

2025 学年第一学期八年级数学学科阶段练习 2

时间：90 分钟 满分：150 分

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. 若方程 $x^2 - ax - 1 = 0$ 的两根之和为 -2 ，则 a 的值是（ ）

- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了根与系数的关系，牢记两根之和等于 $-\frac{b}{a}$ 是解题的关键.

由根与系数的关系结合两根之和为 -2 ，即可求出 a 值.

【详解】解：在 $x^2 - ax - 1 = 0$ 中，两根之和等于 $-\frac{-a}{1} = a$ ，

$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - ax - 1 = 0$ 的两根之和为 -2 ，

$\therefore a = -2$.

故选：D.

2. 已知方程 $x^2 - 3x + k = 0$ 的一个根是另一个根的 2 倍，则 k 的值是（ ）

- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程根与系数的关系；设方程的两个根为 r 和 $2r$ ，利用根与系数的关系求和与积，解出 r 后求 k .

【详解】解：设方程 $x^2 - 3x + k = 0$ 的两个根为 r 和 $2r$ ，

$\therefore$ 两根之和 $r + 2r = -\frac{-3}{1} = 3$ ，

$\therefore 3r = 3$ ，

$\therefore r = 1$ ，

$\therefore$ 另一个根为 $2 \times 1 = 2$ ，

$\therefore$ 两根之积 $r \times 2r = 2r^2 = \frac{k}{1} = k$ ，

$\therefore k = 2 \times 1^2 = 2$.

故选：C.

3. 某款 *labubu* 的原价为 168 元, 如果经过两次降价, 且每次降价的百分率都是 m , 那么该商品现在的价格是 () 元 (结果用含 m 的代数式表示).

- A. $168(1-m)$ B. $168(1-2m)$ C. $168(1-m\%)^2$ D. $168(1-m)^2$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了列代数式及增长率问题, 先计算第一次降价后的价格, 再计算第二次降价后的价格, 根据最终售价列出方程, 最后判断选项正确性.

【详解】解: $\because$ 原价为 168 元, 每次降价百分率为 m ,

$\therefore$ 第一次降价后价格为 $168 \times (1-m) = 168(1-m)$,

第二次降价后价格为 $[168 \times (1-m)] \times (1-m) = 168 \times (1-m)^2 = 168(1-m)^2$,

$\therefore$ 现在的价格为 $168(1-m)^2$ 元.

故选: D.

4. 在实数范围内因式分解: $x^2 - 2x - 1$, 下列选项中正确的是 ()

- A. $(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$ B. $(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$
C. $(x-1+2\sqrt{2})(x-1-2\sqrt{2})$ D. $(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的求根公式; 通过求根公式求出二次方程的根, 然后写出因式分解形式.

【详解】解: $\because$ 对于 $x^2 - 2x - 1 = 0$, 判别式 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8$,

$\therefore$ 根为 $x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$,

$\therefore$ 因式分解为 $[x - (1 + \sqrt{2})][x - (1 - \sqrt{2})] = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$,

故选: B.

5. 用 20 米长的篱笆围成一个一面靠墙的矩形养鸡场, 在平行于墙的一边上开一扇 2 米宽的门. 若设垂直于墙的一边为 x 米, 则平行于墙的一边为 () 米.

- A. $18-2x$ B. $20-2x$ C. $20+2x$ D. $22-2x$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了长方形周长公式及用代数式表示数量关系，根据篱笆的长度，门的宽度以及垂直于墙的边长，结合养鸡场的实际围法来确定平行于墙的边长.

【详解】解：设垂直于墙的一边为 x 米，由于垂直于墙的边有两条，

$\therefore$ 两条边的总长度为 $2 \times x = 2x$ 米，

$\because$ 篱笆长 20 米，门宽 2 米，

$\therefore$ 平行于墙的一边长为： $20 + 2 - 2x = (22 - 2x)$ 米.

故选：D.

6. 曹杨影院七月份的票房 10 亿元，第三季度的票房共 33.1 亿元，若每个月的增长率相同，则这个增长率为（ ）

A. 10%

B. 20%

C. 30%

D. 33.1%

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程解决实际问题；设每月增长率为 r ，则七月票房为 10 亿元，八月为 $10(1+r)$ 亿元，九月为 $10(1+r)^2$ 亿元，第三季度总票房为三者之和，列出方程求解.

【详解】解：设每月增长率为 r ，

$\because$ 第三季度总票房为 33.1 亿元，

$\therefore 10 + 10(1+r) + 10(1+r)^2 = 33.1$ ，

化简得： $r^2 + 3r - 0.31 = 0$

解得： $r_1 = 0.1$ ， $r_2 = -3.1$ （舍去），

$\therefore$ 增长率为 10%.

故选：A.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ 30'$ ，则 $\angle B = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$.

【答案】59.5

【解析】

【分析】本题考查角度的减法运算，直角三角形的性质；根据直角三角形的性质，两锐角互余，可得 $\angle B = 90^\circ - \angle A$ 即可求解.

【详解】解：∵ $\angle C = 90^\circ$,

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle A = 30^\circ 30',$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ - 30^\circ 30' = 89^\circ 60' - 30^\circ 30' = 59^\circ 30' = 59.5^\circ.$$

故答案为：59.5.

