

2025 学年第一学期第二次阶段评估八年级数学试卷

本试卷满分 100 分，时间 90 分钟

一、选择题（本大题共 6 题，每题 3 分，满分 18 分）

1. 下列各组二次根式中，是同类二次根式的为（ ）

- A. $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{9}$ B. $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{2a}$ C. $\sqrt{12}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{3}}$ D. $\sqrt{a^2b}$ 和 $\sqrt{ab^2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查同类二次根式，二次根式的化简，正确理解同类二次根式的概念是解题的关键。判断同类二次根式需将各选项化简为最简二次根式后，检查被开方数是否相同，根据同类二次根式的概念逐个判断即可。

【详解】A: $\sqrt{3}$ 已是最简形式， $\sqrt{9} = 3$ 是整数，不是二次根式，故该选项不符合题意；

B: $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{2a}$ 的最简形式分别为 $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{2a}$ ，被开方数不同，故该选项不符合题意；

C: $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$ ， $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ ，两者化简后均为 $\sqrt{3}$ 的倍数，被开方数均为 3，是同类二次根式，故该选项符合题意；

D: $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ ， $\sqrt{ab^2} = b\sqrt{a}$ ，被开方数分别为 b 和 a ，不同，故该选项不符合题意；

故选：C。

2. 下列方程中，是一元二次方程的是（ ）

- A. $(x+1)(x-2) = x^2 - 3$ B. $x + \frac{1}{x} = 2$
C. $3x + y = 2$ D. $3y^2 = 2y - 1$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的定义，能熟记一元二次方程的定义是解此题的关键，注意：只含有一个未知数，并且所含未知数的项的最高次数是 2 的整式方程，叫一元二次方程。根据一元二次方程的定义逐个判断即可。

【详解】解：A. 整理方程 $(x+1)(x-2) = x^2 - 3$ 得 $-x - 2 = -3$ ，所含未知数的项的最高次数是 1，不是一元二次方程，故本选项不符合题意；

- B. $x + \frac{1}{x} = 2$ 不是整式方程，不是一元二次方程，故本选项不符合题意；
- C. $3x + y = 2$ 中含有两个未知数，不是一元二次方程，故本选项不符合题意；
- D. $3y^2 = 2y - 1$ 是一元二次方程，故本选项符合题意；

故选：D.

3. 下列命题的逆命题中，真命题的是（ ）

- A. 全等三角形的对应角相等
- B. 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半
- C. 关于某一条直线对称的两个三角形全等
- D. 对顶角相等

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是命题与定理，正确的命题叫做真命题，错误的命题叫做假命题，判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理.

分别写出各个命题的逆命题，根据全等三角形的判定、直角三角形的判定、轴对称、对顶角相等判断即可.

【详解】解：A、全等三角形的对应角相等，逆命题是对应角相等的三角形全等，是假命题，故 A 选项不符合题意；

B、直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，逆命题是一个三角形一边的中线是这边的一半，那么这个三角形是直角三角形，是真命题，故 B 选项符合题意；

C、关于某一条直线对称的两个三角形全等，逆命题是两个全等三角形关于某一条直线对称，是假命题，故 C 选项不符合题意；

D、对顶角相等，逆命题是相等的角是对顶角，是假命题，故 D 选项不符合题意；

故选：B.

4. 若 x 是整数，且 $\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{5-x}$ 有意义，则 $\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{5-x}$ 的值是（ ）

- A. 0 或 5 B. 1 或 3 C. 0 或 1 D. 3 或 5

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查二次根式有意义的条件和解不等式组，先根据 x 为整数和二次根式有意义求出 x 的值，再分别代入求解即可.

【详解】解：∵ $\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{5-x}$ 有意义，

$$\therefore \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases},$$

解得: $3 \leq x \leq 5$,

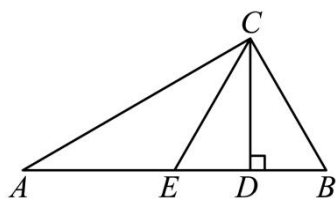
$\because x$ 是整数,

$\therefore x = 3$ 或 4 或 5 ,

原式 $= 0$ 或 1 ,

故选: C.

5. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D , CE 是 ABC 的中线. 要说明 “三个角分别对应相等的两个三角形全等” 是假命题, 可以作为反例的两个三角形是 ()



A. $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCE$

B. $\triangle BCE$ 和 ABC

C. $\triangle CDE$ 和 $\triangle BCD$

D. $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$

【答案】D

【解析】

【分析】利用含有 30° 角的直角三角形的特征和直角三角形斜边中线的特点, 求出 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCE$ 的每个角, 可以判断出两个三角形三角不对应相等, 对 A 进行判断; $\triangle BCE$ 是等边三角形, ABC 是直角三角形, 三角不对应相等, 对 B 进行判断; 利用 AAS 证明 $\triangle CDE \cong \triangle CDB$, 并且两个三角形的三角对应相等, 对 C 进行判断; 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 中可求三角对应相等, 但是 $AC \neq BC$, 可对 D 进行判断.

【详解】解: A、 $\because \angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$,

$$\therefore \angle B = 60^\circ$$

$$\because CD \perp AB$$

$$\therefore \angle CAD = \angle CDB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BCD = 30^\circ, \angle ACD = 60^\circ$$

$\because CE$ 是 ABC 的中线且 $\angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore AE = CE = BE$$

$$\therefore \angle ACE = \angle A = 30^\circ$$

$$\therefore \angle ECD = 30^\circ, \angle CEB = 60^\circ$$

在 $\triangle ACE$ 中, $\angle CAE = \angle ACE = 30^\circ$, $\angle AEC = 120^\circ$

在 $\triangle BCE$ 中, $\angle CBE = \angle CEB = \angle BCE = 60^\circ$,

两个三角形三角不对应相等, 故本选项不符合题意;

$$B、\because BC = \frac{1}{2}AB, CE = AE = BE = \frac{1}{2}AB$$

$\therefore \triangle BCE$ 是等边三角形,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形,

$\therefore$ 两个三角形三角不对应相等, 也不全等, 故本选项不符合题意;

C、在 $\triangle CDE$ 和 $\triangle BCD$ 中,

$$\therefore \angle DCE = \angle DCB = 30^\circ, \angle DEC = \angle DBC = 60^\circ$$

又 $\therefore \angle CDE = \angle CDB = 90^\circ$, 且 $CD = CD$,

$$\therefore \triangle CDE \cong \triangle CDB$$

故本选项不符合题意;

D、在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 中, $\angle A = \angle BCD = 30^\circ$, $\angle ADC = \angle BDC$, $\angle ACD = \angle B$

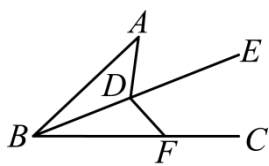
两三角形三角对应相等, 但 $AC \neq BC$, 这两个三角形不全等

故本选项符合题意.

故选: D.

【点睛】本题考查了真假命题的判断, 及含有 30° 角的直角三角形的特征和直角三角形斜边中线的特点, 三角形全等的判定, 对命题的正确理解是解答本题的关键.

6. 如图, BE 是 $\angle ABC$ 的平分线, 点 D 是 BE 上一点, 点 F 为直线 BC 上的一个动点. 若 $\triangle ABD$ 的面积为 30, $AB = 12$, 则线段 DF 的长不可能是 ()



A. 4

B. 5

C. 6

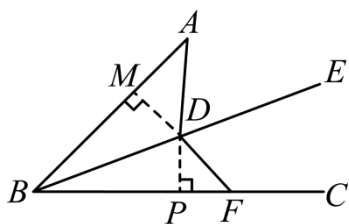
D. 7

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了角平分线的性质与三角形的面积计算公式, 作出辅助线是正确解答本题的关键. 过点 D 作 $DP \perp BC$ 于 P , $DM \perp AB$ 于 M , 根据三角形的面积得出 DM 的长, 进而利用角平分线的性质可得 $DP = DM = 5$, 结合“垂线段最短”即可获得答案.

【详解】解: 过点 D 作 $DP \perp BC$ 于 P , $DM \perp AB$ 于 M , 如下图,



$\because \triangle ABD$ 的面积为 30, $AB = 12$,

$$\therefore DM = \frac{2 \times 30}{12} = 5,$$

$\because BE$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,

$$\therefore DP = DM = 5,$$

$$\therefore DF \geq 5,$$

$\therefore$ 四个选项中只有 4 不可能.

