

2025 学年第一学期八年级数学学科第二次质量检测

一、选择题 (本题共 5 题, 每题 3 分, 共 15 分)

1. 下列选项正确的是 ()

- A. $\sqrt{9} = \pm 3$ B. $\sqrt{(-2)^2} = -2$ C. -1 的算术平方根是 1 D. $\sqrt[3]{-125} = -5$

【答案】D

【解析】

【分析】根据平方根、算术平方根和立方根的定义逐项分析判断即可.

【详解】A. $\sqrt{9} = 3$, 故该选项是错误的, 不符合题意;

B. $\sqrt{(-2)^2} = 2$, 故该选项是错误的, 不符合题意;

C. -1 没有算术平方根, 故该选项是错误的, 不符合题意;

D. $\sqrt[3]{-125} = -5$, 故该选项是正确的, 符合题意.

故选 D.

【点睛】本题考查了平方根、算术平方根和立方根的定义, 熟练掌握平方根、算术平方根和立方根的定义是解本题的关键.

2. 下列式子不是 $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ 的有理化因式的是 ()

- A. $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ B. $x\sqrt{x} + x\sqrt{y}$ C. $\sqrt{x+y}$ D. $\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{y}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查有理化因式的概念, 关键是通过相乘验证是否消除根式. 注意选项 C 的乘积仍保留根式结构.

有理化因式需满足与给定式子相乘后结果不含根式. 通过计算各选项与 $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ 的乘积, 判断是否含根式.

【详解】 $\because$ 有理化因式应使乘积不含根式,

A. $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$, 不含根式;

B. $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x\sqrt{x} + x\sqrt{y}) = x(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x(x - y)$, 不含根式;

C. $(\sqrt{x} - \sqrt{y})\sqrt{x+y} = \sqrt{x(x+y)} - \sqrt{y(x+y)}$, 仍含根式;

D. $(\sqrt{x}-\sqrt{y})\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{y}\right)=\frac{1}{2}(x-y)$, 不含根式.

∴ 选项 C 不是有理化因式.

故选: C.

3. 下列条件中, 能判断 ABC 是直角三角形的是 ()

A. $a:b:c=3:4:5$

B. $\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$

C. $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$

D. $a=2, b=1, c=1$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了直角三角形的判定, 掌握直角三角形的性质, 勾股定理逆定理的运用是解题的关键. 根据直角三角形的性质, 勾股定理逆定理的运用进行判定即可.

【详解】 解: A、设 $a=3x, b=4x, c=5x$,

$$\because (3x)^2 + (4x)^2 = (5x)^2,$$

∴ $a^2 + b^2 = c^2$, 能判定是直角三角形, 符合题意;

B、 $\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$,

$$\therefore \angle C = 180^\circ \times \frac{5}{3+4+5} = 75^\circ, \text{ 不能判定是直角三角形, 不符合题意;}$$

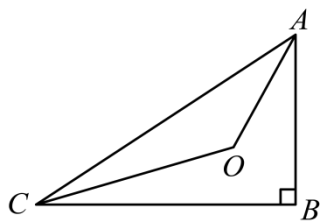
C、 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, 不能判定是直角三角形, 不符合题意;

D、 $\because 1^2 + 1^2 \neq 2^2$, 即 $b^2 + c^2 \neq a^2$,

∴ 不能判定是直角三角形, 不符合题意;

故选: A.

4. 如图, 在 ABC 中, $\angle B = 90^\circ$, 点 O 是 $\angle CAB, \angle ACB$ 平分线的交点, 且 $BC = 8\text{cm}, AC = 10\text{cm}$, 则点 O 到边 AB 的距离为 ()



A. 2cm

B. 3cm

C. 4cm

D. 5cm

【答案】 A

【解析】

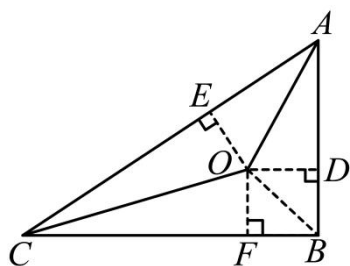
【分析】过点 O 作 $OD \perp AB$, $OE \perp AC$, $OF \perp BC$, 垂足分别为 D, E, F , 得到 $OD = OE = OF$, 利用勾股定理, 直角三角形的面积公式, 图形的面积和解答即可.

本题考查了角的平分线性, 勾股定理, 直角三角形的面积性质, 熟练掌握性质和定理是解题的关键.

【详解】解: 过点 O 作 $OD \perp AB$, $OE \perp AC$, $OF \perp BC$, 垂足分别为 D, E, F ,

$\therefore$ 点 O 是 $\angle CAB, \angle ACB$ 平分线的交点,

$\therefore OD = OE = OF$,



$\therefore \angle B = 90^\circ$, $BC = 8\text{cm}$, $AC = 10\text{cm}$,

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 6(\text{cm})$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 24(\text{cm}^2)$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle COB}$,

$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot OD + \frac{1}{2} AC \cdot OE + \frac{1}{2} CB \cdot OF = 24$,

$\therefore OD = \frac{24 \times 2}{AB + BC + CA} = \frac{48}{6 + 8 + 10} = 2(\text{cm})$,

故选: A.

