

2025-2026 学年上海交大二附中八年级（上）月考数学试卷（10 月份）

一、选择题：本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 下列说法正确的是（ ）

A. $-a^2$ 一定没有平方根

B. 对于二次根式 $\sqrt{a}$, $(\sqrt{a})^2 = a$

C. 16 的四次方根是 2

D. -27 的三次方根是 ± 3

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查平方根、立方根、二次根式的性质与化简，熟练掌握以上知识点是解题的关键．根据平方根、立方根、二次根式的性质进行逐一判断即可．

【详解】解：A. 当 $a = 0$ 时， $-a^2$ 的平方根为 0，故本选项不符合题意；

B. 对于二次根式 $\sqrt{a}$ ，则 $(\sqrt{a})^2 = a$ ，故本选项符合题意；

C. 16 的四次方根是 ± 2 ，故本选项不符合题意；

D. -27 的三次方根是 -3 ，故本选项不符合题意．

故选：B.

2. 下列二次根式中，不是同类二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{32}$

B. $\sqrt{4a}$ 与 $\sqrt{ab^2}$

C. $\sqrt{27x}$ 与 $\sqrt{12x^5y^2}$

D. $\sqrt{ab}$ 与 $\sqrt{2a^2b}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了同类二次根式，二次根式的性质与化简，掌握同类二次根式，二次根式的性质是解题的关键．

根据二次根式的性质，同类二次根式定义对各选项进行判断即可．

【详解】解：A. $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式，故选项 A 不符合题意；

B. $\sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$ ， $\sqrt{ab^2} = |b|\sqrt{a}$ 是同类二次根式，故选项 B 不符合题意；

C. $\sqrt{27x} = 3\sqrt{3x}$ ， $\sqrt{12x^5y^2} = 2|x^2y|\sqrt{3x}$ 是同类二次根式，故选项 C 不符合题意；

D. $\sqrt{2a^2b} = |a|\sqrt{2b}$ 与 $\sqrt{ab}$ 不是同类二次根式，故选项 D 符合题意．

故选：D.

3. 下列各选项中， $\sqrt{10-x}$ 的有理化因式是 ()

A. $\sqrt{10+x}$

B. $\sqrt{10-x}$

C. $\sqrt{10}-\sqrt{x}$

D. $\sqrt{10}+\sqrt{x}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了有理化因式的概念，熟练掌握两个含二次根式的代数式相乘时，它们的积不含二次根式，这样的两个代数式称作互为有理化因式是解题的关键.

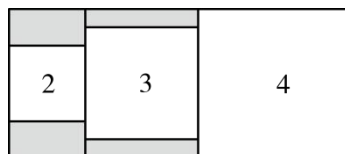
根据有理化因式的定义进行判断即可.

【详解】解：根据互为有理化因式定义可知：

与 $\sqrt{10-x}$ 互为有理化因式的是 $\sqrt{10-x}$.

故选：B.

4. 如图，矩形内三个相邻的正方形面积分别为 4，3 和 2，则图中阴影部分的面积为 ()



A. 2

B. $\sqrt{6}$

C. $2\sqrt{3}+\sqrt{6}-2\sqrt{2}-3$

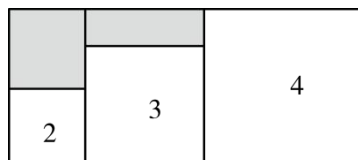
D. $2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-5$

【答案】D

【解析】

【分析】将面积为 2 和 3 的正方形向下平移至下方边长和长方形的长边重合，可得两个阴影部分的图形的长和宽，计算可得答案.

【详解】解：将面积为 2 和 3 的正方形向下平移至下方边长和长方形的长边重合，如下图所示：



$$\text{则阴影面积} = \sqrt{2} \times (2 - \sqrt{2}) + \sqrt{3} \times (2 - \sqrt{3})$$

$$= 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{3} - 3$$

$$= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 5$$

故选 D

【点睛】 本题考查算术平方根，解答本题的关键是明确题意，求出大小正方形的边长，利用数形结合的思想解答.

5. 方程 $x(x-2) = x$ 的根是 ()

A. $x = 0$

B. $x = 2$

C. $x_1 = 0, x_2 = 2$

D. $x_1 = 0, x_2 = 3$

【答案】 D

【解析】

【分析】 首先进行移项，然后因式分解，最后求值即可.

【详解】 解: $x(x-2) = x$,

$$x^2 - 3x = 0,$$

$$x(x-3) = 0,$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x - 3 = 0,$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x = 3.$$

故选: D.

【点睛】 本题主要考查解一元二次方程，掌握因式分解一元二次方程的方法是解题的关键.