8. 直角三角形斜边上的中线与斜边的总和为 3，则斜边长是_____.

【答案】2

【解析】

【分析】本题考查了直角三角形斜边上的中线，一元一次方程，正确理解相关概念是解题的关键.

根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质，设斜边长为 c ，建立方程求解.

【详解】解：设斜边长为 c ，则斜边上中线长为 $\frac{c}{2}$,

$$\text{由题意} \frac{c}{2} + c = 3,$$

$$\text{即} \frac{3c}{2} = 3,$$

$$\text{解得} c = 2.$$

故答案为：2

9. 直角三角形斜边长是 10，则该三角形中 60° 的角所对的直角边长是_____.

【答案】 $5\sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题考查了含 30° 的直角三角形，勾股定理，熟知 30° 所对的直角边是斜边的一半是解题的关键.

先求得 30° 所对的直角边，再利用勾股定理即可.

【详解】解：在直角三角形中，若一个角为 60° ，则另一个锐角为 30° ,

所以 30° 的角所对的直角边长是 5,

根据勾股定理可得 60° 的角所对的直角边长是 $\sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$,

故答案为： $5\sqrt{3}$.

10. 等腰直角三角形的腰长为 5 cm，则这个三角形的周长是_____ cm.

【答案】 $(10 + 5\sqrt{2})$

【解析】

【分析】本题考查勾股定理；等腰直角三角形的两腰相等且为直角边，通过勾股定理求得斜边长，再计算

周长.

【详解】解: $\because$ 等腰直角三角形的腰长为 5cm ,

$\therefore$ 两腰之和为 $5+5=10\text{cm}$,

$\therefore$ 斜边长为 $\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}\text{cm}$,

$\therefore$ 周长为 $(10+5\sqrt{2})\text{cm}$.

故答案为: $(10+5\sqrt{2})$.

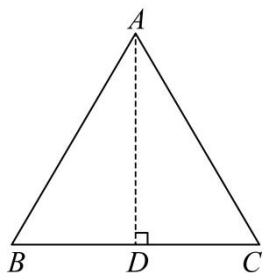
11. 边长为 6 的等边三角形的面积是_____

【答案】 $9\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查等边三角形的性质. 注意掌握等边三角形的底边上的高线、中线与顶角的角平分线三线合一. 根据题意利用等边三角形的“三线合一”的性质作辅助线 $AD \perp BC$, 然后在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中由勾股定理求得高线 AD 的长度, 最后根据三角形的面积公式求该三角形的面积即可.

【详解】 解: 如图, 等边 $\triangle ABC$ 的边长是 6.



过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D . 则 $BD = DC = \frac{1}{2} BC = 3$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 3\sqrt{3}$;

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

故答案为: $9\sqrt{3}$.

12. 若直角三角形的两条直角边长分别为 3cm , 4cm , 则斜边上的高为_____ cm .

【答案】 $\frac{12}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理、三角形面积的计算方法; 由勾股定理求出斜边长是解决问题的关键.

先根据勾股定理求出斜边长, 再设这个直角三角形斜边上的高为 h , 根据三角形的面积公式求出 h 的值即可.

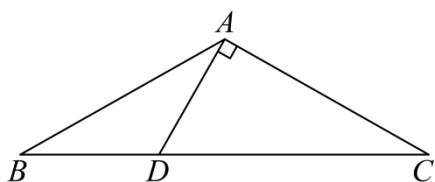
【详解】解：∵直角三角形的两条直角边长分别为3cm,4cm，

$$\therefore \text{斜边} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{cm},$$

设这个直角三角形斜边上的高为 h ，则 $h = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}\text{cm}$ ，

故答案为： $\frac{12}{5}$ ；

13. 如图，已知 $\triangle ABC$ ， $AB = AC$ ，点 D 在 BC 边上， $\angle DAC = 90^\circ$ ， $AD = \frac{1}{2}CD$ ，那么 $\angle BAC$ 的度数是_____.



【答案】 120° ## 120 度

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质，直角三角形的性质，求得 $\angle C = 30^\circ$ 是解题的关键.

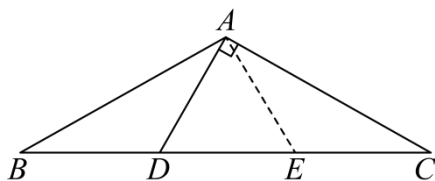
根据等腰三角形的性质得到 $\angle B = \angle C$ ，取 CD 的中点 E ，连接 AE ，根据斜边上的中线等于斜边的一半，推导出 $\angle C = 30^\circ$ ，求得 $\angle B = \angle C = 30^\circ$ ，根据三角形的内角和定理即可得到结论.

【详解】解：∵ $AB = AC$ ，

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\because \angle DAC = 90^\circ, \quad AD = \frac{1}{2}CD.$$

如图，取 CD 的中点 E ，连接 AE ，



$$\therefore AE = DE = CE = \frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore AE = DE = AD,$$

∴ $\triangle ADE$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle ADC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ - \angle ADC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle C = 120^\circ.$$

故答案为: 120° .