5. 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 为常数, 且 $a \neq 0$), 下列条件: ① $ac < 0$; ② $abc > 0$;

③ $2a - b + c = 0$; 若只添加一个条件就可以判定方程有实数根, 则所有正确条件的序号是 ()

A. ①②

B. ①③

C. ②③

D. ①②③

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了根的判别式.

通过判别式判断方程有实数根的条件, 分析每个条件是否足以保证判别式非负.

【详解】解: 一元二次方程有实数根的条件是判别式 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

①: $ac < 0$,

$\therefore -4ac > 0$, 又 $b^2 \geq 0$,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac > 0$, 故方程有实数根.

②: $abc > 0$,

反例: $a=1, b=1, c=1$, 则 $abc=1 > 0$, 但 $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, 无实数根, 故②不能判定.

③: $2a - b + c = 0$, 即 $b = 2a + c$,

$$\therefore \Delta = (2a + c)^2 - 4ac = 4a^2 + 4ac + c^2 - 4ac = 4a^2 + c^2,$$

$\because a \neq 0$,

$$\therefore 4a^2 > 0, \quad c^2 \geq 0,$$

$\therefore \Delta > 0$, 故方程有实数根.

$\therefore$ 正确条件的序号是①和③.

故选: B.

二、填空题 (本题共 10 题, 每题 3 分, 共 30 分)

6. 19 的两个平方根的积是_____.

【答案】 -19

【解析】

【分析】 本题主要考查了求一个数的平方根, 实数的运算, 根据平方根的定义求出 19 的两个平方根, 再求出这两个平方根的积即可得到答案.

【详解】 解: $\because$ 19 的两个平方根为 $\sqrt{19}$ 和 $-\sqrt{19}$,

$$\therefore 19 \text{ 的两个平方根的积是 } \sqrt{19} \times (-\sqrt{19}) = -(\sqrt{19})^2 = -19,$$

故答案为: -19.

7. $\sqrt{\frac{4-x}{3-x}} = \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3-x}}$ 成立的条件是_____.

【答案】 $x < 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式有意义的条件, 分式有意义的条件, 解一元一次不等式组, 二次根式有意义的条件是被开方数大于等于 0, 分式有意义的条件是分母不为 0, 据此列出不等式组求解即可.

【详解】 解: $\because \sqrt{\frac{4-x}{3-x}} = \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3-x}},$

$$\therefore \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 3-x \geq 0, \\ 3-x \neq 0 \end{cases}$$

解得 $x < 3$,

故答案为: $x < 3$.

8. 在实数范围内因式分解: $-x^2 + 6x + 3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-(x-3-2\sqrt{3})(x-3+2\sqrt{3})$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分解因式, 解一元二次方程, 先求出方程 $x^2 - 6x - 3 = 0$ 的两个根, 再进行因式分解.

【详解】 解: 当 $-x^2 + 6x + 3 = 0$, 即 $x^2 - 6x - 3 = 0$ 时,

$$\therefore a = 1, \quad b = -6, \quad c = -3,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times (-3) \times 1 = 48 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{2},$$

$$\text{解得 } x_1 = 3 + 2\sqrt{3}, \quad x_2 = 3 - 2\sqrt{3},$$

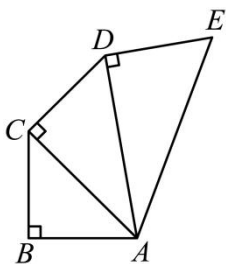
$$\therefore -x^2 + 6x + 3$$

$$= -(x - x_1)(x - x_2)$$

$$= -(x - 3 - 2\sqrt{3})(x - 3 + 2\sqrt{3}),$$

故答案为: $-(x - 3 - 2\sqrt{3})(x - 3 + 2\sqrt{3})$.

9. 如图, $AB = BC = CD = DE = 2$, $AB \perp BC$, $AC \perp CD$, $AD \perp DE$, 垂足分别为 B, C, D . 则 $AE = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 4

【解析】

【分析】 本题主要考查了勾股定理，利用勾股定理可得 AC^2 的值，进而可得 AD^2 的值，最后可求出 AE 的长.

【详解】 解： $\because AB \perp BC, AC \perp CD, AD \perp DE$,

$$\therefore \angle ABC = \angle ACD = \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2^2 + 2^2 = 8,$$

$$\therefore AD^2 = AC^2 + CD^2 = 8 + 2^2 = 12,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{12 + 2^2} = 4,$$

故答案为：4.