故选: A.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. $\sqrt{16}$ 的平方根是_____.

【答案】 ± 2

【解析】

【详解】解: $\because \sqrt{16} = 4$

$$\therefore \sqrt{16} \text{ 的平方根是 } \pm 2.$$

故答案为 ± 2 .

8. 三对三篮球赛第一轮采用单循环赛制 (每支队伍与其他队伍只比一场), 共计 45 场比赛. 则有 _____ 支队伍参加比赛.

【答案】10

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用, 找准等量关系, 正确列出一元二次方程是解题的关键.

有 x 支队伍参加比赛, 根据每支队伍与其他队伍只比一场, 共计 45 场比赛, 列出一元二次方程, 解之取符合题意的值即可.

【详解】解: 设有 x 支队伍参加比赛,

$$\text{由题意得: } \frac{1}{2}x(x-1) = 45,$$

$$\text{整理得: } x^2 - x - 90 = 0,$$

解得: $x_1 = 10$, $x_2 = -9$ (不符合题意, 舍去),

即有10支队伍参加比赛,

故答案为: 10.

9. 关于 y 的方程 $y(y-2)=4(y-2)$ 的解是 _____.

【答案】 $y_1 = 2$, $y_2 = 4$,

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程, 熟练掌握求解一元二次方程的方法是解题的关键.

根据因式分解法求解即可.

【详解】 解: $y(y-2)=4(y-2)$,

$$(y-2)(y-4)=0,$$

$$y-2=0 \text{ 或 } y-4=0,$$

$$\text{解得 } y_1 = 2, \quad y_2 = 4.$$

故答案为: $y_1 = 2$, $y_2 = 4$.

10. 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > -1$ 且 $m \neq 0$

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程根的判别式, 解答关键是熟练掌握一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 根的情况与根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的关系: 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程没有实数根. 本题还考查了一元二次方程的定义, 容易忽视二次项系数不为 0 这一隐含条件.

【详解】 解: $\because$ 一元二次方程 $mx^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4m \times (-1) > 0 \text{ 且 } m \neq 0,$$

$$\text{解得 } m > -1 \text{ 且 } m \neq 0.$$

故答案为: $m > -1$ 且 $m \neq 0$.

11. 在实数范围内因式分解: $x^2 - 4x - 2 =$ _____.

【答案】 $(x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6})$

【解析】

【分析】此题考查了实数范围内因式分解，首先配成完全平方公式，然后利用平方差公式进行因式分解即可，配成完全平方公式及熟练掌握因式分解的方法是解题的关键.

【详解】解： $x^2 - 4x - 2 = x^2 - 4x + 4 - 4 - 2$,

$$= (x-2)^2 - (\sqrt{6})^2,$$

$$= (x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6}),$$

故答案为： $(x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6})$.

12. 化简：当 $ab < 0$ 时， $\sqrt{24a^2b^3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-2ab\sqrt{6b}$

【解析】

【分析】本题考查了根据二次根式的性质化简. 由条件 $ab < 0$ 且平方根内表达式非负，推出 $a < 0$ 且 $b > 0$ ，再将平方根内的表达式分解为平方因子和非平方因子进行化简，即可求解.

【详解】解： $\because ab < 0$ ，且 $\sqrt{24a^2b^3}$ 为实数，

$$\therefore 24a^2b^3 \geq 0,$$

$$\because 24 > 0 \text{ 和 } a^2 \geq 0,$$

$$\therefore b^3 \geq 0, \text{ 即 } b \geq 0,$$

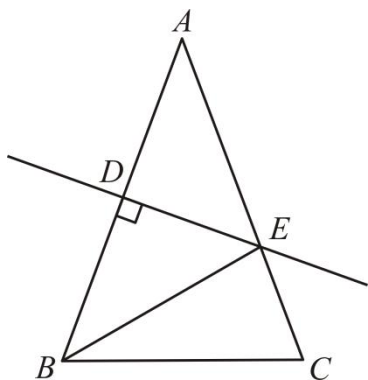
$$\because ab < 0,$$

$$\therefore a < 0 \text{ 且 } b > 0.$$

$$\therefore \sqrt{24a^2b^3} = \sqrt{4 \times 6 \times a^2 \times b^2 \times b} = \sqrt{4a^2b^2} \times \sqrt{6b} = -2ab\sqrt{6b}.$$

故答案为： $-2ab\sqrt{6b}$.

