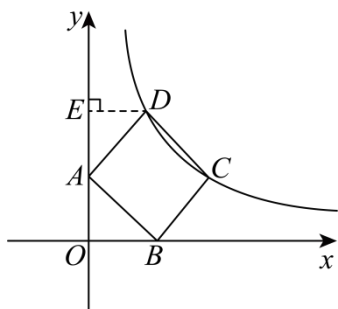
$\therefore$ 点 I 在对角线 OP 上,

$\therefore$ 结论成立;

【小问 3 详解】

假设四边形 $ABCD$ 是菱形, 设点 B 坐标为 $(b, 0)$, 点 C 坐标为 $(c, \frac{2}{c})$, 点 D 坐标为 $(d, \frac{2}{d})$,

如图, 作 $DE \perp y$ 轴, 垂足为 E ,



$\therefore$ 直线 AC 是一次函数 $y = kx + a (k \neq 0)$ 的图像, 且点 A 在 y 轴上,

$\therefore$ 点 A 坐标为 $(0, a)$,

$\therefore DE \perp y$ 轴, 且点 E 在 y 轴上,

$$\therefore \text{点 } E \text{ 坐标为 } \left(0, \frac{2}{d}\right),$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore$ 对角线 AC 与 BD 互相平分, $AB = AD$,

$$\therefore \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases},$$

$$\text{代入坐标得, } \begin{cases} 0 + c = b + d \\ a + \frac{2}{c} = 0 + \frac{2}{d} \end{cases},$$

$$\text{变形得, } \begin{cases} b = c - d \text{ ①} \\ a = \frac{2}{d} - \frac{2}{c} \text{ ②} \end{cases},$$

$$\text{由勾股定理可得, } AB^2 = OA^2 + OB^2 = a^2 + b^2, \quad AD^2 = AE^2 + DE^2 = \left(\frac{2}{d} - a\right)^2 + d^2,$$

$$\therefore AB = AD,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \left(\frac{2}{d} - a\right)^2 + d^2,$$

$$\text{将①和②代入得, } \left(\frac{2}{d} - \frac{2}{c}\right)^2 + (c - d)^2 = \left(\frac{2}{d} - \frac{2}{d} + \frac{2}{c}\right)^2 + d^2,$$

$$\text{提取公因式得, } \frac{(c - d)^2}{c^2 d^2} (c^2 d^2 + 4) = \frac{1}{c^2} (c^2 d^2 + 4),$$

$$\text{由非负数的性质得, } c^2 d^2 + 4 > 0,$$

$$\text{两边同除以 } (c^2 d^2 + 4) \text{ 得, } \frac{(c - d)^2}{c^2 d^2} = \frac{1}{c^2},$$

$$\text{去分母得, } (c - d)^2 = d^2,$$

$$\text{移项后因式分解得, } c(c - 2d) = 0,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 在第一象限, 即 } c > 0,$$

$$\therefore d = \frac{1}{2}c,$$

$$\text{将 } d = \frac{1}{2}c \text{ 代入②得, } a = \frac{4}{c} - \frac{2}{c} = \frac{2}{c}, \text{ 则点 } A \text{ 与点 } C \text{ 的纵坐标相同,}$$

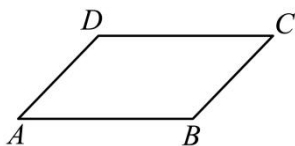
$\therefore AC \parallel x$ 轴, 此时一次函数 $y = kx + a$ 的 $k = 0$, 与题干 $k \neq 0$ 矛盾,

$\therefore$ 假设不成立, 平行四边形 $ABCD$ 不可能是菱形.

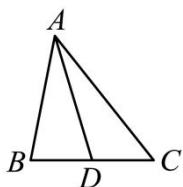
【点睛】 本题考查平行四边形的性质, 菱形的性质, 反比例函数的图像与性质, 一次函数的图像与性质以及勾股定理, 熟练掌握四边形的性质并能结合函数图像上点的特征是解题关键.

25. 小华在学习特殊的平行四边形的性质时发现, 对于平行四边形 $ABCD$, 不论是成为矩形 $ABCD$ 还是菱形 $ABCD$ 时, 都有 $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$ 成立.