10. 俗语有云：在技能学习中，有“一日不练手生，两日不练眼生，三天不练门外汉，四天不练瞪眼看”的说法，意味着知识或技艺若不及时巩固会逐渐遗忘. 假设某人学习了一项技能，初始掌握程度为100分. 且每天“遗忘”的百分比相同. 若经过2天后，技能掌握程度剩余49分，每天“遗忘”的百分比为_____

【答案】 30%

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的实际应用，设每天遗忘的百分比为 x ，则每天剩余比例为 $1-x$ ，根据题意列出方程 $100 \times (1-x)^2 = 49$ ，解方程即可得到答案.

【详解】 解：设每天“遗忘”的百分比为 x ，

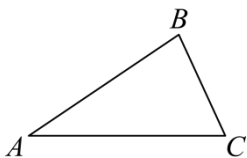
$$\text{由题意，得 } 100 \times (1-x)^2 = 49,$$

$$\text{解得 } x = 0.3 = 30\% \text{ 或 } x = 1.7 \text{ (舍去),}$$

$$\therefore \text{每天“遗忘”的百分比为 } 30\%,$$

故答案为：30%.

11. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = 11$ ， $BC = 7$ ， $AC = 12$. 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.



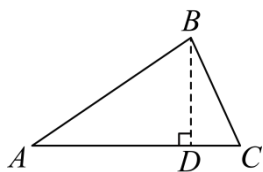
【答案】 $12\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理和求三角形面积，过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 D ，设 $AD = x$ ，则 $CD = 12 - x$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 和 $\text{Rt}\triangle CBD$ 中，由勾股定理得出方程 $11^2 - x^2 = 7^2 - (12 - x)^2$ ，解得 $x = 9$ ，则 $AD = 9$ ，

再由勾股定理求出 BD 的长, 然后由三角形面积公式列式计算即可.

【详解】解: 如图, 过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 D ,



则 $\angle BDA = \angle BDC = 90^\circ$,

设 $AD = x$, 则 $CD = 12 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 和 $\text{Rt}\triangle CBD$ 中, 由勾股定理得: $BD^2 = AB^2 - AD^2 = BC^2 - CD^2$,

$$\text{即 } 11^2 - x^2 = 7^2 - (12 - x)^2,$$

解得 $x = 9$,

$$\therefore AD = 9,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{11^2 - 9^2} = 2\sqrt{10},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 12 \times 2\sqrt{10} = 12\sqrt{10},$$

故答案为: $12\sqrt{10}$.

12. 若关于 x 的方程 $(1 - m^2)x^2 + 2mx - 1 = 0$ 所有的根都是比 1 小的正数. 则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > 2$ 或 $m = 1$ 或 $m < -2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了方程的解、解一元二次方程等知识点, 掌握分类讨论思想成为解题的关键.

分 $1 - m^2 = 0$ 、 $1 - m^2 \neq 0$ 两种情况先求出原方程的实数根, 再根据两个实数根都是比 1 小的正实数, 列出不等式求解即可.

【详解】解: 当 $1 - m^2 = 0$ 时, $m = \pm 1$.

当 $m = 1$ 时, 可得 $2x - 1 = 0$, 解得: $x = \frac{1}{2}$, 符合题意;

当 $m = -1$ 时, 可得 $-2x - 1 = 0$, 解得: $x = -\frac{1}{2}$, 不符合题意;

当 $1 - m^2 \neq 0$ 时, $(1 - m^2)x^2 + 2mx - 1 = 0$, 则 $[(1 + m)x - 1][(1 - m)x + 1] = 0$,

$$\therefore x_1 = \frac{1}{1 + m}, x_2 = \frac{-1}{1 - m}.$$

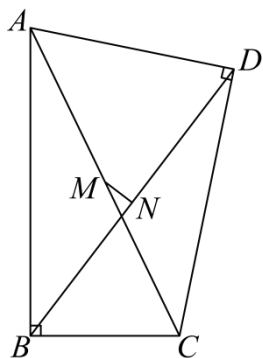
$\therefore$ 关于 x 的方程 $(1-m^2)x^2 + 2mx - 1 = 0$ 的所有根都是比 1 小的正实数,

$\therefore 0 < \frac{1}{1+m} < 1$, 解得: $m > 0$, $0 < \frac{-1}{1-m} < 1$, 解得: $m > 2$, 即 $m > 2$.

综上可得, 实数 m 的取值范围是 $m > 2$ 或 $m = 1$.

故答案为: $m > 2$ 或 $m = 1$.

13. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle ADC = 90^\circ$, $AC = 26$, $BD = 24$, 连接 AC 、 BD , 取 AC 和 BD 的中点 M 、 N , 连接 MN , 则 MN 的长度为_____.