6. 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个实数根，且其中一个根为另一个根的 2 倍，则称这样的方程为“倍根方程”，以下关于倍根方程的说法，正确的是 ()

①方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 是倍根方程;

②若 $(x-2)(mx+n) = 0$ 是倍根方程，则 $4m^2 - 5mn + n^2 = 0$;

③若 p 、 q 满足 $pq = 2$ ，则关于 x 的方程 $px^2 + 3x + q = 0$ 是倍根方程;

④若关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 是倍根方程，则 $2b^2 = 9ac$.

A. ①②

B. ②③④

C. ①③

D. ①③④

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的求根公式，新定义的倍根方程的意义，理解倍根方程的意义和正确求出方程的解是解决问题的关键.

①求出方程的解，再判断是否为倍根方程；②根据倍根方程和其中一个根，可求出另一个根，进而得到 m 、

n 之间的关系, 即可判断; ③当 p, q 满足 $pq = 2$, 则 $px^2 + 3x + q = (px + 1)(x + q) = 0$, 求出两个根, 再根据 $pq = 2$ 代入可得两个根之间的关系, 进而判断是否为倍根方程; ④用求根公式求出两个根, 当 $x_1 = 2x_2$, 或 $2x_1 = x_2$ 时, 进一步化简, 得出关系式, 进行判断即可.

【详解】解: ①解方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$(x - 2)(x - 1) = 0,$$

$$\therefore x - 2 = 0 \text{ 或 } x - 1 = 0,$$

解得, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, 得, $x_1 = 2x_2$,

$\therefore$ 方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 是倍根方程, 故①正确;

②若 $(x - 2)(mx + n) = 0$ 是倍根方程, $x_1 = 2$,

因此 $x_2 = 1$ 或 $x_2 = 4$,

当 $x_2 = 1$ 时, $m + n = 0$,

当 $x_2 = 4$ 时, $4m + n = 0$,

$\therefore 4m^2 - 5mn + n^2 = (m - n)(4m - n) \neq 0$, 故②错误;

③ $\because pq = 2$, 则 $px^2 + 3x + q = (px + 1)(x + q) = 0$,

$$\therefore x_1 = -\frac{1}{p}, \quad x_2 = -q,$$

$$\therefore x_2 = -q = -\frac{2}{p} = 2x_1,$$

因此是倍根方程, 故③正确;

④方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根为: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

若 $x_1 = 2x_2$, 则 $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times 2$,

$$\text{即 } \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times 2 = 0,$$

$$\therefore \frac{b+3\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0,$$

$$\therefore b+3\sqrt{b^2-4ac}=0,$$

$$\therefore 3\sqrt{b^2-4ac}=-b,$$

$$\therefore 9(b^2-4ac)=b^2,$$

$$\therefore 2b^2=9ac.$$

若 $2x_1=x_2$ 时, 则, $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times 2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$

则 $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times 2 - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0,$

$$\therefore \frac{-b+3\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0,$$

$$\therefore -b+3\sqrt{b^2-4ac}=0,$$

$$\therefore b=3\sqrt{b^2-4ac},$$

$$\therefore b^2=9(b^2-4ac),$$

$$\therefore 2b^2=9ac, \text{ 故④正确.}$$

综上所述, 正确的是①③④.

故选: D.

二、填空题: 本题共 12 小题, 每小题 2 分, 共 24 分.

7. 当 $\frac{\sqrt{5-x}}{x-4}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \leq 5$ 且 $x \neq 4$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件, 分式有意义的条件, 求不等式的解集, 掌握二次根式和分式有意义的条件是解题的关键.

根据二次根式和分式有意义的条件, 可得 $\begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases}$, 解不等式即可得出答案.

【详解】解：∵ $\frac{\sqrt{5-x}}{x-4}$ 在实数范围内有意义，

$$\therefore \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x \leq 5 \\ x \neq 4 \end{cases},$$

$$\therefore x \leq 5 \text{ 且 } x \neq 4,$$

故答案为： $x \leq 5$ 且 $x \neq 4$.

8. 不等式 $x+3\sqrt{2} > \sqrt{2}(x-1)$ 的解集是_____.

【答案】 $x < 4\sqrt{2} + 8$

【解析】

【分析】先去括号，然后移项，最后化系数为1解不等式即可.

本题主要考查了二次根式的应用和解一元一次不等式，基本操作方法与解一元一次方程基本相同，都有如下步骤：①去分母；②去括号；③移项；④合并同类项；⑤化系数为1.

以上步骤中，只有①去分母和⑤化系数为1可能用到性质3，即可能变不等号方向，其他都不会改变不等号方向.

