

## 八年级数学

### 一、填空题（每题3分，共30分）

1. 命题“直角三角形两锐角互余”的逆命题可表述为\_\_\_\_\_.

【答案】两个锐角互余的三角形是直角三角形

【解析】

【分析】本题考查了逆命题的定义，掌握互逆命题的定义是解题的关键. 找出原命题的题设和结论，交换后即可得逆命题.

【详解】解：原命题的题设：三角形是直角三角形，结论：两个锐角互余，  
交换题设和结论后，逆命题为：两个锐角互余的三角形是直角三角形.  
故答案为：两个锐角互余的三角形是直角三角形.

2. 已知点  $A(1,0)$ ， $B(-3,-1)$ ，则线段  $AB$  的长为\_\_\_\_\_

【答案】 $\sqrt{17}$

【解析】

【分析】本题考查了两点之间的距离公式：已知在平面直角坐标系中有两点  $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ ，则这两点间的距离公式为  $P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ，熟练掌握两点之间的距离公式是解题关键. 根据两点之间的距离公式求解即可得.

【详解】解：∵点  $A(1,0)$ ， $B(-3,-1)$ ，  
∴  $AB = \sqrt{(-3-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{17}$ .

故答案为： $\sqrt{17}$ .

3. 经过点  $A(3,-2)$ ， $B(5,-2)$ ，则直线  $AB$  的可表示为\_\_\_\_\_

【答案】 $y = -2$  或  $y + 2 = 0$

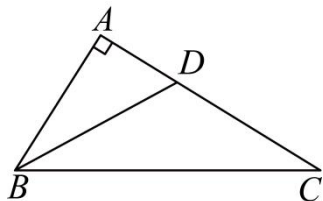
【解析】

【分析】本题考查直线方程的表示方法，特别是当两点纵坐标相等时，直线为水平直线，方程形式为  $y = k$ （常数）. 解题的关键是掌握特殊位置直线的特征（如水平、垂直）有助于快速解题，避免使用两点式或点斜式等复杂计算. 题目给出直线上的两个点  $A(3,-2)$  和  $B(5,-2)$ ，要求写出直线  $AB$  的方程. 观察两点的纵坐标相同，说明该直线是水平直线，即平行于  $x$  轴，其方程形式为  $y = \text{常数}$ . 因此只需根据点的  $y$  坐标确定常数值即可.

【详解】点  $A(3, -2)$  和  $B(5, -2)$  的纵坐标均为  $-2$ ，因此直线  $AB$  平行于  $x$  轴，故直线可表示  $y = -2$ 。

故答案为：  $y = -2$

4. 如图， $BD$  平分  $\angle ABC$ ，交  $AC$  于  $D$ ， $\angle A = 90^\circ$ ，若  $AD = 3\text{cm}$ ，则  $D$  点到  $BC$  的距离是\_\_\_\_\_  $\text{cm}$ 。

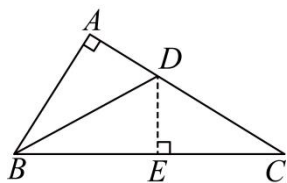


【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了角的平分线的性质，熟练掌握角平分线的性质，并利用性质进行辅助线作图是解决本题的关键。过点  $D$  作  $BC$  的垂线，垂足为  $E$ ，由角的平分线的性质可得  $DE = AD$  即可。

【详解】 解：如图，过点  $D$  作  $BC$  的垂线，垂足为  $E$ ，

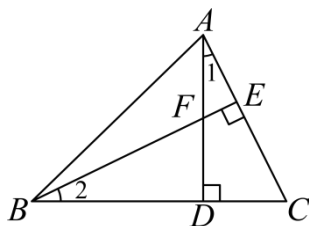


$\because BD$  平分  $\angle ABC$ ，  $\angle A = 90^\circ$ ，  $AD = 3\text{cm}$ ，

$\therefore DE = AD = 3\text{cm}$ ，

故答案为： 3。

5. 如图，  $\triangle ABC$  中  $AD \perp BC$  于  $D$ ，  $BE \perp AC$  于  $E$ ， 则  $\angle 1$  与  $\angle 2$  的关系是\_\_\_\_\_



【答案】  $\angle 1 = \angle 2$

【解析】

【分析】 本题考查了直角三角形的两个锐角互余，熟练掌握直角三角形的两个锐角互余是解题关键。根据直角三角形的两个锐角互余可得  $\angle 1 + \angle C = 90^\circ$ ，  $\angle 2 + \angle C = 90^\circ$ ， 由此即可得。

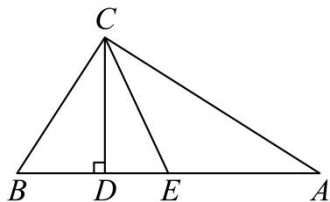
【详解】 解：  $\because AD \perp BC$ ，

$\therefore \angle 1 + \angle C = 90^\circ$ ，

$$\begin{aligned} &\therefore BE \perp AC, \\ &\therefore \angle 2 + \angle C = 90^\circ, \\ &\therefore \angle 1 = \angle 2. \end{aligned}$$

故答案为:  $\angle 1 = \angle 2$ .

6. 如图,  $CD$ 、 $CE$  分别是  $\text{Rt}\triangle ABC$  斜边上的高和中线, 则图中与  $\angle A$  相等的角是\_\_\_\_\_



【答案】  $\angle BCD = \angle A$ ,  $\angle A = \angle ACE$

【解析】

【分析】要找出与  $A$  相等的角, 需利用直角三角形的性质 (斜边中线等于斜边的一半) 和同角的余角相等的原理. 先根据直角三角形斜边中线性质的得到线段相等, 进而推出角相等; 再结合高的垂直关系, 通过余角相等找到另一组相等的角.

【详解】在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $CE$  是斜边  $AB$  上的中线,  
得  $CE = AE = BE$ .

$$\begin{aligned} &\therefore CE = AE, \\ &\therefore \triangle ACE \text{ 是等腰三角形,} \\ &\therefore \angle A = \angle ACE. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\therefore CD \text{ 是斜边 } AB \text{ 上的高,} \\ &\therefore \angle CDB = 90^\circ, \end{aligned}$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle BCD \text{ 中, } \angle B + \angle BCD = 90^\circ.$$

$$\text{又} \therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中, } \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle A = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle BCD = \angle A.$$

【点睛】本题关键在于运用直角三角形斜边中线的性质 (斜边中线等于斜边的一半) 和同角的余角相等这两个知识点, 通过线段相等推导角相等, 再结合垂直关系中的余角关系找到所有与  $\angle A$  相等的角.

7. 若  $\text{Rt}\triangle ABC$  中两条直角边分别为 1 和 2, 则斜边长为\_\_\_\_\_.

【答案】  $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理，根据勾股定理，直角三角形中两条直角边的平方和等于斜边的平方，由此计算即可得出结果，熟练掌握勾股定理是解此题的关键.

【详解】 解：  $\because$   $\text{Rt}\triangle ABC$  中两条直角边分别为 1 和 2，

$$\therefore \text{斜边长为 } \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

故答案为：  $\sqrt{5}$  .