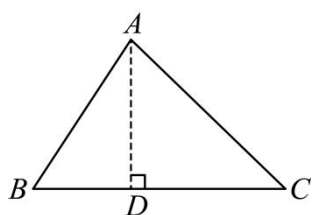
14. 三角形的三边分别为 5、6、7, 则它的面积为_____.

【答案】 $6\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理及三角形三边求面积. 已知三角形三边长度, 构造三角形的高利用勾股定理求出其高进而求得三角形的面积.

【详解】 解: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 5$, $AC = 6$, $BC = 7$, 过点 A 作 $AD \perp BC$ 交 BC 于点 D ,



设 $BD = a$, 则 $DC = BC - BD = 7 - a$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{25 - a^2}$,

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $AD^2 + DC^2 = AC^2$,

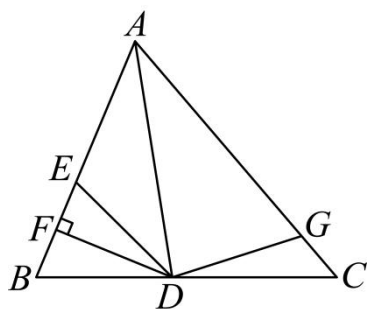
$$\therefore (25 - a^2) + (7 - a)^2 = 6^2, \text{ 解得 } a = \frac{19}{7},$$

$$\therefore AD = \sqrt{25 - \left(\frac{19}{7}\right)^2} = \frac{12}{7}\sqrt{6},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BC = \frac{1}{2} \times \frac{12}{7}\sqrt{6} \times 7 = 6\sqrt{6}.$$

故答案为: $6\sqrt{6}$.

15. 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $DF \perp AB$, 垂足为 F , $DE = DG$, $\triangle ADG$ 和 $\triangle AED$ 的面积分别为 50 和 39, 则 $\triangle EDF$ 的面积为_____.

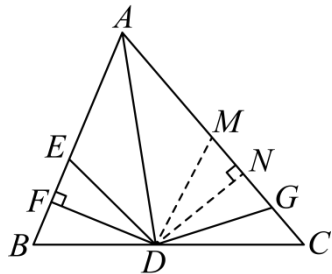


【答案】 5. 5.

【解析】

【详解】作 $DM=DE$ 交 AC 于 M ，作 $DN \perp AC$ ，利用角平分线的性质得到 $DN=DF$ ，将三角形 EDF 的面积转化为三角形 DNM 的面积来求。

解：作 $DM=DE$ 交 AC 于 M ，作 $DN \perp AC$ ，



$\because DE=DG, DM=DE,$

$\therefore DM=DG,$

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DF \perp AB,$

$\therefore DF=DN,$

$\therefore \triangle DEF \cong \triangle DNM$ (HL),

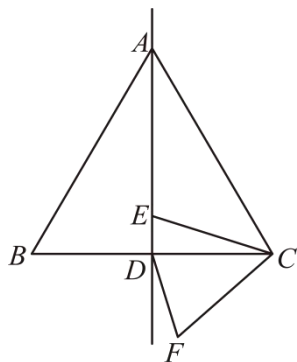
$\because \triangle ADG$ 和 $\triangle AED$ 的面积分别为 50 和 39,

$\therefore S_{\triangle MDG} = S_{\triangle ADG} - S_{\triangle ADM} = 50 - 39 = 11,$

$$S_{\triangle DNM} = S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} S_{\triangle MDG} = \frac{1}{2} \times 11 = 5.5$$

故答案为 5.5.

16. 如图所示，边长为 6 的等边三角形 ABC 中， E 是对称轴 AD 上的一个动点，连接 EC ，将线段 EC 绕点 C 逆时针旋转 60° 得到 FC ，连接 DF 。则在点 E 运动过程中， DF 的最小值是_____.



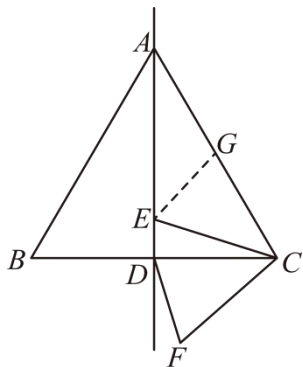
【答案】 1.5.

【解析】

【分析】取 AC 的中点 G ，连接 EG ，根据等边三角形的性质可得 $CD=CG$ ，再求出 $\angle DCF = \angle GCE$ ，根据旋转的性质可得 $CE=CF$ ，然后利用“边角边”证明 $\triangle DCF$ 和 $\triangle GCE$ 全等，再根据全等三角形对应边相等可得

DF=EG, 然后根据垂线段最短可得 $EG \perp AD$ 时最短, 再根据 $\angle CAD=30^\circ$ 求解即可.