【详解】解： $x+3\sqrt{2} > \sqrt{2}(x-1)$,

去括号得： $x+3\sqrt{2} > \sqrt{2}x-\sqrt{2}$,

移项，得 $x-\sqrt{2}x > -\sqrt{2}-3\sqrt{2}$,

合并同类项得 $(1-\sqrt{2})x > -4\sqrt{2}$,

化系数为1，得 $x < 4\sqrt{2}+8$.

故答案为： $x < 4\sqrt{2}+8$.

9. 当 m _____时，方程 $(m+3)x^{|m|-1}+3x-2=0$ 是关于 x 的一元二次方程.

【答案】 3

【解析】

【分析】根据一元二次方程的定义可得： $|m|-1=2$ 且 $m+3 \neq 0$ ，由此解答即可.

本题考查了一元二次方程的定义，绝对值，掌握一元二次方程的定义是解题的关键.

【详解】解：∵ $(m+3)x^{|m|-1} + 3x - 2 = 0$ 是一元二次方程，

$$\therefore \begin{cases} |m|-1=2 \\ m+3 \neq 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} m = \pm 3 \\ m \neq -3 \end{cases},$$

$$\therefore m = 3.$$

故答案为：3.

10. -203200000 用科学记数法表示为_____.

【答案】 -2.032×10^8

【解析】

【分析】 本题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数，据此求解即可.

【详解】解： $-203200000 = -2.032 \times 10^8$ ，

故答案为： -2.032×10^8 .

11. 请写出一个方程，使这个方程的一次项系数是 -1 ，且它的两个根分别是 2 和 -4 ，这个方程是_____.

【答案】 $-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0$

【解析】

【分析】 本题主要考查了根与系数的关系，熟知一元二次方程根与系数的关系是解题的关键. 根据题意，写出符合要求的一元二次方程即可.

【详解】解：令这个方程为 $ax^2 + bx + c = 0$ ，

因为方程的两个根分别是 2 和 -4 ，

则这个方程的两根之和为 -2 ，两根之积为 -8 ，

$$\text{所以 } -\frac{b}{a} = -2, \quad \frac{c}{a} = -8,$$

$$\text{当 } b = -1 \text{ 时, } a = -\frac{1}{2}, \text{ 则 } c = 4,$$

$$\text{所以这个方程可以是 } -\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0$$

故答案为: $-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0$.

12. 化简: $-a\sqrt{-\frac{4}{a}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2\sqrt{-a}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式有意义的条件及二次根式的性质与化简, 解决问题的关键是利用二次根式的基本性质进行化简.

由题意可得 $a < 0$, 将 $-a\sqrt{-\frac{4}{a}}$ 变形为 $-a\sqrt{-\frac{4a}{a^2}}$, 再利用二次根式的性质进行化简即可.

【详解】 解: 由题意可得, $-a > 0$, 即 $a < 0$,

$$\therefore -a\sqrt{-\frac{4}{a}} = -a\sqrt{-\frac{4a}{a^2}} = -a\left(-\frac{2}{a}\right)\sqrt{-a} = 2\sqrt{-a}.$$

故答案为: $2\sqrt{-a}$.

13. 若三角形的三条边长分别为 2、4、 m , 则 $\sqrt{(m-6)^2} + |1-m| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查了三角形三边关系, 利用二次根式性质化简, 绝对值意义, 解题的关键是如何根据已知的两条边求第三边的范围. 已知两边, 则第三边的长度应是大于两边的差而小于两边的和, 这样就可求出第三边长的范围, 即可求解.

【详解】 解: 根据题意得: $4-2 < m < 4+2$,

即 $2 < m < 6$,

$$\therefore \sqrt{(m-6)^2} + |1-m|$$

$$= 6-m+m-1$$

$$= 5.$$

故答案为: 5.

14. 已知 $\sqrt{4x-y^2+1}$ 与 $|y^2-5|$ 互为相反数, 其中 x 、 y 是实数, 则 $x+y = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $1+\sqrt{5}$ 或 $1-\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查绝对值、算术平方根的非负性，理解算术平方根、绝对值的非负性是正确解答的关键。根据算术平方根、绝对值的非负性求出 x 、 y 的值，再代入计算即可。

【详解】 解： $\because \sqrt{4x-y^2+1}$ 与 $|y^2-5|$ 互为相反数，

$$\therefore \sqrt{4x-y^2+1} + |y^2-5| = 0,$$

$$\therefore 4x-y^2+1=0, \quad y^2-5=0,$$

$$\therefore y = \pm\sqrt{5}, \quad 4x-5+1=0,$$

$$\text{解得 } x=1, \quad y = \pm\sqrt{5},$$

$$\therefore x+y = 1+\sqrt{5} \text{ 或 } x+y = 1-\sqrt{5},$$

故答案为： $1+\sqrt{5}$ 或 $1-\sqrt{5}$ 。

15. 已知 a 、 b 分别为等腰三角形的两条边长，且 a 、 b 满足 $a = 5 + \sqrt{3b-9} - 3\sqrt{3-b}$ ，则此三角形的周长是_____。