【答案】5

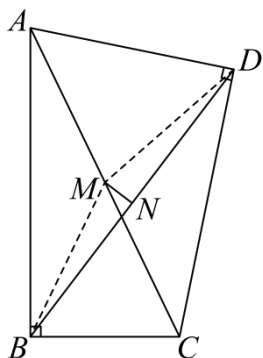
【解析】

【分析】本题考查了直角三角形斜边上中线的性质, 等腰三角形的判定与性质, 勾股定理, 灵活应用直角三角形斜边上中线的性质, 等腰三角形的判定与性质是解题的关键.

连接 MB, MD , 利用直角三角形斜边上中线的性质得出 $\triangle MBD$ 为等腰三角形, 再利用等腰三角形“三线合一”

得出 $MN \perp BD$, $BN = ND = \frac{1}{2}BD = 12$, 最后利用勾股定理即可求出 MN 的长度.

【详解】解: 如图, 连接 MB, MD ,



$\therefore \angle ABC = 90^\circ, \angle ADC = 90^\circ, M$ 是 AC 的中点,

$\therefore MB = \frac{1}{2}AC, MD = \frac{1}{2}AC$,

$$\therefore AC = 26,$$

$$\therefore MB = MD = \frac{1}{2} \times 26 = 13,$$

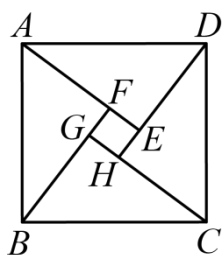
$$\therefore N \text{ 是 } BD \text{ 的中点, } BD = 24,$$

$$\therefore MN \perp BD, BN = DN = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 24 = 12,$$

$$\therefore MN = \sqrt{MB^2 - BN^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5,$$

故答案为: 5.

14. 如图, 是我国汉代数学家赵爽在注解《周髀算经》时给出的“赵爽弦图”, 图中的四个直角三角形是全等的, 如果大正方形 $ABCD$ 的面积是小正方形 $EFGH$ 面积的 25 倍, 那么 $\frac{AE}{DE} =$ _____.



【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了勾股定理, 解一元二次方程, 全等三角形的性质, 设 $DE = AF = x$, $EF = a$, 则 $AE = AF + EF = x + a$, 可得 $S_{\text{正方形}EFGH} = EF^2 = a^2$, 由勾股定理可得 $AD^2 = AE^2 + DE^2 = x^2 + (x + a)^2$, 则 $S_{\text{正方形}ABCD} = AD^2 = x^2 + (x + a)^2$, 进而可得 $x^2 + (x + a)^2 = 25a^2$, 解得 $x = 3a$, 据此可得答案.

【详解】 解: 设 $DE = AF = x$, $EF = a$, 则 $AE = AF + EF = x + a$,

$$\therefore S_{\text{正方形}EFGH} = EF^2 = a^2,$$

在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中, 由勾股定理得 $AD^2 = AE^2 + DE^2 = x^2 + (x + a)^2$, 即 $S_{\text{正方形}ABCD} = AD^2 = x^2 + (x + a)^2$,

$\therefore$ 大正方形 $ABCD$ 的面积是小正方形 $EFGH$ 面积的 25 倍,

$$\therefore x^2 + (x + a)^2 = 25a^2,$$

$$\therefore x^2 + x^2 + 2ax + a^2 = 25a^2,$$

$$\therefore x^2 + ax - 12a^2 = 0,$$

$$\therefore (x+4a)(x-3a)=0,$$

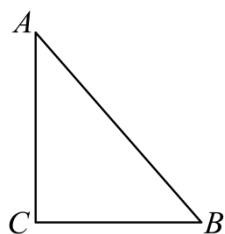
解得 $x=3a$ 或 $x=-4a$ (舍去),

$$\therefore DE=3a, AE=4a$$

$$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{4a}{3a} = \frac{4}{3},$$

故答案为: $\frac{4}{3}$.

15. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle A=40^\circ$, $AC=2\sqrt{3}$, $BC=3$, 点 D 在边 BC 上, 将 $\triangle ABC$ 沿直线 AD 翻折, 使点 C 落在点 C' 处, 连接 AC' , 直线 AC' 与边 CB 的延长线相交于点 F , 如果 $\angle DAB = \frac{1}{2}\angle BAF$, 那么线段 BF 的长为 ____.



【答案】 3

【解析】

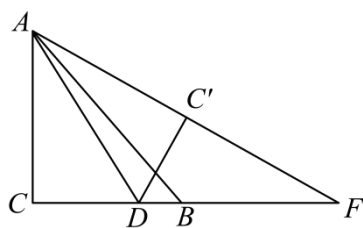
【分析】设 $\angle DAB = \alpha$, 则 $\angle BAF = 2\alpha$, $\angle DAF = \angle DAB + \angle BAF = 3\alpha$, 由折叠可得 $\angle CAD = \angle DAF = 3\alpha$, 进而可得 $\angle CAB = \angle CAD + \angle DAB = 4\alpha = 40^\circ$, 则 $\alpha = 10^\circ$, $\angle CAD = \angle DAF = 3\alpha = 30^\circ$, 由直角三角形的两个锐角互余可得 $\angle ADC = 90^\circ - \angle CAD = 60^\circ$, 由三角形外角的性质可得