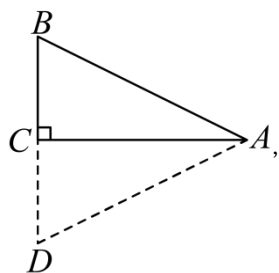
8. 若在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中，  $\angle C = 90^\circ$ ，  $BC = 3$ ，  $AB = 6$ ， 则  $\angle B =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $60^\circ$

【解析】

【分析】 本题考查了线段垂直平分线的性质，等边三角形的判定与性质，延长  $BC$  至点  $D$ ，使得  $BC = CD = 3$ ，连接  $AD$ ，证明  $\triangle ABD$  为等边三角形，即可得解，熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】 解： 如图： 延长  $BC$  至点  $D$ ，使得  $BC = CD = 3$ ，连接  $AD$ ，



$$\text{则 } BD = BC + CD = 3 + 3 = 6,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \text{ 即 } AC \perp BD,$$

$$\therefore AC \text{ 垂直平分 } BD,$$

$$\therefore AB = AD = 6,$$

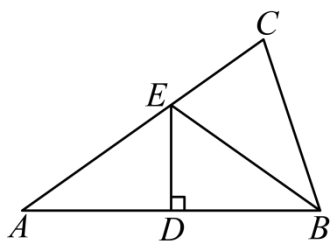
$$\therefore AB = AD = BD,$$

$$\therefore \triangle ABD \text{ 为等边三角形},$$

$$\therefore \angle B = 60^\circ,$$

故答案为：  $60^\circ$  .

9. 如图，  $\triangle ABC$  中  $AB = AC$ ，  $DE$  垂直平分  $AB$  于  $D$ ，交  $AC$  于  $E$  点，若  $AB = 5$ ，  $\triangle BCE$  的周长为 9，则  $BC$  的长为\_\_\_\_\_.



【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查的是线段的垂直平分线的性质，掌握知识点线段的垂直平分线上的点到线段的两个端点的距离相等是解题的关键。根据线段垂直平分线性知  $EA = EB$ ，再由  $\triangle BCE$  的周长求出

$BC + BE + EC = BC + AE + EC = BC + AC = 9$ ，即可求解。

【详解】 解：  $\because DE$  垂直平分  $AB$  于  $D$ ，

$\therefore EA = EB$ ，

$\therefore \triangle BCE$  的周长为  $BC + BE + EC = BC + AE + EC = BC + AC = 9$ ，

$\because AB = AC$ ，  $AB = 5$ ，

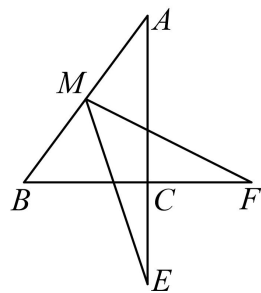
$\therefore BC + AC = BC + 5 = 9$ ，

$\therefore BC = 4$ ，

故答案为： 4。

10. 如图，在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中，  $\angle ACB = 90^\circ$ ，  $M$  是  $AB$  的中点，  $E$ 、 $F$  分别是  $AC$ 、 $BC$  延长线上的点，且

$CE = CF = \frac{1}{2}AB$ ， 则  $\angle EMF =$  \_\_\_\_\_。



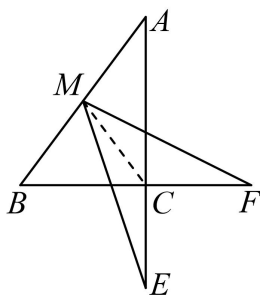
【答案】  $45^\circ$  ##45 度

【解析】

【分析】 本题考查了直角三角形的性质，等腰三角形的性质，三角形的中位线定理，熟练掌握知识点是解题的关键。先连接  $MC$ ，设  $\angle E = \alpha$ ， $\angle F = \beta$ ，由三角形的中位线得出  $MC = MB = MA = \frac{1}{2}AB = CE = CF$ ，

再求出  $\angle ACB = 2\alpha + 2\beta = 90^\circ$ ， 则  $\alpha + \beta = 45^\circ$ ， 即可求出答案。

【详解】 解： 连接  $MC$ ， 设  $\angle E = \alpha$ ，  $\angle F = \beta$ ，



$\because M$  是  $AB$  的中点,  $CE = CF = \frac{1}{2} AB$ ,

$\therefore MC = MB = MA = \frac{1}{2} AB = CE = CF$ ,

$\therefore \angle CME = \angle E = \alpha$ ,  $\angle CMF = \angle F = \beta$ ,

$\therefore \angle MCB = 2\beta$ ,  $\angle ACM = 2\alpha$ ,

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle ACB = 2\alpha + 2\beta = 90^\circ$ , 则  $\alpha + \beta = 45^\circ$ ,

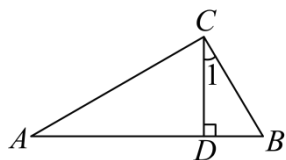
$\therefore \angle EMF = \angle EMC + \angle FMC = \alpha + \beta = 45^\circ$ ,

故答案为:  $45^\circ$ .

## 二、选择题 (每题 4 分, 共 8 分)

11. 如图,  $\triangle ABC$  中  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $CD \perp AB$  于  $D$ ,  $\angle A = 30^\circ$ , 下列结论正确的有 ( )

①  $BC = \frac{1}{2} AB$ ; ②  $\angle 1 = \frac{1}{2} \angle B$ ; ③  $AC = 2CD$ ; ④  $BD = \frac{1}{4} AB$



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】D

【解析】

【分析】本题核心考查含  $30^\circ$  角的直角三角形的性质与三角形内角和定理. 利用 “ $30^\circ$  角所对的直角边等于斜边的一半” 这一性质, 结合角度计算, 可逐一验证四个结论的正确性. 本题需依据含  $30^\circ$  角的直角三角形的性质 (直角三角形中,  $30^\circ$  角所对的直角边等于斜边的一半) 与三角形内角和定理, 对四个结论逐一分析判断.

【详解】解:  $\because$  在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ .

$\therefore BC = \frac{1}{2}AB$ , 故①正确.

在  $\triangle ABC$  中, 由三角形内角和为  $180^\circ$ ,

$$\therefore \angle B = 180^\circ - \angle A - \angle ACB = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ.$$

$\because CD \perp AB$ , 即  $\angle CDB = 90^\circ$ ,

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BCD \text{ 中, } \angle 1 = 180^\circ - \angle B - \angle CDB = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ.$$

$$\because \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \frac{1}{2} \times 60^\circ = \frac{1}{2} \angle B, \text{ 故②正确.}$$

在  $\text{Rt}\triangle ACD$  中,  $\angle ADC = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ .

$$\therefore AC = 2CD, \text{ 故③正确.}$$

$$\because BC = \frac{1}{2}AB, \angle 1 = 30^\circ, \text{ 在 Rt}\triangle BCD \text{ 中, } \angle BDC = 90^\circ, \angle 1 = 30^\circ,$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC, \text{ 且 } BC = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}AB, \text{ 故④正确.}$$

故选 D.