13. 如图，等腰 ABC 的周长为 13，底边 $BC = 3$ ， AB 的垂直平分线 DE 交 AB 于点 D ，交 AC 于点 E ，则 BEC 的周长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 8

【解析】

【分析】 本题考查垂直平分线的性质，利用性质将线段进行等量代换是解题的关键。由垂直平分线上的点到线段两端的距离相等可得 $AE = BE$ ，根据题目条件求出 AC ，再根据 $\triangle BEC$ 的周长 $= BE + EC + BC = AE + EC + BC = AC + BC$ ，求出结果即可。

【详解】 解： $\because$ 等腰 ABC 的周长为 13，底边 $BC = 3$ ，

$$\therefore 2AC + BC = 13,$$

$$\therefore AC = \frac{1}{2} \times (13 - 3) = 5,$$

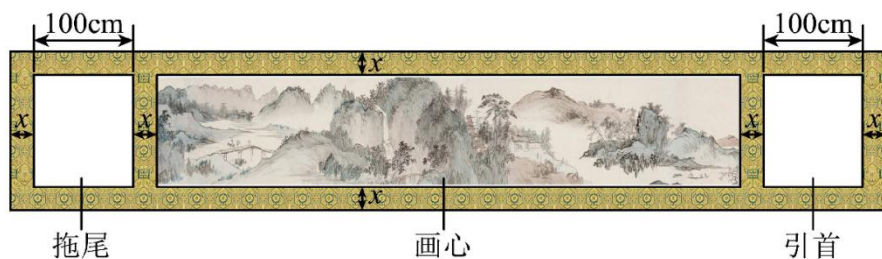
$\because DE$ 是 AB 的垂直平分线，

$$\therefore AE = BE,$$

$$\therefore \triangle BEC \text{ 的周长} = BE + EC + BC = AE + EC + BC = AC + BC = 3 + 5 = 8.$$

故答案为：8.

14. 手卷是国画装裱中横幅的一种体式，以能握在手中顺序展开阅览得名，它主要由“引首”、“画心”、“拖尾”三部分组成（这三部分都是矩形形状），分隔这三部分的其余部分统称为“隔水”。下图中手卷长 1000cm，宽 40cm，引首和拖尾完全相同，其宽度都为 100cm，若隔水的宽度为 x cm，画心的面积为 15200cm^2 ，根据题意，可列方程是_____.



【答案】 $(1000 - 4x - 200)(40 - 2x) = 15200$

【解析】

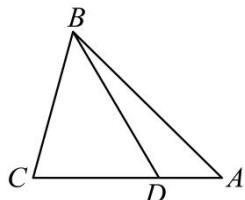
【分析】 此题主要考查一元二次方程的应用，设隔水的宽度为 x cm，分别表示出画心的长和宽，根据面积

列出方程.

【详解】解：根据题意，得 $(1000 - 4x - 200)(40 - 2x) = 15200$.

答案为： $(1000 - 4x - 200)(40 - 2x) = 15200$.

15. 如图， $\triangle ABC$ 中， D 为 AC 上一点， $CD = 2DA$ ， $\angle BAC = 45^\circ$ ， $\angle BDC = 60^\circ$ ， 则 $\angle ACB =$ _____ $^\circ$.

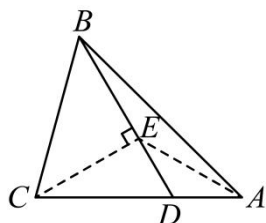


【答案】 75°

【解析】

【分析】此题考查等边对等角，直角三角形 30° 度角的性质，三角形外角的性质，过点 C 作 $CE \perp BD$ 于点 E ，连接 AE ，求出 $\angle DCE = 30^\circ$ ，得到 $CD = 2DE$ ，推出 $DE = DA$ ， $EC = EA$ ，利用三角形外角性质求出 $\angle ABD = \angle BDC - \angle BAC = 15^\circ$ ，得到 $AE = BE = CE$ ，求出 $\angle ECB = \angle EBC = 45^\circ$ ，即可得到 $\angle ACB = 75^\circ$.

