

2025 学年第一学期初二年级数学假期作业一

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列计算正确的是 ()

- A. $\sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3}$ B. $\sqrt{36} = \pm 6$ C. $\sqrt{(-3)^2} = -3$ D. $\sqrt[3]{-9} = -3$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了求一个数的算术平方根和立方根, 根据 $\sqrt{a^2} = |a|$, $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a^3} = a$ 进行求解判断即可.

【详解】解: A、 $\sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3}$, 原式计算正确, 符合题意;

B、 $\sqrt{36} = 6$, 原式计算错误, 不符合题意;

C、 $\sqrt{(-3)^2} = 3$, 原式计算错误, 不符合题意;

D、 $\sqrt[3]{-9} \neq -3$, 原式计算错误, 不符合题意;

故选: A.

2. 在 -3 , 3.1415926 , $\frac{\pi}{3}$, π^2 , $7.\dot{8}\dot{6}$, $\frac{10}{3}$, $0.1010010001\dots$ (相邻两个 1 之间 0 的个数逐次加 1) 中, 无理数有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了无理数的定义, 熟记无限不循环小数为无理数是解题的关键. 根据无理数的定义即可求解.

【详解】解: 在 -3 , 3.1415926 , $\frac{\pi}{3}$, π^2 , $7.\dot{8}\dot{6}$, $\frac{10}{3}$, $0.1010010001\dots$ (相邻两个 1 之间 0 的个数逐次加 1) 中,

无理数有 $\frac{\pi}{3}$, π^2 , $0.1010010001\dots$ (相邻两个 1 之间 0 的个数逐次加 1), 有 3 个.

故选: C.

3. 下列根式中, 是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{ab^3}$ B. $\sqrt{a+b^3}$ C. $\sqrt{a^2+b^2+2ab}$ D. $\sqrt{8a}$

【答案】B

【解析】

【分析】此题考查了最简二次根式，根据最简二次根式的定义：被开方数中不含能开得尽方的因数或因式；被开方数是整数，因式是整式，进行逐一判断即可，熟练掌握最简二次根式的定义是解题的关键.

【详解】解：A、 $\sqrt{ab^3} = \sqrt{ab \cdot b^2}$ ，被开方数中含能开得尽方的因式 b^2 ，不是最简二次根式，该选项不合题意；

B、 $\sqrt{a+b^3}$ 是最简二次根式，该选项符合题意；

C、 $\sqrt{a^2+b^2+2ab} = \sqrt{(a+b)^2}$ ，被开方数中含能开得尽方的因式 $(a+b)^2$ ，不是最简二次根式，该选项不合题意；

D、 $\sqrt{8a} = \sqrt{4 \times 2a}$ 被开方数中含能开得尽方的因数4，不是最简二次根式，该选项不合题意；

故选：B.

4. 下列说法正确的是（ ）

A. 正实数和负实数统称实数

B. 正数、0和负数统称有理数

C. 正有理数和负有理数统称有理数

D. 无理数和有理数统称实数

【答案】D

【解析】

【分析】此题主要考查实数的定义和分类，解题的关键是熟知实数的定义，根据实数的定义判断即可.

【详解】解：A. 正实数、零和负实数统称实数，原说法错误；

B. 正有理数、0和负有理数统称有理数，原说法错误；

C. 正有理数、零和负有理数统称有理数，原说法错误；

D. 无理数和有理数统称实数，说法正确；

故选：D.

5. 若 $\sqrt{2x-1} + \sqrt{1-2x} + y = 4$ ，则 xy 的值为（ ）

A. -1

B. 1

C. 2

D. 不能确定

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了二次根式有意义的条件，求代数式的值，熟练掌握二次根式有意义的条件，是解答本题的关键.

先根据二次根式有意义的条件求出 x 的值，进而求出 y 的值，然后代入 xy 计算.

【详解】解： $\because \sqrt{2x-1} + \sqrt{1-2x} + y = 4$,

$$\therefore 2x-1 \geq 0, \quad 1-2x \geq 0,$$

$$\therefore x = \frac{1}{2},$$

$$\therefore y = 4,$$

$$\therefore xy = \frac{1}{2} \times 4 = 2.$$

故选：C.