12. 已知  $\angle A = \angle D = 90^\circ$ , 不能判定  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  全等的一组条件是 ( )

A.  $\angle B = \angle E$ 、 $AC = DF$

B.  $BC = EF$ 、 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DEF}$

C.  $AC = DF$ 、 $BC = EF$

D.  $AB = DE$ 、 $BC = DF$

【答案】D

【解析】

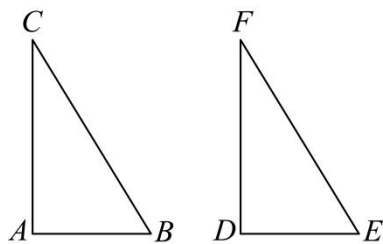
【分析】本题考查了三角形全等的判定、勾股定理、完全平方公式等知识, 熟练掌握三角形全等的判定定理是解题关键. 根据 AAS 定理即可得选项 A 能判定  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  全等; 先求出  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  的直角边对应相等, 再根据 SAS 定理可得选项 B 能判定  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  全等; 根据 HL 定理可得选项 C 能判定  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  全等; 判断出  $EF > BC$ , 即  $\text{Rt}\triangle ABC$  和  $\text{Rt}\triangle DEF$  的斜边不对应相等, 则可得选项 D 不能判定  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  全等.

【详解】解: A、在  $\triangle ABC$  和  $\triangle DEF$  中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle D = 90^\circ \\ \angle B = \angle E \\ AC = DF \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$  (AAS), 则此项不符合题意;

B、如图， $\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DEF}$ ， $\angle A = \angle D = 90^\circ$ ，



$$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} DE \cdot DF,$$

$$\therefore AB \cdot AC = DE \cdot DF,$$

$$\therefore BC = EF,$$

$$\therefore BC^2 = EF^2,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle DEF \text{ 中, } DE^2 + DF^2 = EF^2,$$

$$\therefore AB^2 + AC^2 = DE^2 + DF^2,$$

$$\therefore \begin{cases} AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC = DE^2 + DF^2 + 2DE \cdot DF \\ AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC = DE^2 + DF^2 - 2DE \cdot DF \end{cases},$$

$$\text{即} \begin{cases} (AB + AC)^2 = (DE + DF)^2 \\ (AB - AC)^2 = (DE - DF)^2 \end{cases},$$

不妨设  $AC > AB > 0$ ， $DF > DE > 0$ ，

$$\therefore \begin{cases} AB + AC = DE + DF \\ AB - AC = DE - DF \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} AB = DE \\ AC = DF \end{cases},$$

在  $\triangle ABC$  和  $\triangle DEF$  中，

$$\begin{cases} AB = DE \\ \angle A = \angle D = 90^\circ, \\ AC = DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$  (SAS)，则此项不符合题意；

C、在  $\text{Rt}\triangle ABC$  和  $\text{Rt}\triangle DEF$  中，

$$\begin{cases} BC = EF \\ AC = DF \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle DEF$  (HL), 则此项不符合题意;

D、在  $\text{Rt}\triangle DEF$  中, 斜边  $EF > DF$ ,

$\because BC$  是  $\text{Rt}\triangle ABC$  中的斜边, 且  $BC = DF$ ,

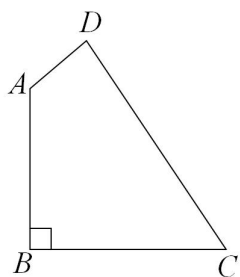
$\therefore EF > BC$ , 即  $\text{Rt}\triangle ABC$  和  $\text{Rt}\triangle DEF$  的斜边不对应相等,

$\therefore$  不能判定  $ABC$  与  $\triangle DEF$  全等, 则此项符合题意;

故选: D.

### 三、解答题 (第 1、2、3 每题 6 分, 第 4、6 题 10 分, 第 5 题 12 分, 第 7 题 12 分, 共 62 分)

13. 已知, 如图所示, 四边形  $ABCD$  中,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB = 11$ ,  $BC = 4\sqrt{3}$ ,  $CD = 12$ ,  $AD = 5$ , 求四边形  $ABCD$  的面积.

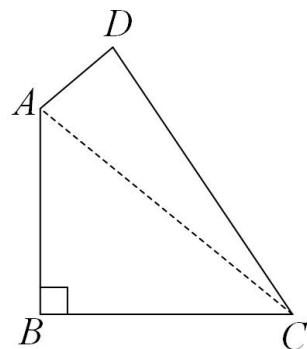


【答案】  $S_{\text{四边形}ABCD} = 30 + 22\sqrt{3}$

【解析】

【分析】连接  $AC$ , 然后根据勾股定理求出  $AC$  的长度, 再根据勾股定理逆定理计算出  $\angle ADC = 90^\circ$ , 然后根据四边形  $ABCD$  的面积 =  $\triangle ABC$  的面积 +  $\triangle ACD$  的面积, 列式进行计算即可得解.

【详解】解: 连接  $AC$ ,



$\because \angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB = 11$ ,  $BC = 4\sqrt{3}$

$\therefore$  由勾股定理可得:  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 13$

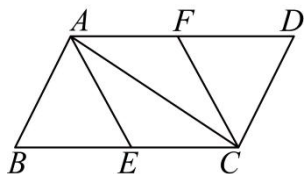
在  $\triangle ADC$  中,  $AD = 5$ ,  $CD = 12$ ,  $AC = 13$

根据勾股定理的逆定理可得:  $\angle ADC = 90^\circ$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2}AD \cdot DC + \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 + \frac{1}{2} \times 11 \times 4\sqrt{3} = 30 + 22\sqrt{3}$$

【点睛】 本题考查勾股定理、勾股定理的逆定理等知识, 通过作辅助线将一般的四边形转化为两个直角三角形是解题的关键.

14. 如图,  $AB \parallel CD$ ,  $AB \perp AC$ ,  $E$ 、 $F$  分别为  $BC$ 、 $AD$  的中点.



(1) 求证:  $CF = \frac{1}{2}AD$ ;

(2) 若  $BC = AD$ , 求证:  $\angle B = \angle D$ .

【答案】 (1) 见详解 (2) 见详解

【解析】

【分析】 (1) 要证  $CF = \frac{1}{2}AD$ , 需先确定  $\triangle ACD$  为直角三角形, 再利用直角三角形斜边中线定理 (直角三角形斜边的中线等于斜边的一半). 由  $AB \parallel CD$  和  $AB \perp AC$  可推出  $\angle ACD = 90^\circ$ , 结合  $F$  是  $AD$  中点即可得证.

(2) 要证  $\angle B = \angle D$ , 需证明含这两个角的三角形全等. 观察到  $\triangle BAC$  和  $\triangle DCA$  均为直角三角形 ( $\angle BAC = \angle DCA = 90^\circ$ ), 且已知  $BC = AD$ , 公共边  $AC = CA$ , 可通过 HL (斜边直角边) 定理证全等, 进而得对应角相等.

【小问 1 详解】

证明:  $\because AB \parallel CD$ ,  $AB \perp AC$ ,

$$\therefore \angle BAC = \angle ACD = 90^\circ.$$

又  $\because F$  为  $AD$  的中点,  $\triangle ACD$  是直角三角形,

$$\therefore CF = \frac{1}{2}AD.$$

【小问 2 详解】

证明:  $\because AB \perp AC$ ,  $\angle ACD = 90^\circ$ ,

$\therefore \triangle BAC$  和  $\triangle DCA$  均为直角三角形.