【详解】解：过点 C 作 $CE \perp BD$ 于点 E ，连接 AE ，



$$\therefore \angle CED = \angle CEB = 90^\circ,$$

$$\because \angle BDC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = 30^\circ,$$

$$\therefore CD = 2DE,$$

$$\because CD = 2DA,$$

$$\therefore DE = DA,$$

$$\therefore \angle DEA = \angle DAE = \frac{1}{2} \angle BDC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ECA = \angle EAC,$$

$$\therefore EC = EA,$$

$$\because \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle BAE = 15^\circ, \\
&\because \angle BDC = 60^\circ, \angle BAC = 45^\circ, \\
&\therefore \angle ABD = \angle BDC - \angle BAC = 15^\circ, \\
&\therefore \angle ABE = \angle BAE, \\
&\therefore AE = BE = CE, \\
&\therefore \angle ECB = \angle EBC = 45^\circ, \\
&\therefore \angle ACB = \angle ECB + \angle ECA = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ,
\end{aligned}$$

故答案为： 75° .

16. 元旦期间某商场为了吸引顾客，对某种商品连续两次降价，每次降价的百分率相同. 已知该商品原来每件售价为 750 元，降价两次后每件售价为 480 元，则每次降价的百分率是_____.

【答案】 20%

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用. 设每次降价的百分率为 x ，根据连续两次降价后价格的关系列出方程，解方程得到 x 的值，并验证合理性.

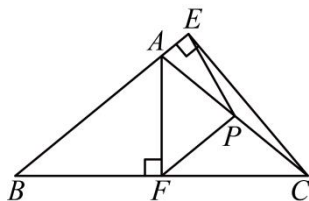
【详解】 解： 设每次降价的百分率为 x ，则第一次降价后价格为 $750(1-x)$ 元，第二次降价后价格为 $750(1-x)^2$ 元.

根据题意，有 $750(1-x)^2 = 480$

解得： $x = 0.2 = 20\%$ 或 $x = 1.8$ (舍去)

故答案为： 20% .

17. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 为钝角， AF ， CE 都是这个三角形的高， P 为 AC 的中点，若 $\angle B = 42^\circ$ ，则 $\angle EPF$ 的度数为_____.



【答案】 96°

【解析】

【分析】 本题考查了直角三角形中两锐角互余，直角三角形斜边中线等于斜边的一半，等边对等角，根据直角三角形中两锐角互余，先求出 $\angle BCE = 48^\circ$ ，再根据直角三角形斜边中线等于斜边的一半，可得到 $PF = PC$ ， $PE = PC$ ，根据等边对等角得到 $\angle PFC = \angle PCF$ ， $\angle PEC = \angle PCE$ ，最后根据

$\angle EPF = 2\angle BCE$ 求出结果.

【详解】解: $\because CE \perp BA, \angle B = 42^\circ$,

$\therefore \angle BCE = 48^\circ$,

$\because AF \perp BC, CE \perp BA$, P 为 AC 的中点,

$\therefore PF = \frac{1}{2}AC = PC, PE = \frac{1}{2}AC = PC$,

$\therefore \angle PFC = \angle PCF, \angle PEC = \angle PCE$,

$\therefore \angle EPF = 2\angle PCF + 2\angle PCE = 2\angle BCE = 96^\circ$,

故答案为: 96° .

18. “两个一元二次方程有且只有一个公共根, 这两个方程叫做互为好友方程, 这两个公共根叫做好友根.”

例如 $x^2 - x - 2 = 0$ 和 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 就是互为好友方程, 好友根为 $x = -1$. 如果 $x^2 - 1 = 0$ 和

$ax^2 - x - 2 = 0$ 就是互为好友方程, 那么 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】1 或 3

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的解及解一元二次方程, 正确理解“互为好友方程”的定义是解题关键.

先解出 $x^2 - 1 = 0$, 然后分为 $x = -1$ 和 $x = 1$ 两种情况, 再代入计算即可.

【详解】解: $\because x^2 - 1 = 0$,

$\therefore x = \pm 1$,

当好友根为 $x = -1$ 时, 则 $a + 1 - 2 = 0$,

即 $a = 1$;

当好友根为 $x = 1$ 时, 则 $a - 1 - 2 = 0$,

即 $a = 3$;

故答案为: 1 或 3.