6. 化简 $\sqrt{23-6\sqrt{10+4\sqrt{3-2\sqrt{2}}}}$ 的结果是 ()

A. $3+\sqrt{2}$

B. $3-2\sqrt{2}$

C. $3+2\sqrt{2}$

D. $3-\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查二次根式的运算，根据二次根式的性质简结合利用完全平方公式计算即可解题.

【详解】解：原式 $= \sqrt{23-6\sqrt{10+4\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}}$

$$= \sqrt{23-6\sqrt{10+4\sqrt{2}}-4}$$

$$= \sqrt{23-6\sqrt{4\sqrt{2}+6}}$$

$$= \sqrt{23-6\sqrt{(2+\sqrt{2})^2}}$$

$$= \sqrt{23-12-6\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{11-6\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{(3-\sqrt{2})^2}$$

$$= 3-\sqrt{2},$$

故选：D.

二、填空题 (本大题共 12 小题，每小题 2 分，满分 24 分)

7. 64 的平方根是_____.

【答案】 ± 8

【解析】

【分析】 本题考查平方根，掌握相关知识是解决问题的关键. 若 $x^2 = a$ ，则 x 是 a 的平方根，根据平方根的定义进行解答即可.

【详解】 解：64 的平方根是 ± 8 .

故答案为： ± 8 .

8. $\sqrt[3]{-125}$ 的立方根是_____.

【答案】 $-\sqrt[3]{5}$

【解析】

【分析】 本题考查立方根，掌握相关知识是解决问题的关键. 根据立方根的计算法则进行解答即可.

【详解】 解： $\sqrt[3]{-125} = -5$,

-5 的立方根为 $\sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5}$.

故答案为： $-\sqrt[3]{5}$.

9. 如果代数式 $\frac{3}{\sqrt{x-2}}$ 有意义，则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x > 2$

【解析】

【分析】 本题考查代数式有意义，根据二次根式的被开方数为非负数，分式的分母不为 0，进行求解即可.

【详解】 解：由题意，得： $x - 2 > 0$,

$\therefore x > 2$;

故答案为： $x > 2$

10. 比较大小： $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ _____ $\frac{1}{2}$.

【答案】 $<$

【解析】

【分析】 本题考查了实数的大小比较，无理数的估算，熟练掌握实数的大小比较方法是解题的关键；根据估算 $1 < \sqrt{3} < 2$ 和 $0 < \sqrt{3} - 1 < 1$ 的大小，推出结果.

【详解】 解：因为 $1 < 3 < 4$

所以 $1 < \sqrt{3} < 2$,

所以 $0 < \sqrt{3} - 1 < 1$,

所以 $\frac{\sqrt{3}-1}{2} < \frac{1}{2}$.

故答案为: $<$.

11. 若 $3-x$ 的平方根只有一个, 则 x 的值是_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查平方根的性质, 根据 0 的平方根是 0, 只有一个, 得到 $3-x=0$, 进行求解即可.

【详解】 解: $\because 3-x$ 的平方根只有一个,

$$\therefore 3-x=0,$$

$$\therefore x=3;$$

故答案为: 3.

12. 若最简二次根式 $^{2a-4}\sqrt{3a+b}$ 与 $\sqrt{a-b}$ 是同类根式, 则 $a-2b=$ _____.

【答案】 9

【解析】

【分析】 本题主要考查同类二次根式及最简二次根式, 熟练掌握同类二次根式的概念是解题的关键; 由题意得 $\begin{cases} 2a-4=2 \\ 3a+b=a-b \end{cases}$, 然后问题可求解.

【详解】 解: 由题意得:

$$\begin{cases} 2a-4=2 \\ 3a+b=a-b \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=3 \\ b=-3 \end{cases},$$

$$\therefore a-2b=3-2 \times (-3)=9;$$

故答案为 9.

13. 如果 $\sqrt[3]{2.37} \approx 1.333$, $\sqrt[3]{23.7} \approx 2.872$, 那么 $\sqrt[3]{2370}$ 约等于_____.