【详解】解: 如图, 取 AC 的中点 G, 连接 EG,



$\therefore$ 旋转角为 60° ,

$\therefore \angle ECD + \angle DCF = 60^\circ$,

又 $\therefore \angle ECD + \angle GCE = \angle ACB = 60^\circ$,

$\therefore \angle DCF = \angle GCE$,

$\therefore AD$ 是等边 $\triangle ABC$ 的对称轴,

$\therefore CD = \frac{1}{2} BC$,

$\therefore CD = CG$,

又 $\therefore CE$ 旋转到 CF ,

$\therefore CE = CF$,

在 $\triangle DCF$ 和 $\triangle GCE$ 中,

$$\begin{cases} CE = CF \\ \angle DCF = \angle GCE \\ CD = CG \end{cases}$$

$\therefore \triangle DCF \cong \triangle GCE$ (SAS),

$\therefore DF = EG$,

根据垂线段最短, $EG \perp AD$ 时, EG 最短, 即 DF 最短,

此时 $\therefore \angle CAD = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$, $AG = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 6 = 3$

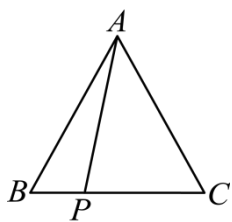
$\therefore EG = \frac{1}{2} AG = 1.5$,

$\therefore DF = 1.5$.

故答案为: 1.5.

【点睛】本题考查了旋转的性质, 等边三角形的性质, 全等三角形的判定与性质, 垂线段最短的性质, 作辅助线构造出全等三角形是解题的关键, 也是本题的难点.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = m$, P 为 BC 上任意一点, 那么 $PA^2 + PB \cdot PC$ 的值是_____.

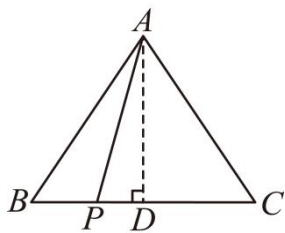


【答案】 m^2

【解析】

【分析】 本题考查等腰三角形的性质, 勾股定理, 平方差公式; 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D , 由勾股定理得 $AB^2 = BD^2 + AD^2$, $AP^2 = PD^2 + AD^2$, 运用平方差公式得 $AB^2 - AP^2 = (BD + PD)(BD - PD)$, 即 $AB^2 - AP^2 = PB \cdot PC$, 再由 $AB = AC = m$ 可得出结论.

【详解】 解: 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D , 如图所示:



$\because AD \perp BC$,

$\therefore AB^2 = BD^2 + AD^2$, $AP^2 = PD^2 + AD^2$,

$\therefore AB^2 - AP^2 = BD^2 - PD^2 = (BD + PD)(BD - PD)$,

$\because AB = AC$,

$\therefore D$ 是 BC 中点,

$\therefore BD + PD = DC + PD = PC$, $BD - PD = PB$,

$\therefore AB^2 - AP^2 = PB \cdot PC$,

$\therefore AP^2 + PB \cdot PC = AB^2 = m^2$.

故答案为: m^2 .

18. 已知, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=3$, $\angle A=22.5^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 翻折使得点 B 与点 A 重合, 折痕与边 AC 交于点 P , 如果 $AP=4$, 那么 AC 的长为_____

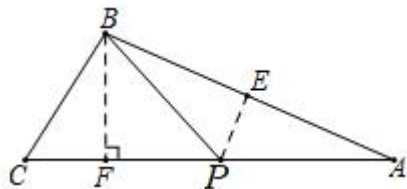
【答案】 $5 + 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】过 B 作 $BF \perp CA$ 于 F，构造直角三角形，分两种情况讨论，利用勾股定理以及等腰直角三角形的性质，即可得到 AC 的长.

【详解】分两种情况：

①当 $\angle C$ 为锐角时，如图所示，过 B 作 $BF \perp AC$ 于 F，



由折叠可得，折痕 PE 垂直平分 AB，

$$\therefore AP=BP=4,$$

$$\therefore \angle BPC=2\angle A=45^\circ,$$

$\therefore \triangle BFP$ 是等腰直角三角形，

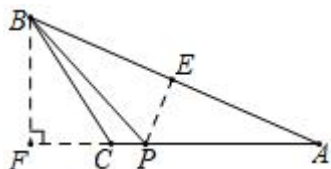
$$\therefore BF=FP=2\sqrt{2},$$

又 $\because BC=3$,

$$\therefore \text{Rt}\triangle BFC \text{ 中, } CF=\sqrt{BC^2-BF^2}=1,$$

$$\therefore AC=AP+PF+CF=5+2\sqrt{2};$$

②当 $\angle ACB$ 为钝角时，如图所示，过 B 作 $BF \perp AC$ 于 F，



同理可得， $\triangle BFP$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore BF=FP=2\sqrt{2},$$

又 $\because BC=3$,

$$\therefore \text{Rt}\triangle BCF \text{ 中, } CF=\sqrt{BC^2-BF^2}=1,$$

$$\therefore AC=AF-CF=3+2\sqrt{2}.$$

故答案为： $5+2\sqrt{2}$ 或 $3+2\sqrt{2}$.

【点睛】 本题主要考查了折叠问题以及勾股定理的运用，解决问题的关键是分两种情况画出图形进行求解．解题时注意：折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对

应边和对应角相等.