三、简答题 (本大题共 4 题, 19-21 每题 5 分, 22 题 6 分, 满分 21 分)

19. 计算: $\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{6}) - (\sqrt{3} - 1)^2 + \frac{2}{\sqrt{3} + 1}$.

【答案】 $\sqrt{3} - 3$

【解析】

【分析】本题考查二次根式的混合运算, 熟练掌握二次根式的混合运算法则并正确求解是解答的关键. 先

计算二次根式的乘法和分母有理化，再加减求解即可.

【详解】解： $\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{6})-(\sqrt{3}-1)^2+\frac{2}{\sqrt{3}+1}$

$$= 2 - \sqrt{12} - (3 - 2\sqrt{3} + 1) + \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$
$$= 2 - 2\sqrt{3} - 4 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1$$
$$= \sqrt{3} - 3.$$

20. 解方程： $2x(x-3)=x^2+7$

【答案】 $x_1=7$ ， $x_2=-1$

【解析】

【分析】去括号，移项并合并同类项，然后因式分解即可得到答案.

【详解】解：原方程整理得： $x^2-6x-7=0$ ，

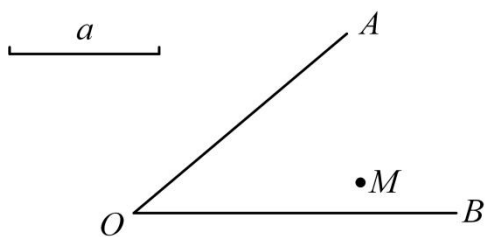
$$\therefore (x-7)(x+1)=0$$

$$\therefore x-7=0 \text{ 或 } x+1=0,$$

解得： $x_1=7$ ， $x_2=-1$.

【点睛】本题主要考查了解一元二次方程，根据方程的特点选择合适的方法是解题的关键.

21. 如图，已知 $\angle AOB$ 、点 M 及线段 a ，求作点 P ，使点 P 到 OA 、 OB 距离相等且到点 M 距离为 $\frac{1}{2}a$.



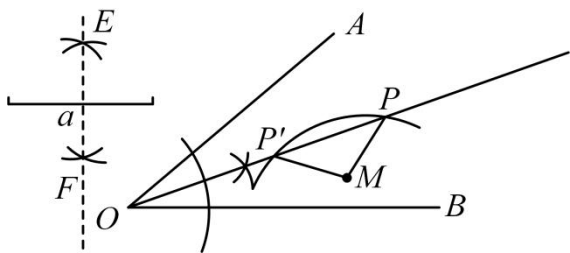
【答案】图见解析

【解析】

【分析】本题考查了作图 - 基本作图，角平分线的定义，正确作出图形是解题的关键；

根据角平分线的作法作出 $\angle AOB$ 的角平分线 OP ，作线段 a 垂直平分线 EF ，以点 M 为圆心， $\frac{1}{2}a$ 为半径画弧交射线 OP 于 P' 和 P ，则点 P 和 P' 即为所求.

【详解】解：如图所示：



点 P 即为所求.

22. 如果关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - (2k+1)x + k = 0$ 有实数根,

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 若 x_1 、 x_2 分别是一元二次方程 $kx^2 - (2k+1)x + k = 0$ 的两个实数根, 是否存在实数 k , 使得

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$, 若存在, 请求出 k 的值, 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$;

(2) 不存在, 理由见解析.

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系以及根与系数的关系, 掌握根的情况与判别式 Δ 的关系和根与系数的关系是解题的关键.

(1) 根据一元二次方程根的判别式, 建立关于 k 的不等式, 求得 k 的取值范围;

(2) 利用根与系数的关系, 根据 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 1$ 将 k 代入, 即可求出 k 的值, 再看是否满足 (1) 中 k 的取值范围, 从而确定 k 的值是否存在.

【小问 1 详解】

解: 由题意得, $k \neq 0$ 且 $\Delta \geq 0$,

$$\therefore \Delta = [-(2k+1)]^2 - 4 \cdot k \cdot k = 4k+1 \geq 0 \text{ 解得 } k \geq -\frac{1}{4},$$

$\therefore k$ 的取值范围为 $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$;

【小问 2 详解】

不存在.

$$\therefore \text{由根与系数的关系得, } x_1 + x_2 = -\frac{-(2k+1)}{k} = \frac{2k+1}{k}, \quad x_1 x_2 = \frac{k}{k} = 1,$$

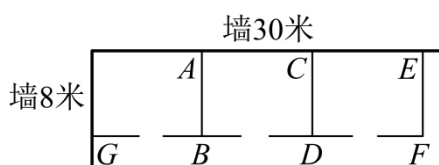
$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{2k+1}{k}}{1} = \frac{2k+1}{k} = 1 \text{ 解得 } k = -1,$$

由 (1) 得, $k \geq -\frac{1}{4}$,

$\therefore$ 满足条件的 k 值不存在.