$\angle F = \angle ADC - \angle DAF = 30^\circ$, 进而可得 $\angle DAF = \angle F$, 由等角对等边可得 $AD = DF$, 由含 30° 角的直角三角形可得 $AD = 2CD$, 由勾股定理可得 $AC^2 + CD^2 = AD^2$, 即 $(2\sqrt{3})^2 + CD^2 = (2CD)^2$, 解得 $CD = 2$

或 $CD = -2$ (不符合题意, 故舍去), 则 $AD = 2CD = 4$, $DF = AD = 4$, 由线段的和差关系可得

$BD = BC - CD = 1$, $BF = DF - BD$, 由此即可求出 BF 的长.

【详解】解: 如图,



设 $\angle DAB = \alpha$, 则 $\angle BAF = 2\alpha$, $\angle DAF = \angle DAB + \angle BAF = 3\alpha$,

由折叠可得: $\angle CAD = \angle DAF = 3\alpha$,

$$\therefore \angle CAB = \angle CAD + \angle DAB = 4\alpha = 40^\circ,$$

$$\therefore \alpha = 10^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle DAF = 3\alpha = 30^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ - \angle CAD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle F = \angle ADC - \angle DAF = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle F,$$

$$\therefore AD = DF,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACD \text{ 中, } AC = 2\sqrt{3}, \angle CAD = 30^\circ,$$

$$\therefore AD = 2CD,$$

$$\text{由勾股定理可得: } AC^2 + CD^2 = AD^2,$$

$$\text{即: } (2\sqrt{3})^2 + CD^2 = (2CD)^2,$$

$$\text{解得: } CD = 2 \text{ 或 } CD = -2 \text{ (不符合题意, 故舍去),}$$

$$\therefore AD = 2CD = 4,$$

$$\therefore DF = AD = 4,$$

$$\text{又} \because BC = 3,$$

$$\therefore BD = BC - CD = 3 - 2 = 1,$$

$$\therefore BF = DF - BD = 4 - 1 = 3,$$

故答案为: 3.

【点睛】本题主要考查了折叠问题, 含30度角的直角三角形, 勾股定理, 直角三角形的两个锐角互余, 三角形外角的性质, 等角对等边, 直接开平方法解一元二次方程, 线段的和与差等知识点, 由折叠及角的和差关系得出 $\alpha = 10^\circ$ 、由含30度角的直角三角形的性质及勾股定理得出 $CD = 2$ 是解题的关键.

三、计算题 (本题共4题, 每题5分, 共20分)

$$16. \text{ 计算: } \frac{1}{4}\sqrt{30} \times 40\sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{4}{5}\sqrt{2\frac{2}{3}}.$$

【答案】 $16\sqrt{10}$

【解析】

【分析】本题主要考查了二次根式的乘法计算, 根据二次根式的乘法计算法则求解即可.

$$\begin{aligned}
& \text{【详解】解: } \frac{1}{4}\sqrt{30} \times 40\sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{4}{5}\sqrt{2\frac{2}{3}} \\
& = \left(\frac{1}{4} \times 40 \times \frac{4}{5}\right) \times \sqrt{30 \times \frac{1}{2} \times \frac{8}{3}} \\
& = 8 \times \sqrt{40} \\
& = 8 \times 2\sqrt{10} \\
& = 16\sqrt{10}.
\end{aligned}$$

$$17. \text{ 计算: } \left(4b\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{2}{a}\sqrt{a^3b}\right) - \left(3a\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{9ab}\right) (b > 0)$$

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的加减运算，先证明 $a > 0$ ，再化简二次根式，最后根据二次根式的加减运算法则求解即可.

【详解】解: $\because$ 式子 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 和 $\sqrt{\frac{b}{a}}$ 有意义, 且 $b > 0$,

$\therefore a > 0$,

$$\begin{aligned}
& \therefore \left(4b\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{2}{a}\sqrt{a^3b}\right) - \left(3a\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{9ab}\right) \\
& = 4\sqrt{ab} + 2\sqrt{ab} - (3\sqrt{ab} + 3\sqrt{ab}) \\
& = 6\sqrt{ab} - 6\sqrt{ab} \\
& = 0.
\end{aligned}$$

$$18. \text{ 解方程: } 2x^2 - 4x - 1 = 0.$$

$$\text{【答案】 } x_1 = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}, x_2 = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}.$$

【解析】

【分析】 用配方法解一元二次方程即可.