【答案】 11 或 13

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件，三角形三边关系，等腰三角形的性质，掌握二次根式有意义的条件，三角形三边关系，等腰三角形的性质是解题的关键。先根据二次根式有意义的条件得出：
$$\begin{cases} 3b-9 \geq 0 \\ 3-b \geq 0 \end{cases},$$

解得： $b=3$ ，把 $b=3$ 代入 $a = 5 + \sqrt{3b-9} - 3\sqrt{3-b}$ 求出 a 的值，然后再分类分析，计算三角形的周长即可。

【详解】 解：由题意，得
$$\begin{cases} 3b-9 \geq 0 \\ 3-b \geq 0 \end{cases},$$

解得： $b=3$ ，

把 $b=3$ 代入 $a = 5 + \sqrt{3b-9} - 3\sqrt{3-b}$ ，得 $a=5$ 。

当等腰三角形的腰长为 3 时，则三角形的三边为 3，3，5，

$$\because 3+3 > 5,$$

$\therefore$ 能组成三角形，

$$\therefore \text{三角形的周长为： } 3+3+5=11;$$

当等腰三角形的腰长为 5 时，则三角形的三边为 5，5，3，

$$\because 3+5>5,$$

$\therefore$ 能组成三角形,

$$\therefore \text{三角形的周长为: } 5+5+3=13,$$

综上所述, 此三角形的周长为 11 或 13.

故答案为: 11 或 13.

16. 比较大小: $3-\sqrt{3}$ _____ $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ (填不等号)

【答案】 $>$

【解析】

【分析】 本题考查了无理数的大小比较, 准确计算是解题的关键. 通过作差法求解即可.

【详解】 $3-\sqrt{3}-(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$

$$=3-\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$

$$=3+\sqrt{3}-3\sqrt{2},$$

$$\because \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{2} \approx 1.414,$$

$$\therefore 3\sqrt{2} \approx 4.242, 3+\sqrt{3} \approx 3+1.732=4.732,$$

$$\therefore 4.732 > 4.242,$$

$$\text{即 } 3+\sqrt{3}-3\sqrt{2} > 0,$$

$$\text{即 } 3-\sqrt{3} > 3\sqrt{2}-2\sqrt{3};$$

故答案是: $>$.

17. 若 $(x-1)(x-4)+m$ 是完全平方式, 则单项式 m 可以是_____.

【答案】 $\frac{9}{4}$ 或 $9x$

【解析】

【分析】 本题主要考查完全平方公式、多项式乘多项式. 先化简, 再根据完全平方公式进行计算即可.

【详解】 解: 原式 $= x^2 - 5x + 4 + m$,

$$\because (x-1)(x-4)+m \text{ 是完全平方式,}$$

$$\therefore x^2 - 5x + 4 + m \text{ 是完全平方式,}$$

$$\therefore 4+m=\left(\frac{5}{2}\right)^2 \text{ 或 } -5x+m=4x,$$

$$\therefore m=\frac{9}{4} \text{ 或 } m=9x,$$

故答案为: $\frac{9}{4}$ 或 $9x$ (答案不唯一)

18. 将一组数 $\sqrt{2}, 2, \sqrt{6}, 2\sqrt{2}, \sqrt{10}, \dots, 4\sqrt{6}$ 按下面的方式进行排列: $\sqrt{2}, 2, \sqrt{6}, 2\sqrt{2}, \sqrt{10}, 2\sqrt{3}, \sqrt{14}, 4, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{5}, \dots$. 若 $2\sqrt{2}$ 的位置记为 $(1,4)$, $\sqrt{14}$ 的位置记为 $(2,2)$, 则这组数中最大的有理数的位置记为_____.

【答案】 $(7,2)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的应用, 准确计算是解题的关键.

根据题意可得每行五个数, 且根号里面的数都是 2 的倍数, 从而可以得到这组数中最大的有理数是 $\sqrt{64}$, 并得出它所在的位置即可.

【详解】 解: $\because 2\sqrt{2}$ 的位置记为 $(1,4)$, $\sqrt{14}$ 的位置记为 $(2,2)$,

$\therefore$ 这组数的排列方式为每行五个数,

$\therefore$ 这组数排列为 $\sqrt{2}, 2, \sqrt{6}, 2\sqrt{2}, \sqrt{10},$

$2\sqrt{3}, \sqrt{14}, 4, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{5}, \dots$.

将题干中的数统一为根号形式, 得到数列为 $\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{4}, \sqrt{6}, \sqrt{8},$

$\sqrt{10}, \sqrt{12}, \sqrt{14}, \sqrt{16}, \sqrt{18}, \sqrt{20}, \dots$.