(1) 小华好奇对于一般的平行四边形 $ABCD$, 该结论仍成立吗? 请证明其成立或说明不能确保成立的理由;



(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 设 $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, AD 是 BC 边上的中线, 小华认为中线 AD 与 $\triangle ABC$ 的三边有恒定的关系, 希望求出根据三角形三边长求其中一边上的中线长的关系式, 你认为是否存在这样的关系? 如果存在这样的关系, 请用关于 $\triangle ABC$ 三边长 a , b , c 的代数式表示中线长 AD ; 若不存在, 请说明理由; (若第 (1) 问的结论证为真, 那么在本题中可作为定理使用)



(3) 若三角形的一边上的中线长与这条边长相等, 那么称这种三角形为“中等三角形”, 这条边为“中等线”. 若 $\triangle ABC$ 中 $AB = 3$, $AC = 4$, BC 是中等 $\triangle ABC$ 的中等线, 求 BC 边上的中线 AD 的长. (若前两问的结论证为真, 那么在本题中可以作为定理使用)

【答案】 (1) 结论成立, 理由见解析

(2) 存在, 中线长关系式为 $AD = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$

(3) $\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 (1) 通过作高构造直角三角形, 证明三角形全等得到线段关系, 再利用勾股定理推导平行四边形对角线与四边的关系;

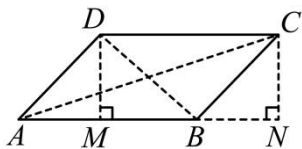
(2) 延长中线构造平行四边形, 结合 (1) 的结论推导三角形中线与三边的关系式;

(3) 根据“中等三角形”的定义，结合(2)的中线公式列方程求解中线长度.

【小问1详解】

解：结论成立，理由如下：

过点 D 作 $DM \perp AB$ 于 M ，过点 C 作 $CN \perp AB$ 于 N ，连接 AC 、 BD 。



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD = BC$ ， $AB = CD$ ， $AB \parallel CD$ ，

$\therefore DM \perp AB$ ， $CN \perp AB$ ，

$\therefore DM = CN$ ， $\angle AMD = \angle BNC = 90^\circ$ ，

在 $Rt\triangle ADM$ 和 $Rt\triangle BCN$ 中，

$$\begin{cases} AD = BC \\ DM = CN \end{cases},$$

$\therefore Rt\triangle ADM \cong Rt\triangle BCN (HL)$ ，

$\therefore AM = BN$ ，

在 $Rt\triangle BDM$ 中： $BD^2 = DM^2 + BM^2 = DM^2 + (AB - AM)^2$ ，

在 $Rt\triangle ADM$ 中： $AD^2 = DM^2 + AM^2$ ，

在 $Rt\triangle ACN$ 中： $AC^2 = CN^2 + AN^2 = DM^2 + (AB + BN)^2 = DM^2 + (AB + AM)^2$ ，

$$\therefore AC^2 + BD^2 = [DM^2 + (AB - AM)^2] + [DM^2 + (AB + AM)^2],$$

展开得： $AC^2 + BD^2 = 2DM^2 + 2AB^2 + 2AM^2$ ，

$$\therefore AD^2 = DM^2 + AM^2,$$

$$\therefore AC^2 + BD^2 = 2AD^2 + 2AB^2,$$

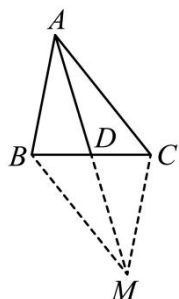
又 $\because$ 平行四边形中 $AB = CD$ ， $AD = BC$ ，

$$\therefore AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2;$$

【小问2详解】

解：存在，中线长关系式为 $AD = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ ，推导如下：

延长 AD 到 M ，使 $AD = DM$ ，连接 BM 、 CM 。



$$\because AD = DM, \quad BD = CD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABMC$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = CM = c, \quad AC = BM = b,$$

$$\text{由 (1) 的结论: } AM^2 + BC^2 = AB^2 + BM^2 + CM^2 + AC^2,$$

$$\because AM = 2AD, \quad BC = a,$$

$$\therefore (2AD)^2 + a^2 = c^2 + b^2 + c^2 + b^2,$$

$$\text{化简得: } 4AD^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2,$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2};$$

【小问 3 详解】

解: $\because BC$ 是中等线,

$$\therefore AD = BC,$$

$$\text{由 (2) 的中线公式得 } AD = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2},$$

$$\because AB = 3, \quad AC = 4,$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2}\sqrt{2 \times 4^2 + 2 \times 3^2 - BC^2}$$

$$\text{解得 } AD = \sqrt{10}.$$

【点睛】 本题主要考查了平行四边形的判定与性质、勾股定理、三角形中线定理，熟练掌握平行四边形的构造方法及勾股定理的应用是解题的关键。