【详解】解: $\because 2x^2 - 4x - 1 = 0$,

$$\therefore 2x^2 - 4x = 1,$$

$$\text{则 } x^2 - 2x = \frac{1}{2},$$

$$\therefore x^2 - 2x + 1 = \frac{3}{2}, \text{ 即 } (x-1)^2 = \frac{3}{2},$$

$$\text{则 } x-1 = \pm \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{2+\sqrt{6}}{2}, x_2 = \frac{2-\sqrt{6}}{2}.$$

【点睛】此题考查了配方法解一元二次方程，解题时要注意解题步骤的准确使用，把左边配成完全平方式，右边化为常数.

19. 解分式方程: $\frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1} = -\frac{8}{x^2-4}.$

【答案】 $x = -\frac{2}{3}$ 或 $x = -4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解分式方程，先把原方程去分母化为整式方程，再解方程并检验即可得到答案.

【详解】 解: $\frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1} = -\frac{8}{x^2-4}$

去分母得 $2(x+2)(x+1) + (x+2)(x-2) = -8(x+1)$, 即 $2(x^2 + 2x + x + 2) + (x^2 - 4) = -8(x+1)$,

去括号得 $2x^2 + 4x + 2x + 4 + x^2 - 4 = -8x - 8$,

移项，合并同类项得 $3x^2 + 14x + 8 = 0$,

$\therefore (3x+2)(x+4) = 0$,

$\therefore 3x+2=0$ 或 $x+4=0$,

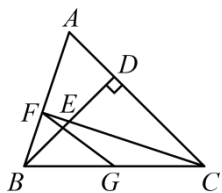
解得 $x = -\frac{2}{3}$ 或 $x = -4$,

检验，当 $x = -\frac{2}{3}$ 时， $(x+1)(x+2)(x-2) \neq 0$ ，当 $x = -4$ 时， $(x+1)(x+2)(x-2) \neq 0$,

$\therefore x = -\frac{2}{3}$ 和 $x = -4$ 都是原方程的解.

四、简答题 (本题共 3 题，第 20 题 9 分，第 21 题 14 分，第 22 题 12 分，共 35 分)

20. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， BD 为边 AC 上的高，且 $BD = CD$ ，在 BD 上截取一点 E 使 $CE = AB$ ，延长 CE 交 AB 于点 F ， G 为边 BC 上的中点，连接 FG .



(1) 求证: $\angle ABD = \angle ECD$;

(2) 若 $FG \parallel AC$, 求证: $CA = CB$.

【答案】(1) 证明过程见详解;

(2) 证明过程见详解.

【解析】

【分析】本题主要考查了直角三角形全等的判定, 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 等腰三角形的性质和判定, 平行线的性质等, 熟练运用这些知识点是正确解答此题的关键.

(1) 由 BD 为边 AC 上的高, 证明 $\triangle CDE$, $\triangle BDA$ 都是直角三角形, 用 HL 证明 $\text{Rt}\triangle BDA \cong \text{Rt}\triangle CDE$ 即可得结论;

(2) 由 $\angle ABD = \angle ECD$ 得 $\angle BFC = \angle A + \angle ECD = 90^\circ$, 进而得出 BCF 是直角三角形, 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 得 $FG = BG = \frac{1}{2}BC$, 进而得 $\angle ABC = \angle BFG$, 根据 $FG \parallel AC$, 得 $\angle BFG = \angle A$, 等量代换得 $\angle A = \angle ABC$, 即可证明 $CA = CB$.

【小问 1 详解】

证明: $\because BD$ 为边 AC 上的高,

$\therefore \triangle CDE$, $\triangle BDA$ 都是直角三角形,

在 $\text{Rt}\triangle BDA$ 和 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中,

$$\therefore \begin{cases} BA = CE \\ BD = CD \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle BDA \cong \text{Rt}\triangle CDE$ (HL),

$\therefore \angle ABD = \angle ECD$;

【小问 2 详解】

证明: $\because \angle ABD = \angle ECD$, $\angle ABE + \angle A = 90^\circ$,

$\therefore \angle A + \angle ECD = 90^\circ$,

$\therefore \angle BFC = \angle A + \angle ECD = 90^\circ$,

即 BCF 是直角三角形,

$\because G$ 为边 BC 上的中点,

$$\therefore FG = BG = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BFG,$$

$$\therefore FG \parallel AC,$$

$$\therefore \angle BFG = \angle A,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABC,$$

$$\therefore CA = CB.$$

21. 公安交警部门提醒市民, 骑车出行必须严格遵守“一盔一带”的规定, 某头盔经销商统计了某品牌头盔4月份到6月份的销量, 该品牌头盔4月份销售150个, 6月份销售216个, 且从4月份到6月份销售量的月增长率相同.

(1) 求该品牌头盔销售量的月增长率;

(2) 若此种头盔的进价为30元/个, 测算在市场中, 当售价为40元/个时, 月销售量为600个, 若在此基础上售价每上涨1元/个, 则月销售量将减少10个, 为使月销售利润达到10000元, 而且尽可能让顾客得到实惠, 则该品牌头盔的实际售价应定为多少元/个?