$\therefore$ 根号里面的数都是 2 的倍数,

$\therefore$ 这组数中最大的 $4\sqrt{6} = \sqrt{96}$, 由大到小依次为 $\sqrt{96}, \sqrt{94}, \sqrt{92}, \sqrt{90}, \dots, \sqrt{66}, \sqrt{64} = 8, \sqrt{62}, \dots,$

$\sqrt{6}, \sqrt{4}, \sqrt{2}.$

$\therefore$ 这组数中最大的有理数是 $\sqrt{64}$,

$\because 64 \div 2 = 32, 32 \div 5 = 6 \dots 2,$

$\therefore \sqrt{64}$ 是第七行第二个数, 位置记为 $(7,2)$.

故答案为: $(7,2)$.

三、解答题：本题共 9 小题，共 53 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

19. 计算： $(2025 - \pi)^0 - |2.5 - \sqrt{5}| + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} + 0.6$

【答案】 $1.1 + \sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了实数混合运算，属于基础题，熟练掌握相关的运算法则，是解题的关键。根据零指数幂和负整数指数幂运算法则，算术平方根定义，绝对值意义，进行计算即可。

【详解】 解： $(2025 - \pi)^0 - |2.5 - \sqrt{5}| + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} + 0.6$

$$= 1 - (2.5 - \sqrt{5}) + \sqrt{4} + 0.6$$
$$= 1 - 2.5 + \sqrt{5} + 2 + 0.6$$
$$= 1.1 + \sqrt{5}.$$

20. 计算： $\sqrt{\frac{3}{8}} - \left(-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{27}{2}} + 3\sqrt{\frac{1}{6}}\right) + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$

【答案】 $\frac{9\sqrt{6}}{8}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的加减运算等知识，正确进行二次根式的化简是解题的关键。先去括号，再把二次根式化为最简二次根式，然后相加减即可。

【详解】 解： $\sqrt{\frac{3}{8}} - \left(-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{27}{2}} + 3\sqrt{\frac{1}{6}}\right) + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$= \sqrt{\frac{3}{8}} + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{27}{2}} - 3\sqrt{\frac{1}{6}} + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{3\sqrt{6}}{2} - 3 \times \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{3}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{9\sqrt{6}}{8} - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$
$$= \frac{2\sqrt{6}}{8} + \frac{9\sqrt{6}}{8} - \frac{4\sqrt{6}}{8} + \frac{2\sqrt{6}}{8}$$

$$= \frac{9\sqrt{6}}{8}.$$

21. 计算: $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \sqrt{13-4\sqrt{10}}.$

【答案】 $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算. 先分母有理化, 再利用完全平方公式表示 $13-4\sqrt{10}$ 变形为 $(\sqrt{8}-\sqrt{5})^2$, 接着根据二次根式的乘法法则和二次根式的性质计算, 然后合并同类二次根式即可.

【详解】 解:
$$\begin{aligned} & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \sqrt{13-4\sqrt{10}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})} - \frac{\sqrt{6}(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})} + \sqrt{13-2\sqrt{40}} \\ &= \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})} - \frac{6\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{18-12} + \sqrt{(\sqrt{8}-\sqrt{5})^2} \\ &= -(\sqrt{3}+\sqrt{5}) - (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \sqrt{8}-\sqrt{5} \\ &= -\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

22. 计算: $\frac{2}{3y}\sqrt{xy^3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\sqrt{2x^3y}\right) \div \sqrt{\frac{9y}{8x}} (x < 0)$

【答案】 $\frac{2x^2}{3}\sqrt{xy}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质化简, 然后再根据二次根式的乘除运算法则计算即可.

本题考查了二次根式的乘除, 二次根式的性质与化简, 掌握二次根式的乘除运算法则, 二次根式的性质是解题的关键.

【详解】 解:
$$\frac{2}{3y}\sqrt{xy^3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\sqrt{2x^3y}\right) \div \sqrt{\frac{9y}{8x}} (x < 0)$$

$$= \left[\frac{2}{3y} \times \left(-\frac{3}{4} \right) \right] \sqrt{xy^3 \cdot 2x^3y} \div \sqrt{\frac{9y}{8x}}$$

$$= -\frac{1}{2y} \sqrt{2x^4y^4} \div \sqrt{\frac{9y}{8x}}$$

$$= -\frac{1}{2y} \sqrt{\frac{2x^4y^4}{\frac{9y}{8x}}}$$

$$= -\frac{1}{2y} \sqrt{\frac{16x^5y^3}{9}}$$

$$= -\frac{1}{2y} \times \frac{4}{3} \sqrt{x^4y^2 \cdot xy}$$

$$\because \sqrt{x^4y^2} = x^2 |y| = x^2(-y) = -x^2y$$

$$\therefore \text{原式} = -\frac{2}{3y} \cdot (-x^2y) \sqrt{xy}$$

$$= \frac{2x^2}{3} \sqrt{xy}.$$

23 解方程:

$$(1) \frac{1}{2}x^2 - 3x - 5 = 0 \quad (\text{用配方法});$$

$$(2) 2\sqrt{3}x = \sqrt{2}(x^2 + 1).$$

【答案】 (1) $x_1 = 3 - \sqrt{19}, x_2 = 3 + \sqrt{19}$

$$(2) x_1 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了公式法和配方法解一元二次方程，熟知公式法及配方法解一元二次方程的步骤是解题的关键.

(1) 利用配方法对所给一元二次方程进行求解即可;

(2) 利用公式法对所给一元二次方程进行求解即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \frac{1}{2}x^2 - 3x - 5 = 0,$$

$$x^2 - 6x = 10,$$

$$x^2 - 6x + 9 = 10 + 9,$$

$$(x-3)^2 = 19,$$

$$\text{则 } x-3 = \pm\sqrt{19},$$

$$\text{所以 } x_1 = 3 - \sqrt{19}, \quad x_2 = 3 + \sqrt{19};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } 2\sqrt{3}x = \sqrt{2}(x^2 + 1),$$

$$\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{2} = 0,$$

$$\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4 > 0,$$

$$\text{则 } x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{4}}{2 \times \sqrt{2}},$$

$$\text{所以 } x_1 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

24. 已知点 A 、 B 、 C 、 D 在数轴上，其中 A 、 B 分别表示数 $1 - \sqrt{3}$ 和 $1 + \sqrt{3}$ ．点 C 向左平移 4 个单位长度后与点 B 重合．

(1) 线段 AB 的长=_____．

(2) 点 C 表示的数是_____．

(3) 对于数轴上三点，若其中两点关于另一点对称，则称这三点为“优美关系”，如果点 A 、点 B 、点 D 为优美关系，那么点 D 对应的实数为_____．

【答案】(1) $2\sqrt{3}$

(2) $5 + \sqrt{3}$

(3) $1 - 3\sqrt{3}$ 或 1 或 $1 + 3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题主要考查了实数与数轴，熟练掌握数轴上点的特征是解题的关键．

(1) 线段 AB 的长等于较大的数减去较小的数，计算即可．

(2) 点 C 向左平移 4 个单位长度后与点 B 重合, 也就是点 B 向右平移 4 个单位长度得到点 C 解答即可.

(3) 分三种情况考虑, 利用数轴上点的特征和对称性解答即可.

【小问 1 详解】

解: $\because A、B$ 分别表示数 $1-\sqrt{3}$ 和 $1+\sqrt{3}$,

$$\therefore AB = 1+\sqrt{3} - (1-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}.$$

故答案为: $2\sqrt{3}$;

【小问 2 详解】

解: $\because$ 点 C 向左平移 4 个单位后与点 B 重合,

$$\therefore \text{点 } C \text{ 表示的数是 } 1+\sqrt{3}+4=5+\sqrt{3}.$$

故答案为: $5+\sqrt{3}$;

【小问 3 详解】

解: 设点 D 表示的数为 x_D ,

$\because$ 点 A 、点 B 、点 D 为优美关系, 且点 $A、B$ 分别表示数 $1-\sqrt{3}$ 和 $1+\sqrt{3}$.

当点 B 和点 D 关于点 A 对称时, 则 $AD = AB$,

$$\text{即 } (1+\sqrt{3}) - (1-\sqrt{3}) = (1-\sqrt{3}) - x_D,$$

$$\text{解得 } x_D = 2(1-\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3}) = 1-3\sqrt{3};$$

当点 B 和点 A 关于点 D 对称时, 则 $AD = BD$,

$$\text{即 } (1+\sqrt{3}) - x_D = x_D - (1-\sqrt{3}),$$

解得 $x_D = 1$;

当点 A 和点 D 关于点 B 对称时, 则 $AB = BD$,

$$\text{即 } x_D - (1+\sqrt{3}) = (1+\sqrt{3}) - (1-\sqrt{3}),$$

$$\text{解得 } x_D = 1+3\sqrt{3};$$

$\therefore$ 点 D 对应的实数为 $1-3\sqrt{3}$ 或 1 或 $1+3\sqrt{3}$.

故答案为: $1-3\sqrt{3}$ 或 1 或 $1+3\sqrt{3}$.

25. 已知 $5-\sqrt{3}$ 的整数部分是 x , 小数部分是 y , 求 $2y^3 + 3y^2 + x^2 - 42y + 3$ 的值.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查了无理数的估算，二次根式的化简求值，先估算出 $\sqrt{3}$ 的范围，求出 x 、 y 的值，再代入求值即可.