三、解答题 (第 19-22 题各 10 分, 第 23 ~ 24 题每题 12 分, 第 25 题 14 分, 共 78 分)

19. 计算:

$$(1) \left(\sqrt{3}-1\right)^2 + \left(\sqrt{3}+2\right) \times \sqrt{3} - \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{7})^2};$$

$$(2) \sqrt{\frac{ab^3}{16}} \div \sqrt{\frac{1}{a}} \times \sqrt{8b^2}.$$

【答案】 (1) 3 (2) $\frac{ab^2\sqrt{2b}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算, 完全平方公式, 熟练掌握运算是解题关键;

(1) 先利用完全平方公式进行化简, 计算乘方, 然后按照运算顺序进行计算即可;

(2) 根据二次根式的性质及乘除运算法则求解即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: 原式} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 + 2\sqrt{3} - \sqrt{9+7}$$

$$= 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 + 2\sqrt{3} - \sqrt{16}$$

$$= 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 + 2\sqrt{3} - 4$$

$$= 3;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: 原式} = \sqrt{\frac{ab^3}{16}} \times a \times 8b^2$$

$$= \sqrt{\frac{a^2b^5}{2}}$$

$$\text{由题意可知 } \frac{1}{a} > 0, \frac{ab^3}{16} \geq 0,$$

$$\text{故 } a > 0, b \geq 0,$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{ab^2\sqrt{2b}}{2}.$$

20. 解方程:

$$(1) 2(x-4)^2 = x^2 - 16;$$

$$(2) \frac{2}{x+2} - \frac{16}{x^2-4} = \frac{x+2}{2-x}.$$

【答案】(1) $x_1 = 12$, $x_2 = 4$

$$(2) x = -8$$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程和分式方程的解法.

(1) 先将方程去掉括号后展开得到 $2x^2 - 16x + 32 = x^2 - 16$, 再移项、合并同类项后得 $x^2 - 16x + 48 = 0$, 利用因式分解的方法解一元二次方程即可得出结果;

(2) 先将方程移项得 $\frac{2}{x+2} - \frac{16}{x^2-4} - \frac{x+2}{2-x} = 0$, 观察方程将 $-\frac{x+2}{2-x}$ 变号并将分母的式子交换位置后得 $\frac{2}{x+2} - \frac{16}{x^2-4} + \frac{x+2}{x-2} = 0$, 方程两边同时乘以 $(x+2)(x-2)$, 得 $2(x-2) - 16 + (x+2)^2 = 0$, 再通过去括号、移项、合并同类项后得 $x^2 + 6x - 16 = 0$, 利用因式分解的方法解一元二次方程得出 $x_1 = -8$, $x_2 = 2$, 由于 $x = 2$ 是方程的增根, 故舍去, 得 $x = -8$.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } 2(x^2 - 8x + 16) = x^2 - 16,$$

$$2x^2 - 16x + 32 = x^2 - 16,$$

$$x^2 - 16x + 48 = 0,$$

$$(x-12)(x-4) = 0,$$

$$x-12=0 \text{ 或 } x-4=0,$$

$$x_1 = 12, \quad x_2 = 4.$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \frac{2}{x+2} - \frac{16}{x^2-4} - \frac{x+2}{2-x} = 0,$$

$$\frac{2}{x+2} - \frac{16}{x^2-4} + \frac{x+2}{x-2} = 0,$$

$$2(x-2) - 16 + (x+2)^2 = 0,$$

$$2x - 4 - 16 + x^2 + 4x + 4 = 0,$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0,$$

$$(x+8)(x-2)=0,$$

$$x+8=0 \text{ 或 } x-2=0,$$

$$x_1=-8, \quad x_2=2,$$

$\because x=2$ 是方程的增根,

$\therefore x=2$ 舍去,

$\therefore x=-8$.

21. 先化简, 再求值: 已知 $x=2-\sqrt{3}$, $y=2+\sqrt{3}$, 求 $\left(\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right) \div \frac{x-y+1}{\sqrt{x}}$ 的值.

【答案】 $\frac{x+\sqrt{xy}}{x-y}; \quad \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查的是分母有理化, 能够利用完全平方公式对所求代数式进行变形是解题的关键.
先对原式进行化简, 再代入求值即可.

【详解】 解: $\left(\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right) \div \frac{x-y+1}{\sqrt{x}}$

$$= \left[\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \right] \div \frac{x-y+1}{\sqrt{x}}$$

$$= \left(\sqrt{x}+\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \right) \div \frac{x-y+1}{\sqrt{x}}$$

$$= \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \right) \div \frac{x-y+1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x-y+1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x-y+1}$$

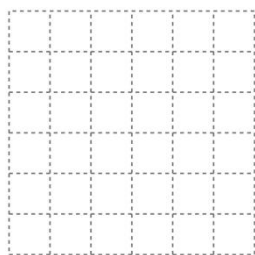
$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$= \frac{x+\sqrt{xy}}{x-y};$$

当 $x = 2 - \sqrt{3}$, $y = 2 + \sqrt{3}$ 时,

$$\text{原式} = \frac{2 - \sqrt{3} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}}{2 - \sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3} + 1}{2 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{-2\sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

22. 如图, 在 6×6 的正方形网格中, 每个小正方形的边长均为 1, 请在给定网格中按下列要求画图并回答问题:



(1) 在网格中画 ABC , 使 ABC 的三个顶点都在小正方形的格点上, AB 、 BC 、 AC 三边的长分别为 $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$.

(2) 判断 ABC 的形状, 并说明理由.