【答案】 (1) 该品牌头盔销售量的月增长率为20%

(2) 该品牌头盔的实际售价应定为50元/个

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的实际应用, 找准等量关系, 正确的列出方程, 是解题的关键:

(1) 设该品牌头盔销售量的月增长率为 x , 根据4月份销售150个, 6月份销售216个, 列出方程进行求解即可;

(2) 设该品牌头盔的实际售价应定为 m 元/个, 根据总利润等于单件利润乘以销量, 列出方程进行求解即可.

【小问1详解】

解: 设该品牌头盔销售量的月增长率为 x , 由题意, 得: $150(1+x)^2 = 216$,

解得: $x = 0.2 = 20\%$ 或 $x = -2.2$ (舍去);

答: 该品牌头盔销售量的月增长率为20%;

【小问2详解】

设该品牌头盔的实际售价应定为 m 元/个, 由题意, 得:

$$(m-30)[600-10(m-40)] = 10000,$$

解得: $m_1 = 50, m_2 = 80$,

$\therefore$ 尽可能让顾客得到实惠,

$\therefore m = 50$;

答: 该品牌头盔的实际售价应定为 50 元/个.

22. 【背景介绍】勾股定理是几何学中的明珠, 充满着魅力. 千百年来, 人们对它的证明从未停止过探索, 其中有著名的数学家, 也有业余数学爱好者. 向常春在 1994 年构造发现了一个新的证法.

【小试牛刀】(1) 把两个全等的直角三角形如图 1 放置, $\angle DAB = \angle B = 90^\circ$, 已知 $AB = AD = a$, $AE = BC = b$, $DE = AC = c$, $AC \perp DE$. 试证明 $a^2 + b^2 = c^2$.

【知识运用】(2) 如图 2, 铁路上 A 、 B 两点 (看作直线上的两点) 相距 24 千米, C 、 D 为两个村庄 (看作两个点), $AD \perp AB$, $BC \perp AB$, 垂足分别为 A 、 B , $AD = 23$ 千米, $BC = 16$ 千米, 则两个村庄的距离为_____千米 (直接写答案).

(3) 在 (2) 的条件下, 要在 AB 上建造一个供应站 P , 使得 $PC = PD$, 求 AP 的长.

【知识迁移】(4) 借助上面的思考过程与几何模型, 求代数式 $\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{(16-x)^2 + 81}$ 的最小值 ($0 < x < 16$).

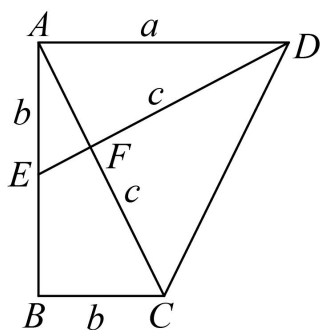


图 1

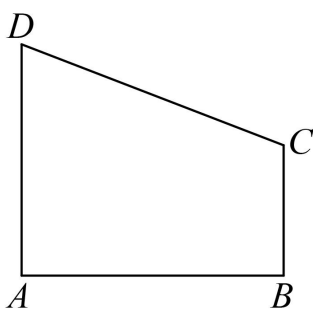


图 2

【答案】(1) 见解析 (2) 25 千米 (3) 6.3125 千米 (4) 20.

【解析】

【分析】(1) 利用梯形面积, 直角三角形的面积等证明即可.

(2) 连接 CD , 过点 C 作 $CE \perp AD$ 于点 E , 结合 $AD \perp AB$, $BC \perp AB$, 得到矩形 $CEAB$, 结合 $AB = 24$ 千米, $AD = 23$ 千米, $BC = 16$ 千米, 得到 $CE = AB = 24$ 千米, $AE = BC = 16$ 千米, $DE = AD - AE = AD - BC = 7$ 千米, 利用勾股定理 $CD = \sqrt{DE^2 + CE^2} = 25$ 解答即可.

(3) 作 CD 的垂直平分线, 交 AB 与点 P , 连接 PC , PD , 则 $PC = PD$, 设 $AP = x$, 则

$PB = AB - AP = (24 - x)$ 千米, 由 $PC^2 = PD^2$, 根据勾股定理, 得 $PA^2 + AD^2 = PB^2 + BC^2$, 解答即可.

(4) 根据题意, 令 $AB = 16$, $AD = 9$, $BC = 3$, 设 $BP = x$, 则 $AP = AB - BP = (16 - x)$, 根据勾股定理, 得 $PC = \sqrt{x^2 + 9}$, $PD = \sqrt{(16 - x)^2 + 81}$,

要求 $\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{(16 - x)^2 + 81}$ 的最小值就转化为 $PC + PD$ 的和的最小值, 于是延长 CB 到点 F , 使得 $CB = BF$, 连接 FD , 交 AB 于点 P , 此时的点 P 位置就是使得 $PC + PD$ 和最小, 过点 F 作 $FE \parallel AB$ 交 DA 的延长线于点 E , 利用勾股定理解答即可.