【详解】 解： $\because 1 < \sqrt{3} < 2$,

$$\therefore -2 < -\sqrt{3} < -1,$$

$$\therefore 3 < 5 - \sqrt{3} < 4,$$

$\therefore 5 - \sqrt{3}$ 的整数部分是 x ，小数部分是 y ,

$$\therefore x = 3, \quad y = 5 - \sqrt{3} - 3 = 2 - \sqrt{3},$$

$$\therefore 2y^3 + 3y^2 + x^2 - 42y + 3$$

$$= y^2(2y + 3) + 3^2 - 42(2 - \sqrt{3}) + 3$$

$$= (2 - \sqrt{3})^2 [2(2 - \sqrt{3}) + 3] + 9 - 84 + 42\sqrt{3} + 3$$

$$= (7 - 4\sqrt{3})(7 - 2\sqrt{3}) + 9 - 84 + 42\sqrt{3} + 3$$

$$= 73 - 42\sqrt{3} + 9 - 84 + 42\sqrt{3} + 3$$

$$= 1.$$

26. 先化简，再求值： $\left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{x+4y-4\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-2\sqrt{y}} \right)^2$ ，其中 $x = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ ， $y = \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$.

【答案】 $4x - 4\sqrt{xy} + y$ ， $11 - 6\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的化简求值：二次根式的化简求值，一定要先化简再代入求值. 也考查了分式的化简求值.

先利用乘法公式和因式分解的方法得到原式 $= \left[\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})^2}{\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} \right]^2$ ，再约分后利用

完全平方公式得到原式 $= 4x - 4\sqrt{xy} + y$ ，接着利用分母有理化得到 $x = 3 - 2\sqrt{2}$ ， $y = 3 + 2\sqrt{2}$ ，然后把 x 、 y 的值代入计算即可.

【详解】解：原式 = $\left[\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})^2}{\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} \right]^2$,

$$= (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x} - 2\sqrt{y})^2,$$

$$= (2\sqrt{x} - \sqrt{y})^2,$$

$$= 4x - 4\sqrt{xy} + y,$$

$$\because x = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = 3-2\sqrt{2}, \quad y = \frac{1}{3-2\sqrt{2}} = 3+2\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{原式} = 4 \times (3-2\sqrt{2}) - 4\sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} + 3+2\sqrt{2}$$

$$= 12 - 8\sqrt{2} - 4 \times 1 + 3 + 2\sqrt{2}$$

$$= 11 - 6\sqrt{2}.$$

27. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 射线 BM 、 BN 在 $\angle ABC$ 内部, 分别交线段 AC 于点 G 、 H .

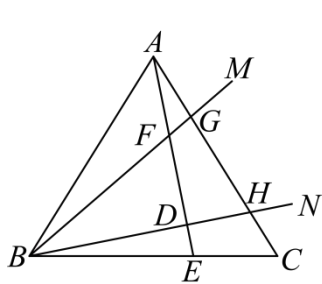


图1

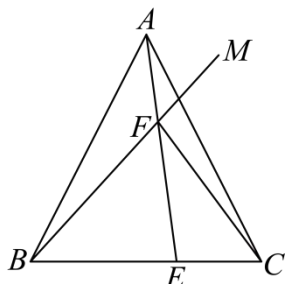


图2

(1) 如图 1, 若 $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle MBN = 30^\circ$, 作 $AE \perp BN$ 于点 D , 分别交 BC 、 BM 于点 E 、 F .

①求证: $AE = BG$;

②若 $AD = BF$, 连接 CF , 求 $\angle CFE$ 的度数;

(2) 如图 2, 点 E 为 BC 上一点, AE 交 BM 于点 F , 连接 CF . 若 $\angle BFE = \angle BAC = 2\angle CFE$, 求 $\frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle ABF}}$

的值.

【答案】(1) ①见解析; ② 30°

(2) $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】本题是三角形的综合题, 考查了全等三角形的性质和判定, 等腰三角形的判定和性质, 三角形的面积的计算, 正确的作出辅助线是解题的关键.

(1) ①由 $AB = AC$, $\angle ABC = 60^\circ$ 得到 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 根据等边三角形的性质得到 $\angle BAC = \angle ACB = 60^\circ$, $AB = CA$, 求得 $\angle BFD = \angle AFG = 60^\circ$, 推出 $\angle EAC = \angle GBA$ 证得 $\triangle GBA \cong \triangle EAC$, 根据全等三角形的性质即可得到结论;

②证明 $\triangle ADB \cong \triangle BFC$ 即可解决问题;

(2) 如图 2, 在 BF 上取 $BN = AF$, 连接 AN , 推出 $\angle EAC = \angle FBA$, 根据全等三角形的性质得到 $S_{\triangle ABN} = S_{\triangle ACF}$, $\angle ANB = \angle AFC$, 证得 $\triangle FAN$ 是等腰三角形, 根据等腰三角形的性质得到 $AF = FN$, 即可得到结论.