(3) 求作点 P , 使 $BP = CP$, 且点 P 到 BA 、 BC 的距离相等. (保留作图痕迹)

【答案】 (1) 见解析 (2) ABC 是直角三角形, 理由见解析

(3) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了作图, 勾股定理的逆定理;

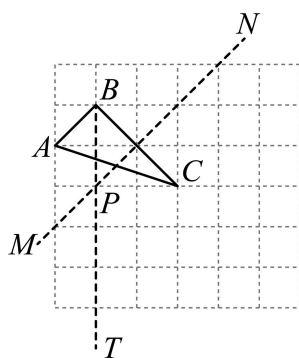
(1) 根据要求作出三角形即可;

(2) 根据勾股定理逆定理求解即可;

(3) 作 BC 的垂直平分线 MN , 作 $\angle ABC$ 的角平分线 BT , BT 和 MN 相交于点 P .

【小问 1 详解】

解: ABC 如图所示,



【小问 2 详解】

解: $\because AB$ 、 BC 、 AC 三边的长分别为 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{8}$ 、 $\sqrt{10}$,

$$\therefore AB^2 + BC^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{8})^2 = 2 + 8 = 10$$

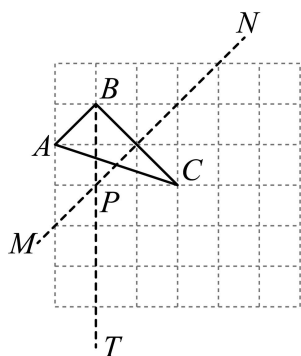
$$AC^2 = (\sqrt{10})^2 = 10$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形

【小问 3 详解】

解: 点 P 如图所示,



23. 已知 m 、 n 是正实数, 关于 x 的一元二次方程: $x^2 + mx = n^2$.

(1) 判断: 方程根的情况.

(2) 若 a 是方程 $x^2 + mx = n^2$ 的一个实数根, 试比较代数式 $(2a + m)^2$ 与 $m^2 + 4n^2$ 的大小关系.

【答案】(1)

方程有两个不相等的实数根.

(2)

$$(2a + m)^2 = m^2 + 4n^2$$

【解析】

【分析】此题考查一元二次方程的根的判别式, 一元二次方程的解,

(1) 计算一元二次方程的根的判别式求出方程的根的情况;

(2) 将方程的根代入, 得到 $a^2 + ma - n^2 = 0$, 计算 $(2a + m)^2 - (m^2 + 4n^2)$, 由此进行判断即可.

【小问 1 详解】

解: $x^2 + mx - n^2 = 0$,

$$\Delta = m^2 - 4 \times (-n^2) = m^2 + 4n^2,$$

$\because m, n$ 是正实数,

$\therefore \Delta > 0$,

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根;

【小问 2 详解】

解:将 $x = a$ 代入方程 $x^2 + mx = n^2$,

得 $a^2 + ma = n^2$,

$\therefore a^2 + ma - n^2 = 0$,

$\therefore (2a + m)^2 - (m^2 + 4n^2)$,

$= 4a^2 + 4ma + m^2 - m^2 - 4n^2$

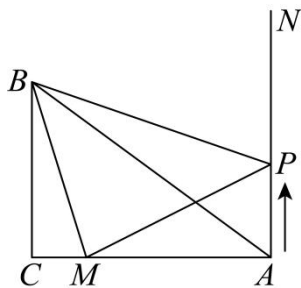
$= 4a^2 + 4ma - 4n^2$

$= 4(a^2 + ma - n^2)$

$= 0$

$\therefore (2a + m)^2 = m^2 + 4n^2$.

24. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 8\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, M 在 AC 上, 且 $AM = 6\text{cm}$, 过点 A (与 BC 在 AC 同侧) 作射线 $AN \perp AC$, 若动点 P 从点 A 出发, 沿射线 AN 匀速运动, 运动速度为 1cm/s , 设点 P 运动时间为 t 秒.



(1) 经过_____秒时, $\text{Rt}\triangle AMP$ 是等腰直角三角形;

(2) 经过几秒时, $PM \perp MB$?

(3) 当 $\triangle BMP$ 是等腰三角形时, 求出 t 的值.

【答案】(1) 6 (2) 经过 2 秒时, $PM \perp MB$

(3) 当 $\triangle BMP$ 是等腰三角形时, $t=2$ 或 $\frac{16}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查的是全等三角形的判定和性质, 等腰直角三角形的定义, 等腰三角形的判定.

(1) 根据等腰直角三角形的概念解答;

(2) 根据垂直的定义和同角的余角相等得到 $\angle CBM = \angle AMP$, 证明 $\triangle CBM \cong \triangle AMP$, 根据全等三角形的性质得到 $AP = CM = 2$, 根据题意得到答案;

(3) 分 $MB = MP$ 和 $PB = PM$ 两种情况, 根据全等三角形的性质, 勾股定理计算即可.