【答案】 13.33

【解析】

【分析】 根据立方根的性质, 即可解答.

【详解】解： $\because \sqrt[3]{2.37} \approx 1.333$,

$$\therefore \sqrt[3]{2370} = \sqrt[3]{2.37 \times 1000} \approx 1.333 \times 10 = 13.33,$$

故答案为：13.33.

【点睛】本题考查了立方根，解决本题的关键是熟记立方根的性质.

14. 已知 $x = \sqrt{13} + 1$ ，则 $x^2 - 2x + 2 =$ _____.

【答案】14

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的性质，完全平方公式，先把 $x^2 - 2x + 2$ 变形为 $(x-1)^2 + 1$ ，然后把 $x = \sqrt{13} + 1$ 代入求值即可，熟练掌握运算是解题的关键.

【详解】解：由 $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$,

$$\because x = \sqrt{13} + 1,$$

$$\therefore \text{原式} = (\sqrt{13} + 1 - 1)^2 + 1$$

$$= (\sqrt{13})^2 + 1$$

$$= 13 + 1$$

$$= 14,$$

故答案为：14.

15. 如图，数轴上点 A 为线段 BC 的中点， A, B 两点表示的数分别为 -1 和 $\sqrt{3}$ ，则点 C 所表示的数为_____.



【答案】 $-2 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题考查了数轴上两点之间的距离、实数与数轴，依题意得：点 A 表示的数为 -1 ，点 B 表示的数为 $\sqrt{3}$ ，进而可得 $AB = 1 + \sqrt{3}$ ，再根据点 A 为线段 BC 的中点即可求解，熟练掌握基础知识是解题的关键.

【详解】解：依题意得：点 A 表示的数为 -1 ，点 B 表示的数为 $\sqrt{3}$ ，

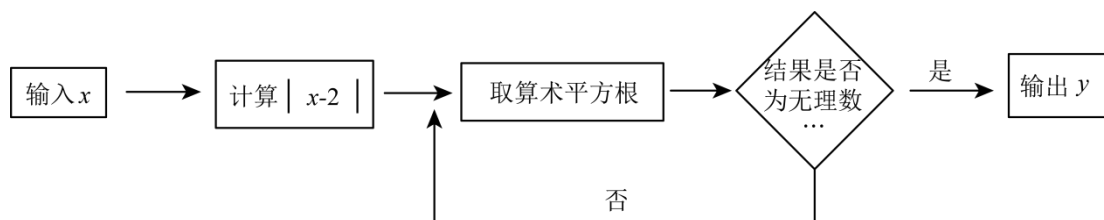
$$\text{则 } AB = \sqrt{3} - (-1) = 1 + \sqrt{3},$$

$\because$ 点 A 为线段 BC 的中点，

∴ 点 C 所表示的数为: $-1 - (1 + \sqrt{3}) = -2 - \sqrt{3}$,

故答案为: $-2 - \sqrt{3}$.

16. 如图是一个数值转换机示意图, 当输入 x 的值为 -7 时, 则输出 y 的值为 _____.



【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了算术平方根, 无理数, 绝对值, 理解框图中的运算法则是解题的关键.

当输入 x 的值为 -7 时, 根据数值转换机示意图运算法则计算, 如果结果为无理数, 则输出, 否则再求其算术平方根, 直至结果为无理数为止.

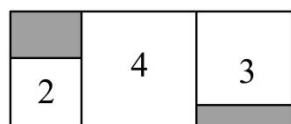
【详解】 解: 当输入 x 的值为 -7 时, $|-7-2| = |-9| = 9$, $\sqrt{9} = 3$, 是有理数,

∴ 3 的算术平方根是 $\sqrt{3}$, 为无理数,

∴ 输出 y 的值为 $\sqrt{3}$,

故答案为: $\sqrt{3}$.

17. 如图, 矩形内三个相邻的正方形的面积分别为 4 , 3 , 2 , 则图中阴影部分的面积为_____.



【答案】 $2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 5$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的应用. 先表示出三个正方形的边长, 然后用一个长为 $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$, 宽为 2 的矩形的面积减去两个正方形的面积, 可得到图中阴影部分的面积.