在  $\text{Rt}\triangle BAC$  和  $\text{Rt}\triangle DCA$  中,

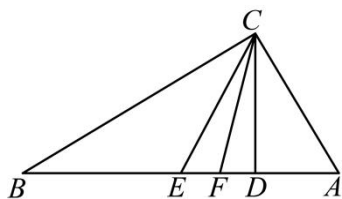
$$\begin{cases} BC = AD \\ AC = CA \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BAC \cong \text{Rt}\triangle DCA(\text{HL}).$$

$$\therefore \angle B = \angle D \quad (\text{全等三角形的对应角相等}).$$

【点睛】本题核心考查直角三角形的性质（斜边中线定理）与全等三角形的判定及性质. 第(1)问通过平行线与垂直关系构造直角三角形，结合中点性质完成证明；第(2)问通过 HL 定理证明直角三角形全等，进而得到角相等. 解题关键是准确识别图形中的直角三角形与全等条件，灵活运用几何定理.

15. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $\angle BCA = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$  于点  $D$ ， $E$  在  $AB$  上，且  $AE = EB$ ， $CF$  平分  $\angle BCA$ ，求证： $\angle ECF = \angle DCF$ .



【答案】见详解

【解析】

【分析】要证明  $\angle ECF = \angle DCF$ ，需借助直角三角形的性质（斜边中线、同角的余角相等）、角平分线定义及角的和差关系推导. 首先，由  $E$  是  $AB$  中点且  $\angle BCA = 90^\circ$ ，利用直角三角形斜边中线性质的得  $CE = AE = BE$ ，推出  $\angle A = \angle ACE$ ；再由  $CD \perp AB$ ，结合  $\angle BCA = 90^\circ$ ，通过同角的余角相等得  $\angle A = \angle BCD$ ，进而得  $\angle ACE = \angle BCD$ ；最后，由  $CF$  平分  $\angle BCA$  得  $\angle ACF = \angle BCF = 45^\circ$ ，通过角的和差（ $\angle ECF = \angle ACF - \angle ACE$ ， $\angle DCF = \angle BCF - \angle BCD$ ）证明两角相等.

【详解】证明：在  $\triangle ABC$  中， $\angle BCA = 90^\circ$ ， $E$  是  $AB$  中点（ $AE = EB$ ）.

$$\therefore CE = AE = BE = \frac{1}{2}AB.$$

$$\therefore \angle A = \angle ACE.$$

$$\because CD \perp AB, \text{ 故 } \angle CDA = 90^\circ.$$

$$\text{在 } \triangle ACD \text{ 中, } \angle A + \angle ACD = 90^\circ;$$

$$\text{又在 } \triangle ABC \text{ 中, } \angle A + \angle B = 90^\circ,$$

$$\text{且 } \angle BCA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD + \angle ACD = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle A = \angle BCD.$$

$$\because \angle A = \angle ACE, \quad \angle A = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle BCD.$$

$$\because CF \text{ 平分 } \angle BCA, \text{ 且 } \angle BCA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACF = \angle BCF = \frac{1}{2} \angle BCA = 45^\circ.$$

由角的和差关系:

$$\angle ECF = \angle ACF - \angle ACE = 45^\circ - \angle ACE,$$

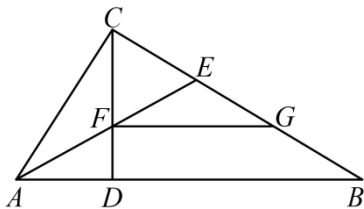
$$\angle DCF = \angle BCF - \angle BCD = 45^\circ - \angle BCD.$$

$$\text{又 } \angle ACE = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle DCF.$$

【点睛】本题需综合运用直角三角形的性质（斜边中线等于斜边一半、同角的余角相等）、角平分线的定义及等边对等角等知识，通过推导角之间的等量关系，利用角的和差完成证明。关键在于把握中线、高、角平分线分别带来的角的等量关系，逐步转化目标角。

16. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ， $AE$  平分  $\angle BAC$  交  $BC$  于点  $E$ ，交  $CD$  于点  $F$ ， $FG \parallel AB$  交  $BC$  于点  $G$ ，判断线段  $CE$  与  $BG$  的数量关系，并证明你的结论。

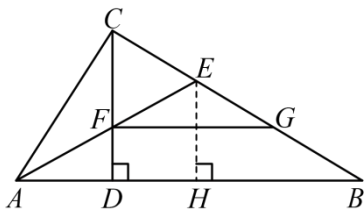


【答案】  $CE = BG$

【解析】

【分析】要判断线段  $CE$  与  $BG$  的数量关系，可通过作辅助线构造全等三角形，结合角平分线的性质、平行线的性质、等腰三角形的判定及全等三角形的判定与性质来推导。

【详解】证明： $CE = BG$ ，理由如下。



过点  $E$  作  $EH \perp AB$  于  $H$ 。

$\because AE$  平分  $\angle BAC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ （即  $EC \perp AC$ ），

$$\therefore EC = EH.$$

$\because CD \perp AB$ ，

$$\therefore \angle ADF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF + \angle AFD = 90^\circ;$$

又  $\angle ACB = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle CAE + \angle CEA = 90^\circ$ ;

$\because AE$  平分  $\angle BAC$ ,

$\therefore \angle CAE = \angle DAF$ ,

$\therefore \angle CEA = \angle AFD$ ;

又  $\angle AFD = \angle CFE$  (对顶角相等),

$\therefore \angle CEA = \angle CFE$ ;

根据等腰三角形的判定 (等角对等边),

$\therefore CE = CF$ ,

则  $CF = EH$ .

$\because FG \parallel AB$ ,

$\therefore \angle CGF = \angle B$ .

又  $\because CD \perp AB$ ,  $EH \perp AB$ ,

$\therefore \angle FCG = \angle EHB = 90^\circ$ .

在  $\triangle CFG$  和  $\triangle EHB$  中:

$$\begin{cases} \angle CGF = \angle B \\ \angle FCG = \angle EHB \\ CF = EH \end{cases}$$

$\therefore \triangle CFG \cong \triangle EHB$  (AAS).

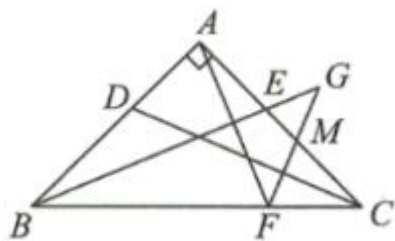
$\therefore CG = EB$ .

$\therefore CG - EG = EB - EG$ ,

即  $CE = BG$ .

**【点睛】** 本题综合运用了角平分线的性质、平行线的性质、等腰三角形的判定及全等三角形的判定与性质. 通过作辅助线  $EH \perp AB$  构造全等三角形, 是突破解题关键的核心步骤.

17. 在等腰直角三角形  $ABC$  中,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AD = AE$ ,  $AF \perp BE$  交  $BC$  于点  $F$ , 过  $F$  作  $FG \perp CD$  交  $BE$  的延长线于点  $G$ , 求证:  $BG = AF + FG$ .