【小问 1 详解】

解: 当 $\text{Rt}\triangle AMP$ 是等腰直角三角形时, $AP = AM = 6\text{cm}$,

$$\therefore t = 6 \div 1 = 6(\text{s}),$$

故答案为: 6;

【小问 2 详解】

解: 当 $PM \perp MB$ 时, $\angle BMP = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BMC + \angle AMP = 90^\circ,$$

又 $\angle BMC + \angle CBM = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CBM = \angle AMP,$$

在 $\triangle CBM$ 和 $\triangle AMP$ 中,

$$\begin{cases} \angle CBM = \angle AMP \\ BC = MA \\ \angle BCM = \angle MAP \end{cases},$$

$$\therefore \triangle CBM \cong \triangle AMP (\text{ASA}),$$

$$\therefore AP = CM = 2,$$

$$\therefore t = 2, \text{ 即经过 } 2 \text{ 秒时, } PM \perp MB;$$

【小问 3 详解】

解: 根据勾股定理得, $BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$, BP 的最小值为 8,

$$\therefore 2\sqrt{10} < 8,$$

$$\therefore BM \neq BP,$$

当 $MB = MP$ 时,

在 $\text{Rt}\triangle BCM$ 和 $\text{Rt}\triangle MAP$ 中,

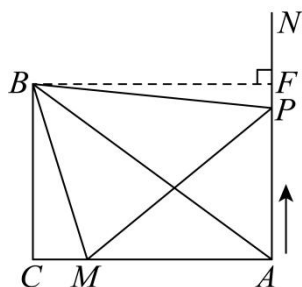
$$\begin{cases} BC = MA \\ BM = MP \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BCM \cong \text{Rt}\triangle MAP (\text{HL}),$$

$$\therefore AP = CM = 2,$$

则 $t = 2$,

当 $PB = PM$ 时, 如图, $BF \perp AN$ 于 F ,



则四边形 $BCAF$ 为矩形,

$$\therefore BF = CA = 8, AF = BC = 6,$$

$$\therefore PF = 6 - t,$$

由勾股定理得, $BP^2 = PF^2 + BF^2$, $MP^2 = AM^2 + AP^2$,

$$\therefore PF^2 + BF^2 = AM^2 + AP^2, \text{ 即 } (6-t)^2 + 8^2 = 6^2 + t^2,$$

$$\text{解得, } t = \frac{16}{3},$$

$$\therefore \text{当 } \triangle BMP \text{ 是等腰三角形时, } t = 2 \text{ 或 } \frac{16}{3}.$$

25. 【了解概念】

如图, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$, $AB = AC$, $AD = AE$, $\angle BAC = \angle DAE$, 连接 CE , 连接 BD 并延长与 CE 交于点 F , 那么将 $\angle BFC$ 叫做 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 的底联角.

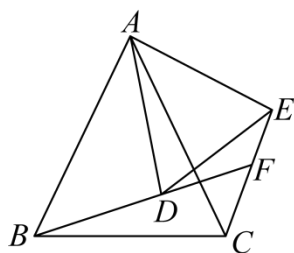


图1

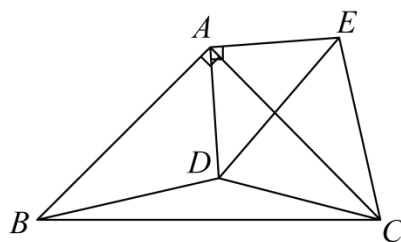


图2

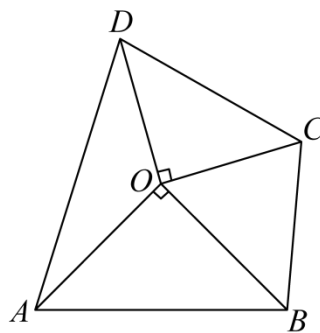


图3

【探究归纳】

(1) 两个等腰三角形的底联角与这两个等腰三角形的顶角有怎样的数量关系? 请用文字语言写出结论.

【拓展提升】运用 (1) 中的结论解决问题:

(2) 如图, $AB = AC$, $AD = AE$, $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$, $\angle DCE = 62^\circ$, 求 $\angle BDC$ 的度数;

(3) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, $BC = 4$, $CD = 5$, 点 O 为四边形 $ABCD$ 内一点, 且

$OA = OB$, $OC = OD$, $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$, 求 AD 的长.

【答案】(1) $\angle BFC = \angle DAE = \angle BAC$, 两个等腰三角形的底联角等于这两个等腰三角形的顶角.

(2) $\angle BDC = 152^\circ$ 或 $\angle BDC = 28^\circ$;

(3) AD 的长为 $3\sqrt{5}$.

【解析】

【分析】(1) 由题中的条件结合图 1 可知, 两个等腰三角形的底联角等于这两个等腰三角形的顶角, 说明理由的方法是, 先证明 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$, 推得 $\angle ADB = \angle AEC$, 再由 $\angle DAE + \angle DFE = 180^\circ$, $\angle BFC + \angle DFE = 180^\circ$ 得 $\angle BFC = \angle BAE = \angle BAC$;