四、解答题 (本大题共 3 题, 第 23 题 6 分、第 24 题 8 分, 第 25 题 11 分, 满分 25 分)

23. 云栖小小 mall 的经营者要把如图所示的区域分隔成三个面积相同的商铺出租. 已知铺面两面靠墙, 墙长分别为 8 米和 30 米, 三间商铺都在沿街开一个 1 米宽的门. 经营者共用去板材 45 米 (不计损耗).



(1) 若三间商铺总面积为 180m^2 , 求每间商铺的长和宽分别是多少?

(2) 小王作为个体经商户, 希望同时租下三间铺面开设不同的商铺, 但要求在不增加板材的基础上, 使这三间商铺的总面积达到最大. 已知商铺的租金为每月每平方米 200 元, 请问小王每月需要付给经营者多少租金?

【答案】 (1) 每间商铺的长为 10 米, 宽为 6 米

(2) 小王每月需要付给经营者 38400 元租金

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用, 一元一次不等式组的应用, 配方法的应用;

(1) 设垂直于墙的一边长 x 米, 可得 $GB = BD = DF = (16 - x)$ 米, 根据三间商铺总面积为 180m^2 列出方程, 求得合适的解即可;

(2) 根据题意求得三间商铺的总面积, 根据配方法可得最大值, 进而可得租金为多少.

【小问 1 详解】

解: 设垂直于墙的一边长 x 米, 则 $GB = BD = DF = \frac{45 + 3 - 3x}{3} = (16 - x)$ 米,

$$3x(16 - x) = 180,$$

$$\text{整理得: } x^2 - 16x + 60 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = 10, x_2 = 6,$$

由题意得:
$$\begin{cases} x \leq 8 \\ 16-x \leq \frac{30}{3} \end{cases}$$

解得: $6 \leq x \leq 8$,

$\therefore x = 6$,

$\therefore 16-x = 10$.

答: 每间商铺的长为10米, 宽为6米;

【小问2详解】

解: 三间商铺的总面积为 $3x(16-x) = -3x^2 + 48x = -3(x-8)^2 + 192$,

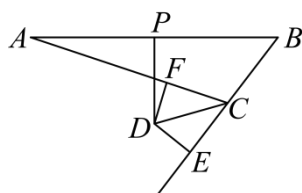
$\therefore 6 \leq x \leq 8$,

$\therefore x = 8$ 时, 三间商铺的总面积最大, 三间商铺的总面积最大为192平方米,

$192 \times 200 = 38400$ (元).

答: 小王每月需要付给经营者38400元租金.

24. 如图, CD 是 $\angle ACE$ 的平分线. DP 垂直平分 AB 于点 P , $DF \perp AC$ 于点 F , $DE \perp BC$ 于点 E .



(1) 求证: $AF = BE$;

(2) 若 $BC = 6\text{cm}$, $AC = 10\text{cm}$, 则 $CE = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】(1) 见解析 (2) 2cm

【解析】

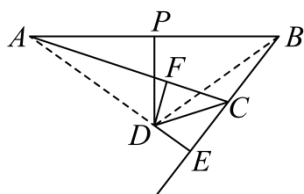
【分析】 本题主要考查角平分线的性质, 全等三角形的性质与判定, 线段垂直平分线的性质, 正确作出辅助线是解题的关键.

(1) 连接 AD , BD , 根据角平分线的性质和 HL 证明 $\text{Rt}\triangle ADF$ 和 $\text{Rt}\triangle BDE$ 全等, 进而解答即可;

(2) 先证明 $\text{Rt}\triangle CDF \cong \text{Rt}\triangle CDE$ 得到 $CE = CF$, 设 $CE = CF = x$, 然后根据 $AF = BE$, 得出方程解答即可.