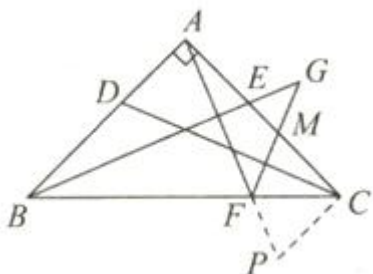


**【答案】** 见解析

【解析】

【分析】过C作AB的平行线交AF的延长线于P, 证明 $\triangle ABE \cong \triangle CAP$ ,  $\triangle MCF \cong \triangle PCF$ , 得 $BE=AP$ .  $MF=PF$ ,  $EG=MG$ , 即可推出答案.

【详解】证明: 过点C作 $CP \parallel AB$ , 交AF的延长线于P,



易证 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ,

$$\therefore \angle ABE = \angle ACD,$$

$$\because \angle BAP + \angle ABE = 90^\circ, \angle ACD + \angle FMC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BAP = \angle FMC,$$

又 $\because AB \parallel PC$ ,

$$\therefore \angle BAP = \angle P$$

$$\therefore \angle FMC = \angle P.$$

$$\because AF \perp BE, \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle ACP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\because AF \perp BE,$$

$$\therefore \angle PAC + \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle PAC,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CAP,$$

$$\therefore BE = AP.$$

$$\because CP \parallel AB, \angle ACP = 90^\circ, \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle MCF = \angle PCF = 45^\circ,$$

$$\therefore \begin{cases} \angle FMC = \angle P \\ \angle MCF = \angle PCF \\ CF = CF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle MCF \cong \triangle PCF,$$

$$\therefore MF=PF, \quad \angle P=\angle FMC,$$

$$\text{又} \because \angle FMC=\angle GME,$$

$$\therefore \angle GEM=\angle GME,$$

$$\therefore GE=GM,$$

$$\text{则 } BG=BE+EG=AP+MG$$

$$=AF+FP+MG$$

$$=AF+FM+MG$$

$$=AF+FG,$$

【点睛】此题考查全等三角形的判定与性质，等腰直角三角形，解题关键在于作辅助线

18. 已知  $A(4,3)$ ,  $O(0,0)$ , 在坐标轴上求点  $B$ , 使  $AOB$  是等腰三角形.

$$\text{【答案】 } (5,0) \text{ 或 } (-5,0) \text{ 或 } (8,0) \text{ 或 } \left(\frac{25}{8}, 0\right) \text{ 或 } (0,5) \text{ 或 } (0,-5) \text{ 或 } (0,6) \text{ 或 } \left(0, \frac{25}{6}\right)$$

【解析】

【分析】本题考查了两点之间的距离公式、等腰三角形的定义、利用平方根解方程、点的坐标，熟练掌握等腰三角形的定义是解题关键. 分两种情况：①当点  $B$  在  $x$  轴上时，②当点  $B$  在  $y$  轴上时，先分别求出  $OA^2$ ,  $AB^2$ ,  $OB^2$  的长，再根据等腰三角形的定义建立方程，解方程即可得.

【详解】解：①当点  $B$  在  $x$  轴上时，

设点  $B$  的坐标为  $(a,0)$ ,

$$\therefore A(4,3), \quad O(0,0),$$

$$\therefore OA^2 = (4-0)^2 + (3-0)^2 = 25,$$

$$AB^2 = (4-a)^2 + (3-0)^2 = a^2 - 8a + 25,$$

$$OB^2 = (a-0)^2 + (0-0)^2 = a^2,$$

(I) 当  $OA=OB$  时,  $AOB$  是等腰三角形,

则  $OA^2 = OB^2$ , 即  $a^2 = 25$ , 解得  $a = \pm 5$ ,

此时点  $B$  的坐标为  $(5,0)$  或  $(-5,0)$ ;

(II) 当  $OA=AB$  时,  $AOB$  是等腰三角形,

则  $OA^2 = AB^2$ , 即  $(4-a)^2 + (3-0)^2 = (4-0)^2 + (3-0)^2$ ,

整理得:  $(4-a)^2 = 16$ ,

$$4-a = \pm 4,$$

解得  $a = 8$  或  $a = 0$  (舍去),

此时点  $B$  的坐标为  $(8, 0)$ ;

(Ⅲ) 当  $AB = OB$  时,  $AOB$  是等腰三角形,

则  $AB^2 = OB^2$ , 即  $a^2 - 8a + 25 = a^2$ , 解得  $a = \frac{25}{8}$ ,

此时点  $B$  的坐标为  $\left(\frac{25}{8}, 0\right)$ ;

②当点  $B$  在  $y$  轴上时,

设点  $B$  的坐标为  $(0, b)$ ,

$$\therefore A(4, 3), O(0, 0),$$

$$\therefore OA^2 = (4-0)^2 + (3-0)^2 = 25,$$

$$AB^2 = (4-0)^2 + (3-b)^2 = b^2 - 6b + 25,$$

$$OB^2 = (0-0)^2 + (b-0)^2 = b^2,$$

(Ⅰ) 当  $OA = OB$  时,  $AOB$  是等腰三角形,

则  $OA^2 = OB^2$ , 即  $b^2 = 25$ , 解得  $b = \pm 5$ ,

此时点  $B$  的坐标为  $(0, 5)$  或  $(0, -5)$ ;

(Ⅱ) 当  $OA = AB$  时,  $AOB$  是等腰三角形,

则  $OA^2 = AB^2$ , 即  $(4-0)^2 + (3-b)^2 = (4-0)^2 + (3-0)^2$ ,

整理得:  $(3-b)^2 = 9$ ,

$$3-b = \pm 3,$$

解得  $b = 6$  或  $b = 0$  (舍去),

此时点  $B$  的坐标为  $(0, 6)$ ;

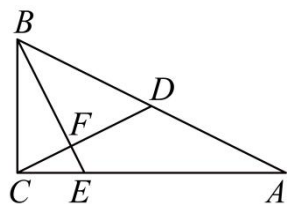
(Ⅲ) 当  $AB = OB$  时,  $AOB$  是等腰三角形,

则  $AB^2 = OB^2$ , 即  $b^2 - 6b + 25 = b^2$ , 解得  $b = \frac{25}{6}$ ,

此时点  $B$  的坐标为  $\left(0, \frac{25}{6}\right)$ ;

综上, 点  $B$  的坐标为  $(5, 0)$  或  $(-5, 0)$  或  $(8, 0)$  或  $\left(\frac{25}{8}, 0\right)$  或  $(0, 5)$  或  $(0, -5)$  或  $(0, 6)$  或  $\left(0, \frac{25}{6}\right)$ .

19. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $D$  是  $AB$  的中点, 过点  $B$  作  $\angle CBE = \angle A$ ,  $BE$  与射线  $CA$  相交于点  $E$ , 与射线  $CD$  相交于点  $F$ .



(1) 如图, 当点  $E$  在线段  $CA$  上时, 求证:  $BE \perp CD$ ;

(2) 若  $BE = CD$ , 那么线段  $AC$  与  $BC$  之间具有怎样的数量关系? 并证明你所得到的结论;

(3) 若  $\triangle BDF$  是等腰三角形, 求  $\angle A$  的度数.

**【答案】** (1) 证明见解析; (2)  $AC = 2BC$ ; (3)  $22.5^\circ$  或  $67.5^\circ$ .

**【解析】**

**【分析】** (1) 根据角之间的等量关系及中点的特点即可得出答案;

(2) 根据题意易证  $\triangle BCE \sim \triangle ACB$ , 根据相似三角形比例关系即可得出结论;

(3) 分①点  $E$  在线段  $CA$  上时; ②点  $E$  在线段  $CA$  延长线上讨论求解.