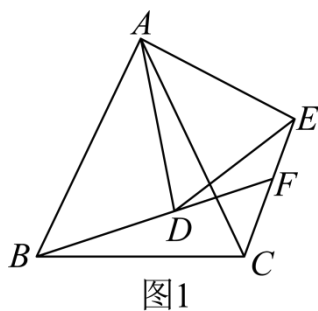
(2) 当点 D 在 $\triangle ABC$ 的内部时, 延长 BD 交 CE 于点 F , 由 (1) 中的结论直接推得 $\angle BFC = \angle DAE = 90^\circ$, 再由三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和求出 $\angle BDC$ 的度数; 当点 D 在 $\triangle ABC$ 的外部时, 设 BD 交 CE 于点 F , 交 AC 于点 G , 先证明 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$, 得 $\angle ABD = \angle ACE$, 则 $\angle ACE + \angle CGD = \angle ABD + \angle AGB = 90^\circ$, 由此推得 $\angle AFC = 90^\circ$, 再由三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和求出 $\angle BDC$ 的度数;

(3) 连接 AC 、 BD 交于点 F , 则 $\angle AFB = \angle AFD = \angle CFD = 90^\circ$, 由勾股定理可推得 $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2 = FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2$, 则 $AD^2 + 4^2 = 6^2 + 5^2$, 可求出 AD 的长.

【小问 1 详解】

解: 两个等腰三角形的底联角等于这两个等腰三角形的顶角.

理由: 如图 1,



$$\therefore \angle BAC = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle BAC - \angle CAD = \angle DAE - \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\therefore AB = AC, AD = AE,$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle ADB = \angle AEC,$$

$$\therefore \angle ADF + \angle AEC = \angle ADF + \angle ADB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE + \angle DFE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BFC + \angle DFE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BFC = \angle BAE = \angle BAC;$$

【小问2详解】

解：当点 D 在 $\triangle ABC$ 的内部时，如图2甲，延长 BD 交 CE 于点 F ，

$$\therefore AB = AC, AD = AE, \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BFC = \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = 62^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BFC + \angle DCE = 90^\circ + 62^\circ = 152^\circ;$$

当点 D 在 $\triangle ABC$ 的外部时，如图2乙， BD 交 CE 于点 F ，交 AC 于点 G ，

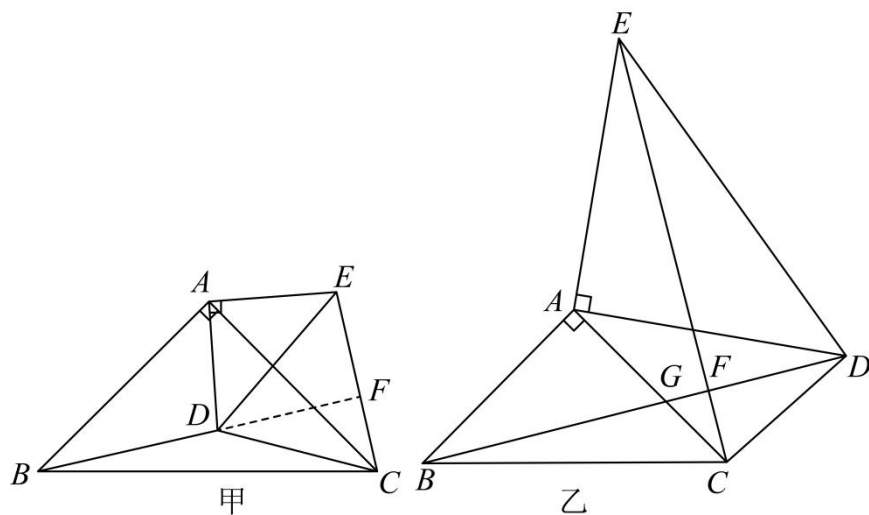


图2

$$\therefore \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE = 90^\circ + \angle CAD,$$

$$\therefore AB = AC, AD = AE,$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle CGD = \angle AGB,$$

$$\therefore \angle ACE + \angle CGD = \angle ABD + \angle AGB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BFC - \angle DCE = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ,$$

综上所述， $\angle BDC = 152^\circ$ 或 $\angle BDC = 28^\circ$ ；

【小问 3 详解】

如图 3, 连接 AC 、 BD 交于点 F ,

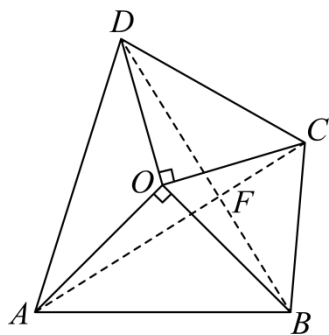


图3

$$\because OA = OB, OC = OD, \angle AOB = \angle COD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BFC = \angle COD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle AFD = \angle CFD = 90^\circ,$$

$$\therefore AD^2 = FA^2 + FD^2, BC^2 = FB^2 + FC^2, AB^2 = FA^2 + FB^2, CD^2 = FC^2 + FD^2,$$

$$\therefore AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2 = FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2,$$

$$\because AB = 6, BC = 4, CD = 5,$$

$$\therefore AD^2 + 4^2 = 6^2 + 5^2,$$

$$\therefore AD = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore AD \text{ 的长为 } 3\sqrt{5}.$$

【点睛】此题重点考查等腰三角形的性质、全等三角形的判定与性质、三角形内角和定理及其推论、勾股定理、新定义问题的求解等知识与方法，解题的关键是通过作辅助线创造条件，用在一般情况下得出的结论解决特殊情况下的问题.