【详解】 解: 由题意得三个正方形的边长分别为 $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, 2 ,

图中阴影部分的面积: $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \times 2 - 2 - 3 = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 5$.

故答案为: $2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 5$.

18. 定义: 因为 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$, 可以有效的去掉根号, 我们称 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ 与 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ 为一对“对偶式”. 若 $\sqrt{18-x} - \sqrt{11-x} = 1$, 则 $\sqrt{18-x} + \sqrt{11-x} = \underline{\quad}$.

【答案】 7

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的运算, 熟练掌握二次根式的乘法运算及题中所给运算是解题的关键. 易知 $\sqrt{18-x} + \sqrt{11-x}$ 与 $\sqrt{18-x} - \sqrt{11-x}$ 是一对“对偶式”, 可根据

$$\sqrt{18-x} + \sqrt{11-x} = (\sqrt{18-x} + \sqrt{11-x})(\sqrt{18-x} - \sqrt{11-x}) \text{ 化简计算即可.}$$

【详解】 解: 根据材料可知, $\sqrt{18-x} + \sqrt{11-x}$ 与 $\sqrt{18-x} - \sqrt{11-x}$ 是一对“对偶式”,

$$\because \sqrt{18-x} - \sqrt{11-x} = 1,$$

$$\therefore \sqrt{18-x} + \sqrt{11-x} = (\sqrt{18-x} + \sqrt{11-x})(\sqrt{18-x} - \sqrt{11-x})$$

$$= (\sqrt{18-x})^2 - (\sqrt{11-x})^2$$

$$= 18 - x - (11 - x)$$

$$= 7$$

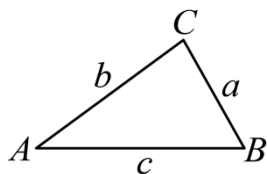
故答案为: 7.

19. 古希腊几何学家海伦和我国宋代数学家秦九韶都曾提出利用三角形的三边求面积的公式, 称为海伦--

秦九韶公式: 如果一个三角形的三边长分别是 a, b, c , 记 $p = \frac{a+b+c}{2}$, 那么三角形的面积为

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对的边分别记为 a, b, c , 若

$a=10, b=12, c=14$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 $\underline{\quad}$.



【答案】 $24\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查根式求值, 根据题中所给公式, 代入三角形的三边长度直接计算即可.

【详解】 解: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{10+12+14}{2} = 18,$

$$\begin{aligned}
 \therefore \triangle ABC \text{ 的面积 } S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\
 &= \sqrt{18 \times (18-10) \times (18-12) \times (18-14)} \\
 &= 24\sqrt{6},
 \end{aligned}$$

故答案为: $24\sqrt{6}$.

三、解答题 (本大题共 8 题, 满分 58 分)

20. 计算: $\sqrt{16} + \sqrt[3]{-64} - \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} - |\pi - 3.2|$

【答案】 $\pi - 4$

【解析】

【分析】 根据算术平方根, 立方根, 绝对值的计算法则进行求解即可.

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】 解: } &\sqrt{16} + \sqrt[3]{-64} - \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} - |\pi - 3.2| \\
 &= 4 + (-4) - \sqrt{1 - \frac{9}{25}} - (3.2 - \pi) \\
 &= -\sqrt{\frac{16}{25}} - 3.2 + \pi \\
 &= -\frac{4}{5} - 3.2 + \pi \\
 &= \pi - 4.
 \end{aligned}$$

【点睛】 本题主要考查了算术平方根, 立方根, 绝对值, 解题的关键在于能够熟练掌握相关知识进行求解.