**【详解】** (1)  $\because \angle ACB = 90^\circ$ ,  $D$  是  $AB$  的中点,  $\therefore CD = AD$ ,  $\therefore \angle A = \angle DCA$ .

$\because \angle CBE = \angle A$ ,  $\therefore \angle DCA = \angle CBE$ .

$\because \angle CBE + \angle BEC = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle BEC + \angle DCA = 90^\circ$ ,  $\therefore BE \perp CD$ ;

(2) 线段  $AC$  与  $BC$  之间的数量关系是:  $AC = 2BC$ .

$\because \angle CBE = \angle A$ ,  $\angle BCE = \angle ACB$ ,  $\therefore \triangle BCE \sim \triangle ACB$ ,  $\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{BE}{AB}$ .

$\because BE = CD$ ,  $\frac{CD}{AB} = \frac{1}{2}$ ,  $\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$ ,  $\therefore AC = 2BC$ .

(3)  $\because \triangle BDF$  是等腰三角形,  $\angle BFD = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle BDF = 45^\circ$ .

①当点  $E$  在线段  $CA$  上时, 如图 1,  $\angle A = \frac{1}{2} \angle BDF = 22.5^\circ$ ;

②当点  $E$  在线段  $CA$  延长线上时, 如图 2,  $\angle CDA = \angle BDF = 45^\circ$ ,  $\angle BAC = \frac{180^\circ - \angle CDA}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67.5^\circ$ .

综上所述:  $\angle BAC$  的度数为  $22.5^\circ$  或  $67.5^\circ$ .

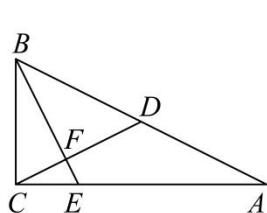


图1

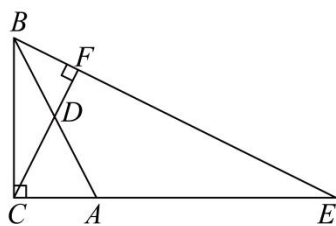


图2

【点睛】 本题考查了直角三角形斜边中线的性质及相似三角形的证明及性质，难度适中.

### 考试及作业原题系列

#### 一、填空题 ( $4 \times 4 = 16$ )

20. 已知点  $A(-2, 7)$  和点  $B(6, -19)$ ，则线段  $AB$  的中点坐标为\_\_\_\_\_.

【答案】  $(2, -6)$

【解析】

【分析】 本题考查的是中点坐标计算，解题的关键在于准确代入数值并注意正负号的运算. 已知两点  $A(-2, 7)$  和  $B(6, -19)$ ，要求线段  $AB$  的中点坐标. 根据中点坐标公式，横坐标为两点横坐标之和的一半，纵坐标为两点纵坐标之和的一半，直接代入计算即可得出结果.

【详解】 解：点  $A$  坐标为  $(-2, 7)$ ，点  $B$  坐标为  $(6, -19)$ ，

则  $AB$  中点横坐标为  $(-2 + 6) \div 2 = 4 \div 2 = 2$ ，纵坐标为  $[7 + (-19)] \div 2 = (-12) \div 2 = -6$ ，

故中点坐标为  $(2, -6)$ .

21. 已知直线  $AB$  可表示为直线  $y = 2$ ，点  $O$  到直线  $AB$  的距离为 3，则点  $O$  的轨迹是\_\_\_\_\_.

【答案】 两条直线：  $y = 5$  或  $y = -1$

【解析】

【分析】 本题考查了点到直线的距离，根据点到直线的距离公式，设点  $O$  的坐标为  $(x, y)$ ，则点  $O$  到直线  $y = 2$  的距离为  $|y - 2|$ ，令其等于 3，解方程可得点  $O$  的轨迹，熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】 解：  $\because$  直线  $AB$  可表示为直线  $y = 2$ ，点  $O$  到直线  $AB$  的距离为 3，

$\therefore$  设点  $O$  的坐标为  $(x, y)$ ，

$\therefore$  点  $O$  到直线  $y = 2$  的距离为  $|y - 2|$ .

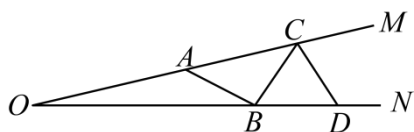
由题意可得:  $|y-2|=3$ ,

解得:  $y=5$  或  $y=-1$ ,

$\therefore$  点  $O$  的轨迹是两条直线:  $y=5$  或  $y=-1$ ,

故答案为: 两条直线:  $y=5$  或  $y=-1$ .

22. 如图, 设  $\angle MON = 15^\circ$ ,  $A$  为  $OM$  上一点,  $OA = 6\sqrt{2}$ ,  $D$  为  $ON$  上一点,  $OD = 10$ ,  $C$  为  $AM$  上任意一点,  $B$  是  $OD$  上任意一点, 那么折线  $AB + BC + CD$  的长度最小值为\_\_\_\_\_.

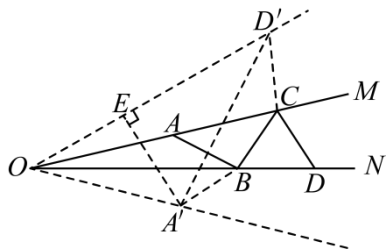


【答案】  $2\sqrt{13}$

【解析】

【分析】 本题考查了轴对称-最短路径问题, 此题要考虑两个点的对称点, 将折线转化为线段的问题, 并转化到直角三角形内利用勾股定理解答是解题的关键. 作  $A$  关于  $ON$  的对称点  $A'$ ,  $D$  关于  $OM$  的对称点  $D'$ , 作  $A'E \perp OD$ , 连接  $A'B$ ,  $CD'$ , 求出  $AB + BC + CD = A'B + BC + CD' \geq A'D'$ , 再求出  $OE = A'E = 6$ , 从而求出  $ED' = 4$ , 最后利用勾股定理解答即可.

【详解】 解: 如图, 作  $A$  关于  $ON$  的对称点  $A'$ ,  $D$  关于  $OM$  的对称点  $D'$ , 作  $A'E \perp OD$ ,



连接  $A'B$ ,  $CD'$ , 则  $A'B = AB$ ,  $CD' = CD$ ,

$\therefore AB = A'B$ ,  $OA = OA'$ ,  $CD = CD'$ ,  $OD = OD'$ ,

$\therefore AB + BC + CD = A'B + BC + CD' \geq A'D'$ ,

$\therefore \angle MON = \angle A'ON = \angle MOD' = 15^\circ$ ,

$\therefore \angle A'OD' = 45^\circ$ ,

$\because A'E \perp OD$ ,

$\therefore \angle A'EO = \angle A'ED' = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle A'OD' = \angle OA'E = 45^\circ$ ,

$\therefore OE = A'E$ ,

$$\therefore OA' = OA = 6\sqrt{2},$$

$$OE = OE = 6, OD = OD = 10,$$

$$ED = OD - OE = 10 - 6 = 4,$$

$$\text{在直角 } \triangle A'ED' \text{ 中, } A'D' = \sqrt{A'E^2 + DE^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13},$$

故答案为:  $2\sqrt{13}$ .