【详解】(1) 连接 CE ,

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle BCA, \quad \angle DAB = \angle B = 90^\circ, \quad AB = AD = a, \quad AE = BC = b, \quad DE = AC = c \quad AC \perp DE.$$

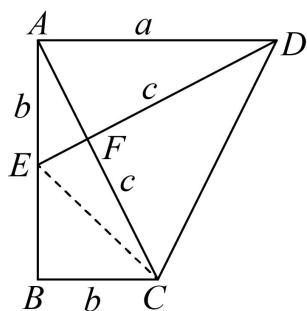
$$\therefore BE = AB - AE = a - b, \quad AD \parallel BC, \quad S_{\text{四边形}AECD} = S_{\triangle AED} + S_{\triangle CED} = \frac{1}{2}c^2,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2}(a + b) \cdot a = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}ab, \quad S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2}(a - b) \cdot b = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}b^2,$$

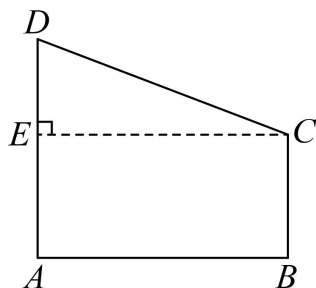
$$\therefore S_{\text{四边形}AECD} = S_{\text{四边形}ABCD} - S_{\triangle BCE},$$

$$\therefore \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}ab - \left(\frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}b^2 \right) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2.$$



(2) 解: 连接 CD , 过点 C 作 $CE \perp AD$ 于点 E ,



$$\therefore AD \perp AB, \quad BC \perp AB,$$

$$\therefore \text{矩形} CEAB,$$

$$\therefore AB = 24 \text{ 千米}, \quad AD = 23 \text{ 千米}, \quad BC = 16 \text{ 千米},$$

$$\therefore CE = AB = 24 \text{ 千米}, \quad AE = BC = 16 \text{ 千米}, \quad DE = AD - AE = AD - BC = 7 \text{ 千米},$$

$$\therefore CD = \sqrt{DE^2 + CE^2} = 25 \text{ (千米)},$$

故答案为: 25.

(3) 解: 作 CD 的垂直平分线, 交 AB 与点 P , 连接 PC, PD , 则 $PC = PD$,

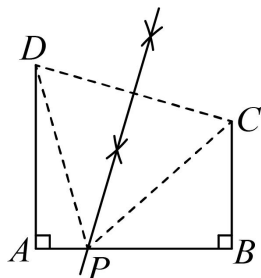
设 $AP = x$, 则 $PB = AB - AP = (24 - x)$ 千米,

由 $PC^2 = PD^2$, 根据勾股定理, 得 $PA^2 + AD^2 = PB^2 + BC^2$,

$$\therefore x^2 + 23^2 = (24 - x)^2 + 16^2,$$

$$\therefore x^2 + 23^2 = 24^2 - 48x + x^2 + 16^2,$$

解得 $x = 6.3125$,



故 AP 的长为 6.3125 千米.

(4) 解: 根据题意, 令 $AB = 16$, $AD = 9$, $BC = 3$, 设 $BP = x$, 则 $AP = AB - BP = (16 - x)$,

根据勾股定理, 得 $PC = \sqrt{x^2 + 9}$, $PD = \sqrt{(16 - x)^2 + 81}$,

要求 $\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{(16 - x)^2 + 81}$ 的最小值就转化为 $PC + PD$ 的和的最小值,

$\therefore$ 延长 CB 到点 F , 使得 $CB = BF$,

连接 FD , 交 AB 于点 P , 此时的点 P 位置就是使得 $PC + PD$ 和最小,

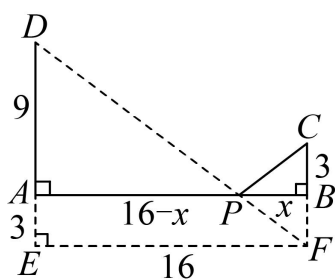
过点 F 作 $FE \parallel AB$ 交 DA 的延长线于点 E ,

$\therefore$ 四边形 $AEFB$ 矩形,

$$\therefore FE = AB = 24, \quad AE = BF = BC = 3,$$

$$\therefore DF = \sqrt{DE^2 + FE^2} = \sqrt{(AD + AE)^2 + 16^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20,$$

故 $PC + PD$ 的最小值为 20,



故代数式 $\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{(16 - x)^2 + 81}$ 的最小值为 20.

【点睛】 本题考查了勾股定理的证明，勾股定理的应用，矩形的判定和性质，线段和最小的计算，线段垂直平分线的应用，熟练掌握勾股定理，线段和的最小计算，矩形的判定和性质是解题的关键.