21. 计算: $\sqrt{12} + \sqrt{0.5} - 3\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

【答案】 $\frac{7\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了利用二次根式的性质化简, 二次根式的乘法、加减法运算, 掌握以上知识点是解题的关键. 分别化简每个二次根式, 进行分母有理化, 最后再进行同类二次根式的合并即可得到答案.

$$\text{【详解】 解: 原式} = 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$$

$$= 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} - 3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$= 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$$

$$= \frac{7\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3}$$

22. 解方程和不等式.

$$(1) \quad 4(x+1)^2 = 1$$

$$(2) \quad \sqrt{3}x + \sqrt{8} < \sqrt{27}x + \sqrt{32}$$

【答案】(1) $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}$

$$(2) \quad x > -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

【解析】

【分析】 本题考查平方根，二次根式的运算，解一元一次不等式，掌握相关知识是解决问题的关键.

(1) 将方程变形为 $(x+1)^2 = \frac{1}{4}$ ，利用平方根的定义进行计算即可；

(2) 根据一元一次不等式的解法进行移项，合并同类项，未知数系数化为 1 即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } 4(x+1)^2 = 1,$$

$$(x+1)^2 = \frac{1}{4},$$

$$x+1 = \frac{1}{2} \text{ 或 } x+1 = -\frac{1}{2},$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{3}{2};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \sqrt{3}x + \sqrt{8} < \sqrt{27}x + \sqrt{32}$$

$$\sqrt{3}x - \sqrt{27}x < \sqrt{32} - \sqrt{8},$$

$$\sqrt{3}x - 3\sqrt{3}x < 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2},$$

$$-2\sqrt{3}x < 2\sqrt{2},$$

$$x > -\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}},$$

$$x > -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

23. 先化简，再求值： $\frac{(1-x)^2}{x-1} + \frac{\sqrt{x^2+4-4x}}{x-2}$ ，其中 $x = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ 。

【答案】 $x-2$ ； $1-2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】根据分母有理化求得 x 的值，得出 $x-2 < 0$ ，然后根据分式的性质，二次根式的性质进行化简，最后代入字母的值即可求解。

$$\text{【详解】解：} \because x = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = 3-2\sqrt{2},$$

$$\therefore x-2 = 3-2\sqrt{2}-2 = 1-2\sqrt{2} < 0,$$

$$\therefore x-2 < 0,$$

$$\therefore \frac{(1-x)^2}{x-1} + \frac{\sqrt{x^2+4-4x}}{x-2}$$

$$= \frac{(x-1)^2}{x-1} + \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}$$

$$= x-1 + \frac{|x-2|}{x-2}$$

$$= x-1-1$$

$$= x-2;$$

$$\therefore x = 3-2\sqrt{2}, \therefore \text{原式} = 3-2\sqrt{2}-2 = 1-2\sqrt{2}.$$

【点睛】本题考查了分母有理化，分式的性质，二次根式的性质，分式的化简求值，熟练掌握以上知识是解题的关键。

24. 已知 $5a+2$ 的立方根是 3， $-7+b$ 的算术平方根是 4， c 是 $\sqrt{11}$ 的整数部分。

(1) 求 a ， b ， c 的值；

(2) 求 $-3a+b+c$ 的平方根。

【答案】 (1) $a=5$ ， $b=23$ ， $c=3$

(2) $\pm\sqrt{11}$

【解析】

【分析】此题考查立方根的意义、算术平方根的意义、无理数的估算方法、平方根的意义、代数式求值等知识点，读懂题意，掌握解答顺序，正确计算是解答本题的关键.

(1) 利用立方根的意义、算术平方根的意义、无理数的估算方法，求出 a , b , c 的值；

(2) 将 a , b , c 的值代入代数式求出值后，进一步求得平方根即可.

【小问 1 详解】

解：由题意可得 $5a + 2 = 27$, $-7 + b = 16$,

解得 $a = 5$, $b = 23$,

$\because 3 = \sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16} = 4$, c 是 $\sqrt{11}$ 的整数部分,

$\therefore c = 3$,

即 $a = 5$, $b = 23$, $c = 3$;

【小问 2 详解】

解：当 $a = 5$, $b = 23$, $c = 3$ 时, $-3a + b + c = -3 \times 5 + 23 + 3 = 11$,

$\therefore 11$ 的平方根为 $\pm\sqrt{11}$,

$\therefore -3a + b + c$ 的平方根为 $\pm\sqrt{11}$.