【小问 1 详解】

解: ① $\because AB = AC$, $\angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形,

则 $\angle BAC = \angle ACB = 60^\circ$, $AB = CA$,

$\because AD \perp BN$, $\angle MBN = 30^\circ$,

$\therefore \angle BFD = \angle AFG = 60^\circ$,

$\because \angle ABF + \angle BAF = 60^\circ$, $\angle BAF + \angle EAC = 60^\circ$,

$\therefore \angle EAC = \angle GBA$,

在 $\triangle GBA$ 与 $\triangle EAC$ 中,

$$\begin{cases} \angle GBA = \angle EAC \\ AB = CA \\ \angle GAB = \angle ECA \end{cases} ,$$

$\therefore \triangle GBA \cong \triangle EAC (ASA)$,

$\therefore AE = BG$;

②如图 1, 取 BF 的中点 K 连接 AK ,

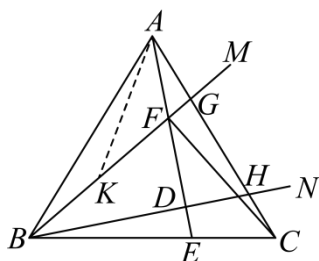


图1

$\because \angle GBA = \angle EAC$

$\therefore \angle BAE = \angle CBG$,

$\because \angle ABG + \angle CBG = 60^\circ$,

$$\therefore \angle BFD = \angle ABF + \angle BAF = 60^\circ,$$

$$\because AD \perp BN,$$

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\because \angle DBF = 30^\circ,$$

$$\therefore BF = 2DF,$$

$$\because AD = BF,$$

$$\therefore BF = 2AF,$$

$$\therefore AF = BK = FK = \frac{1}{2}BF,$$

$\therefore \triangle FAK$ 是等腰三角形,

$$\therefore \angle FAK = \angle FKA,$$

$$\because \angle BFD = \angle FAK + \angle FKA = 2\angle AKF,$$

$$\because \angle BFD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AKF = \frac{1}{2}\angle BFD = 30^\circ,$$

$$\because \triangle GBA \cong \triangle EAC,$$

$$\therefore AG = CE, \quad BG = AE, \quad \angle AGB = \angle AEC,$$

$$\therefore KG = BG - BK = AE - AF = FE,$$

在 $\triangle GAK$ 与 $\triangle EFC$ 中,

$$\begin{cases} AG = CE \\ \angle AGB = \angle AEC, \\ KG = FE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle GAK \cong \triangle EFC (SAS),$$

$$\therefore \angle CFE = \angle AKF,$$

$$\therefore \angle CFE = \angle AKF = 30^\circ;$$

【小问 2 详解】

解: 如图 2, 在 BF 上取 $BN = AF$, 连接 AN ,

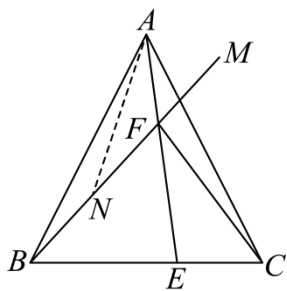


图2

$$\because \angle BFE = \angle BAF + \angle ABF ,$$

$$\because \angle BFE = \angle BAC ,$$

$$\therefore \angle BAF + \angle EAC = \angle BAF + \angle ABF ,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle FBA ,$$

在 $\triangle ABN$ 与 $\triangle ACF$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle ABN = \angle FAC , \\ BN = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABN \cong \triangle AFC (SAS) ,$$

$$\therefore S_{\triangle ABN} = S_{\triangle ACF} , \quad \angle ANB = \angle AFC ,$$

$$\because \angle BFE = 2\angle CFE ,$$

$$\therefore \angle BFE = 2\angle ANF ,$$

$$\because \angle BFE = 2\angle ANF = \angle ANF + \angle NAF ,$$

$$\therefore \angle ANF = \angle NAF ,$$

$\therefore \triangle FAN$ 是等腰三角形,

$$\therefore AF = FN ,$$

$$\therefore BN = AF = FN ,$$

$$\therefore S_{\triangle ABN} = S_{\triangle AFN} ,$$

$$\because S_{\triangle ABF} = S_{\triangle ABN} + S_{\triangle AFN} = 2S_{\triangle ABN} = 2S_{\triangle ACF} ,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle ABF}} = \frac{1}{2} .$$