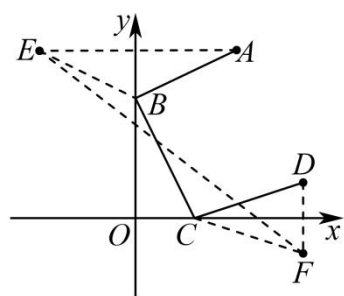
23. 平面内四个点  $A(3,5)$ 、 $B(0,y)$ 、 $C(x,0)$ 、 $D(5,1)$  将他们顺次联结, 则折线  $AB + BC + CD$  的最小值为\_\_\_\_\_.

【答案】 10

【解析】

【分析】 本题考查了两点之间的距离公式、点坐标与轴对称变换、两点之间线段最短, 熟练掌握点坐标与轴对称变换规律是解题关键. 作点  $A(3,5)$  关于  $y$  轴的对称点  $E(-3,5)$ , 作点  $D(5,1)$  关于  $x$  轴的对称点  $F(5,-1)$ , 根据轴对称的性质可得  $EB = AB$ ,  $CF = CD$ , 则  $AB + BC + CD = EB + BC + CF$ , 再根据两点之间线段最短可得当点  $E, B, C, F$  共线时,  $EB + BC + CF$  的值最小, 最小值为  $EF$  的长, 由此即可得.

【详解】 解: 如图, 作点  $A(3,5)$  关于  $y$  轴的对称点  $E(-3,5)$ , 作点  $D(5,1)$  关于  $x$  轴的对称点  $F(5,-1)$ ,



$$\therefore EB = AB, CF = CD,$$

$$\therefore AB + BC + CD = EB + BC + CF,$$

由两点之间线段最短可知, 当点  $E, B, C, F$  共线时,  $EB + BC + CF$  的值最小, 最小值为

$$EF = \sqrt{(5+3)^2 + (-1-5)^2} = 10,$$

$\therefore$  折线  $AB + BC + CD$  的最小值为 10.

故答案为: 10.

## 二、解答题 (6+7+11+10)

24. 求证: 点  $A(5,1)$  和点  $B(1,5)$  关于第一象限的角平分线 (直线  $y=x$ ) 对称.

【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的性质, 等腰三角形的判定与性质, 直线  $AB$  的解析式为  $y = -x + 6$ , 令直线  $AB$  交  $y$  轴于点  $C$ , 交  $x$  轴于点  $D$ , 则  $OC = OD = 6$ , 从而可得  $\angle OCD = \angle ODC = 45^\circ$ , 设点  $A$  和  $B$  的中点为  $E$ , 由题意可得, 点  $A$  和  $B$  的中点坐标为  $\left(\frac{5+1}{2}, \frac{1+5}{2}\right)$ , 即  $E(3,3)$ , 求出点  $A$  和  $B$  的中点坐标在直线  $y=x$  上, 由直线  $y=x$  可得  $\angle EOD = 45^\circ$ , 计算得出  $\angle OED = 90^\circ$ , 即  $OE \perp AB$ , 即可得证, 熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

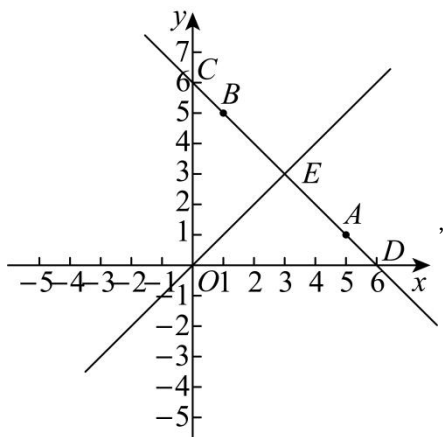
【详解】证明: 设直线  $AB$  的解析式为  $y = kx + b (k \neq 0)$ ,

将  $A(5,1)$ ,  $B(1,5)$  代入解析式可得 
$$\begin{cases} 5k + b = 1 \\ k + b = 5 \end{cases},$$

解得: 
$$\begin{cases} k = -1 \\ b = 6 \end{cases},$$

$\therefore$  直线  $AB$  的解析式为  $y = -x + 6$ ,

如图: 令直线  $AB$  交  $y$  轴于点  $C$ , 交  $x$  轴于点  $D$ ,



当  $x=0$  时,  $y=6$ , 即  $C(0,6)$ ,

当  $y=0$  时,  $-x+6=0$ , 解得  $x=6$ , 即  $D(6,0)$ ,

$\therefore OC = OD = 6$ ,

$\therefore \angle OCD = \angle ODC = 45^\circ$ ,

设点  $A$  和  $B$  的中点为  $E$ ,

由题意可得, 点  $A$  和  $B$  的中点坐标为  $\left(\frac{5+1}{2}, \frac{1+5}{2}\right)$ , 即  $E(3,3)$ ,

在直线  $y=x$  中, 当  $x=3$  时,  $y=3$ ,

$\therefore$  点  $A$  和  $B$  的中点坐标在直线  $y=x$  上,

由直线  $y=x$  可得  $\angle EOD = 45^\circ$ ,

$\therefore \angle OED = 180^\circ - \angle EOD - \angle EDO = 90^\circ$ ,

$\therefore OE \perp AB$ ,

$\therefore$  点  $A(5,1)$  和点  $B(1,5)$  关于第一象限的角平分线 (直线  $y=x$ ) 对称.

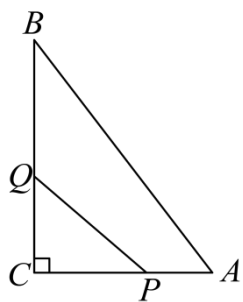
25. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $CA = 6$ ,  $CB = 8$ , 点  $P$  从点  $A$  出发, 沿  $AC$  以 1 个单位每秒的速度向  $C$  运动, 点  $Q$  从点  $C$  出发, 沿  $CB$  以 2 个单位每秒的速度向  $B$  运动, 当  $PQ = 4\sqrt{2}$  时, 时间  $t$  的值为多少?

**【答案】** 2 或  $\frac{2}{5}$

**【解析】**

**【分析】** 本题考查了勾股定理、利用平方根解方程, 熟练掌握勾股定理是解题关键. 先画出图形, 求出  $PC, CQ$  的长, 再在  $\text{Rt}\triangle CPQ$  中, 利用勾股定理建立方程, 利用平方根解方程即可得.

**【详解】** 解: 画出图形如下:



由题意可知,  $PA = t$ ,  $CQ = 2t$ , 点  $P$  从点  $A$  出发沿  $AC$  运动到点  $C$  所需时间为  $\frac{AC}{1} = 6$  (秒), 点  $Q$  从点

$C$  出发沿  $CB$  运动到点  $B$  所需时间为  $\frac{BC}{2} = \frac{8}{2} = 4$  (秒),

$\therefore CA = 6$ ,

$\therefore PC = CA - PA = 6 - t$ ,

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle CPQ$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $PQ = 4\sqrt{2}$ ,

$$\therefore PC^2 + CQ^2 = PQ^2, \text{ 即 } (6-t)^2 + (2t)^2 = (4\sqrt{2})^2,$$

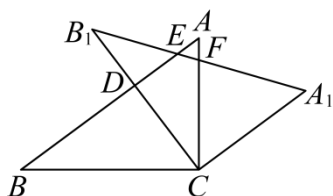
$$\text{整理得: } \left(t - \frac{6}{5}\right)^2 = \frac{16}{25},$$

$$\therefore t - \frac{6}{5} = \frac{4}{5} \text{ 或 } t - \frac{6}{5} = -\frac{4}{5},$$

$$\therefore t = 2 \text{ 或 } t = \frac{2}{5}, \text{ 均符合题意;}$$

综上, 时间  $t$  的值为 2 或  $\frac{2}{5}$ .

26. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = 15$ ,  $BC = 20$ , 将  $\triangle ABC$  绕点  $C$  按顺时针方向旋转得到  $\triangle A_1B_1C_1$ ,  $A_1B_1$  分别交  $AB$ 、 $AC$  于点  $E$ 、 $F$ , 且  $A_1F = FB_1$ ,  $B_1C$  交  $AB$  于点  $D$ , 求  $DE$  的长.



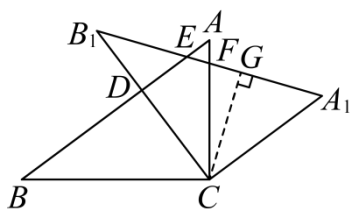
【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了旋转的性质, 等边对等角, 直角三角形中斜边上的中线等于斜边的一半, 勾股定理. 根据题意得出  $AB \perp B_1C$ , 勾股定理求得  $AB$ , 等面积法求得  $CD = CG = 12$ , 进而根据等面积法求得  $\frac{DE}{B_1E} = \frac{3}{5}$

设  $DE = 3k$ ,  $B_1E = 5k$ , 在  $\text{Rt}\triangle B_1DE$  中,  $DB_1 = 4k$ , 根据  $DB_1 = 8$ , 求得  $k = 2$ , 进而求得  $DE$  的长, 即可求解.

【详解】 解: 如图, 过点  $C$  作  $CG \perp A_1B_1$ ,



$\therefore$  将  $\triangle ABC$  绕点  $C$  按顺时针方向旋转得到  $\triangle A_1B_1C_1$ ,

$\therefore \angle B = \angle B_1$ ,  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A_1B_1C_1}$ ,  $AB = A_1B_1$ ,  $CB = CB_1$

$\therefore A_1F = FB_1$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,

$$\therefore FB_1 = FC$$

$$\therefore \angle B_1 = \angle FCB_1$$

$$\therefore \angle B = \angle FCB_1$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle A = 90^\circ$$

$$\therefore \angle FCB_1 + \angle A = 90^\circ$$

$$\therefore AB \perp B_1C,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ADB_1 = \angle BDC = 90^\circ$$

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = 15$ ,  $BC = 20$ ,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 25,$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \times BC = \frac{1}{2} AB \times CD$$

$$\therefore CD = \frac{AC \times BC}{AB} = 9$$

$$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB_1C_1}, \quad AB = A_1B_1$$

$$\therefore \frac{1}{2} AB \times CD = \frac{1}{2} A_1B_1 \times CG$$

$$\therefore CD = CG = 9$$

$$\because S_{\triangle B_1EC} = \frac{1}{2} B_1C \times DE = \frac{1}{2} B_1E \times CG, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times CD = \frac{1}{2} AC \times BC$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2} CB_1 \times DE}{B_1E} = \frac{\frac{1}{2} AC \times BC}{AB}$$

$$\text{即 } \frac{DE}{B_1E} = \frac{AC}{AB}$$

$$\therefore \frac{DE}{B_1E} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

设  $DE = 3k$ ,  $B_1E = 5k$

在  $\text{Rt}\triangle B_1DE$  中,  $DB_1 = 4k$

又  $\because DB_1 = CB_1 - CD = 20 - 12 = 8$

$$\therefore k = 2$$

$$\therefore DE = 3k = 6$$

27. 在  $ABC$  中,  $AB = AC$ ,  $\angle A = 3\angle B$ .

(1) 求证:  $BC^2 - AB^2 = AB \cdot BC$ ;

(2) 求  $BC:AB$  的值.

【答案】(1) 证明见解析

$$(2) \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

【解析】

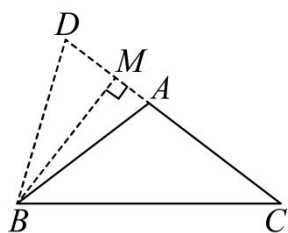
【分析】本题考查了等腰三角形的判定与性质、勾股定理、解一元二次方程, 利用辅助线构建直角三角形, 熟练掌握勾股定理是解题关键.

(1) 延长  $CA$  至点  $D$ , 使得  $CD = CB$ , 过点  $B$  作  $BM \perp CD$  于点  $M$ , 先根据等腰三角形的判定与性质可得  $BD = AB = AC$ ,  $AM = DM$ , 再利用勾股定理可得  $BC^2 = BM^2 + CM^2$ ,  $AB^2 = BM^2 + AM^2$ , 代入化简即可得;

(2) 先根据 (1) 的结果可得  $\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 - \frac{BC}{AB} - 1 = 0$ , 再设  $\frac{BC}{AB} = x (x > 0)$ , 则  $x^2 - x - 1 = 0$ , 解方程即可得.

【小问 1 详解】

证明: 由题意, 画出图形如下, 如图, 延长  $CA$  至点  $D$ , 使得  $CD = CB$ , 过点  $B$  作  $BM \perp CD$  于点  $M$ ,



$\therefore$  在  $ABC$  中,  $AB = AC$ ,

$$\therefore \angle ABC = \angle C,$$

$$\therefore \angle BAC = 3\angle ABC, \angle BAC + \angle ABC + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore 3\angle ABC + \angle ABC + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ABC + \angle C = 72^\circ,$$

$$\because CD = CB,$$

$$\therefore \angle D = \angle CBD = \frac{180^\circ - \angle C}{2} = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle D,$$

$$\therefore BD = AB = AC,$$

$$\therefore BM \perp CD,$$

$$\therefore AM = DM,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BCM \text{ 中, } BC^2 = BM^2 + CM^2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABM \text{ 中, } AB^2 = BM^2 + AM^2,$$

$$\therefore BC^2 - AB^2 = (BM^2 + CM^2) - (BM^2 + AM^2)$$

$$= CM^2 - AM^2$$

$$= (CM + AM)(CM - AM)$$

$$= (CM + DM) \cdot AC$$

$$= CD \cdot AC$$

$$= AB \cdot BC.$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: 由 (1) 已证: } BC^2 - AB^2 = AB \cdot BC,$$

$$\therefore \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 - 1 = \frac{BC}{AB}, \text{ 即 } \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 - \frac{BC}{AB} - 1 = 0,$$

$$\text{设 } \frac{BC}{AB} = x (x > 0), \text{ 则 } x^2 - x - 1 = 0,$$

$$\text{整理得: } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4},$$

$$\therefore x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } x - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ 或 } x = \frac{-\sqrt{5}+1}{2} < 0 \text{ (不符合题意, 舍去),}$$

$$\therefore BC : AB = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