25. 请阅读下列材料:

已知 $x = \sqrt{5} + 2$, 求代数式 $x^2 - 4x - 7$ 的值.

学生甲根据二次根式的性质: $(\sqrt{a})^2 = a$, 联想到了如下解法:

由 $x = \sqrt{5} + 2$ 得 $x - 2 = \sqrt{5}$, 则 $(x - 2)^2 = 5$, 即 $x^2 - 4x + 4 = 5$, $\therefore x^2 - 4x = 1$. 把 $x^2 - 4x$ 作为整体,

得: $x^2 - 4x - 7 = 1 - 7 = -6$.

请运用上述方法解决下列问题:

(1) 已知 $x = \sqrt{2} - 1$, 求代数式 $x^2 + 2x + 7$ 的值;

(2) 已知 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 求代数式 $3x^2 + 3x + 2025$ 的值.

【答案】(1) 8 (2) 2028

【解析】

【分析】本题主要考查了完全平方公式的应用，二次根式的乘法，解题的关键是熟练掌握运算法则，运用

整体思想准确计算.

(1) 按照例题的方法解答即可;

(2) 由 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 得 $2x+1 = \sqrt{5}$, 再两边平方并利用完全平方公式展开, 得到 $x^2 + x = 1$; 将 $x^2 + x = 1$ 整体代入 $3x^2 + 3x + 2025$ 计算即可.

【小问 1 详解】

解: $\because x = \sqrt{2} - 1$

$$\therefore x+1 = \sqrt{2}$$

$$\therefore (x+1)^2 = 2,$$

$$\therefore x^2 + 2x + 1 = 2, \text{ 即 } x^2 + 2x = 1,$$

$$\therefore x^2 + 2x + 7 = 1 + 7 = 8.$$

【小问 2 详解】

解: $\because x = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$

$$\therefore 2x = \sqrt{5} - 1,$$

$$\therefore (2x+1)^2 = 5,$$

$$\therefore 4x^2 + 4x + 1 = 5, \text{ 即 } x^2 + x = 1,$$

$$\therefore 3x^2 + 3x + 2025 = 3(x^2 + x) + 2025 = 3 \times 1 + 2025 = 2028.$$

26. 任意一个无理数介于两个整数之间, 我们定义, 若无理数 $T: m < T < n$, (其中 m 为满足不等式的最大整数, n 为满足不等式的最小整数), 则称无理数 T 的“行知区间”为 (m, n) , 如 $1 < \sqrt{2} < 2$, 所以 $\sqrt{2}$ 的行知区间为 $(1, 2)$.

(1) 无理数 $\sqrt{17}$ 的“行知区间”是_____;

(2) 若 $a = \sqrt{b-3} + \sqrt{3-b} - \sqrt{7}$, 求 a 的“行知区间”;

(3) 实数 x, y, n 满足 $\sqrt{2x+3y-n} + \sqrt{3x+4y-2n} = \sqrt{x+y-41} + \sqrt{41-x-y}$, 求 n 的算术平方根的行知区间.

【答案】(1) $(4, 5)$

(2) $(-3, -2)$

(3) $(6, 7)$

【解析】

【分析】 本题考查无理数的估算，二次根式有意义的条件，非负性. 熟练掌握相关知识点，并灵活运用，是解题的关键.

(1) 夹逼法求出 $\sqrt{19}$ 的取值范围，即可得出结果；

(2) 根据二次根式有意义的条件，得到 $b = -\sqrt{7}$ ，进一步求出 b 的取值范围即可；

(3) 根据二次根式有意义的条件，结合算术平方根的非负性，得到 $2x + 3y = n, 3x + 4y = 2n, x + y = 41$ ，求出 x, y, n 的值，进而求出 $\sqrt{n}$ 的“行知区间”即可.

【小问 1 详解】

解： $\because \sqrt{16} < \sqrt{19} < \sqrt{25}$ ，

$$\therefore 4 < \sqrt{19} < 5,$$

即：无理数 $\sqrt{19}$ 的“行知区间”是 $(4, 5)$ ；

故答案为： $(4, 5)$ ；

【小问 2 详解】

解： $\because a = \sqrt{b-3} + \sqrt{3-b} - \sqrt{7}$

$$\therefore b-3 \geq 0, 3-b \geq 0,$$

$$\therefore b = 3,$$

$$\therefore a = -\sqrt{7},$$

$$\because \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9},$$

$$\therefore 2 < \sqrt{7} < 3,$$

$$\therefore -3 < -\sqrt{7} < -2,$$

$\therefore a$ 的“行知区间”为 $(-3, -2)$ ；

【小问 3 详解】

$$\because \sqrt{2x+3y-n} + \sqrt{3x+4y-2n} = \sqrt{x+y-41} + \sqrt{41-x-y},$$

$$\therefore x+y-41 \geq 0, 41-x-y \geq 0,$$

$$\therefore x+y=41,$$

$$\therefore \sqrt{2x+3y-n} + \sqrt{3x+4y-2n} = 0,$$

$$\therefore 2x+3y-n=0, 3x+4y-2n=0,$$

$$\text{联立: } \begin{cases} x+y=41 \\ 2x+3y-n=0 \\ 3x+4y-2n=0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x=82 \\ y=-41 \\ n=41 \end{cases},$$

$$\therefore n \text{ 的算术平方根为 } \sqrt{41},$$

$$\therefore \sqrt{36} < \sqrt{41} < \sqrt{49},$$

$$\therefore 6 < \sqrt{41} < 7;$$

$$\therefore n \text{ 的算术平方根的“行知区间”为 } (6, 7).$$

27. 我们约定, 关于 x 的代数式 A 、 B , 在代数式成立的范围内, 都有 $|A-B|=m$ (m 为常数), 则称代数式 A 、 B 互为“差值代数式”, m 为“差值”. 例如: $A=x^2+2x+3$, $B=x^2+2x+1$, $\therefore |A-B|=2$, $\therefore A$ 、 B 互为“差值代数式”, “差值”为 2; 根据该约定, 解答下列问题:

(1) 判断下列各式是否互为“差值代数式”. (在括号中填写“是”或“不是”)

$$\textcircled{1} \sqrt{x-1} \text{ 与 } \sqrt{x+1} \quad () \quad \textcircled{2} \sqrt{x} \text{ 与 } -2.5+\sqrt{x} \quad ()$$

$$\textcircled{3} \frac{x+3}{x} \text{ 与 } \frac{-2x+3}{x} \quad () \quad \textcircled{4} \sqrt{x^2} \text{ 与 } |x| \quad ()$$

(2) 已知关于 x 的整式 $M=(x-a)^2$, $N=x^2-2ax+5$, 若 M 、 N 互为差值代数式, 且“差值”为 5, 求 a 的值.

【答案】 (1) ①不是; ②是; ③是; ④是

$$(2) a = \pm\sqrt{10} \text{ 或 } 0$$

【解析】

【分析】 本题考查了实数的混合运算, 涉及到了二次根式及绝对值的非负性, 代数式的运算, 熟练掌握运算法则是解题的关键.

(1) 利用 $|A-B|=m$, 分别代数运算判断即可;

(2) 列出 $|M - N| = 5$ 的式子运算即可.

【小问 1 详解】

解: ①: $|\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}|$, 当 $x=1$ 时, $|\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}| = |\sqrt{1-1} - \sqrt{1+1}| = \sqrt{2}$, 当 $x=2$ 时,

$|\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}| = |\sqrt{2-1} - \sqrt{2+1}| = \sqrt{3} - 1$, 故①不是;

②: $|\sqrt{x} - (-2.5 + \sqrt{x})| = 2.5$, 故②是;

③: $\left| \frac{x+3}{x} - \frac{-2x+3}{x} \right| = 3$, 故③是;

④: $|\sqrt{x^2} - |x|| = 0$, 故④是;

故答案为: ①不是; ②是; ③是; ④是;

【小问 2 详解】

解: 依题意得: $|M - N| = |x^2 - 2ax + a^2 - x^2 + 2ax - 5| = 5$,

$\therefore |a^2 - 5| = 5$,

解得: $a = \pm\sqrt{10}$ 或 0.