【小问1详解】

证明: 连接 AD , BD ,



$\because PD$ 垂直平分 AB ,

$$\therefore AD = BD,$$

$\because CD$ 平分 $\angle ACE$, $DE \perp BC$, $DF \perp AC$,

$$\therefore DE = DF, \angle AFD = \angle BED = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 和 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中,

$$\begin{cases} AD = BD \\ DF = DE \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADF \cong \text{Rt}\triangle BDE (\text{HL}),$$

$$\therefore AF = BE;$$

【小问 2 详解】

解: 在 $\text{Rt}\triangle CDF$, $\text{Rt}\triangle CDE$ 中,

$$\begin{cases} CD = CD \\ DE = DF \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle CDF \cong \text{Rt}\triangle CDE (\text{HL}),$$

$$\therefore CE = CF,$$

设 $CE = CF = x$,

$$\text{则 } AF = AC - CF = 10 - x, \quad BE = BC + CE = 6 + x,$$

$$\because AF = BE,$$

$$\therefore 10 - x = 6 + x,$$

$$\therefore x = 2,$$

$$\therefore CE = 2\text{cm}.$$

故答案为: 2cm .

25. 【图形新发现】小普同学发现: 如果一个三角形的一条角平分线与一条中线互相垂直, 那么这个三角形的某两条边必有倍半关系.

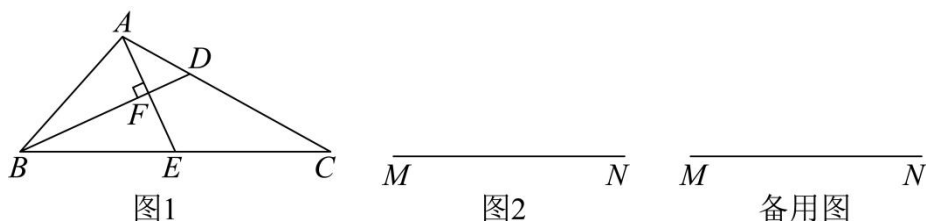
如图 1, 已知在 $\triangle ABC$ 中, BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, AE 是 $\triangle ABC$ 的中线, $AE \perp BD$, 垂足为点 F .

(1) 根据图 1, 写出 $\triangle ABC$ 中小普同学所发现的结论, 并给出证明;

【图形再探究】现将小普同学所研究的三角形称为“线垂”三角形，并将被这条内角平分线所平分的内角叫做“分角”。下面我们跟着小普同学再探究：

(2) 在如图 1 中，“线垂”三角形 ABC 是否可以是直角三角形？如果可以，求 $\angle DBC$ 的度数；如果不可以，请说明理由；

(3) 已知线段 MN ，是否存在一点 P ，使得以 MN 为一边的“线垂”三角形 PMN 为等腰三角形？如果存在，请在图 2 中用直尺和圆规做出 $\angle PMN$ 为“分角”的“线垂”等腰三角形 PMN （不写作法，仅保留作图痕迹，在图中清楚地标注出点 P ），并用文字语言归纳表述成一条与“线垂”等腰三角形的边或角有关的真命题；如果不存在，请说明理由。



【答案】(1) $BC = 2AB$ ，证明见解析；(2) 可以， $\angle DBC$ 的度数为 30° 或 45° ；(3) 存在，见解析

【解析】

【分析】本题考查新定义，尺规作图，等腰三角形的判定与性质，直角三角形斜边中线的性质，角平分线定义，中线定义等知识点，理解新定义，熟练掌握相关知识，合理分类讨论是解题的关键。

(1) 利用角平分线性质的定义得到 $\angle BAF = \angle BEF$ ，即 $\triangle ABE$ 为等腰三角形，再根据中线定义即可得到本题答案；

(2) 分 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ 三种情况讨论，根据 (1) 中结论即角平分线性质的定义即可得到本题答案；

(3) 作线段 MN 的垂直平分线交于 O ，以 M 为圆心， MO 为半径画弧，以 N 为圆心， MN 为半径画弧，两弧相交点 P ，连接 MP ， NP 即可。

【详解】(1) 解： $BC = 2AB$ ，证明如下：

$\because BD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore \angle ABD = \angle CBD$ ，

$\because AE \perp BD$ ，

$\therefore \angle BFA = \angle BFE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABD + \angle BAF = \angle CBD + \angle BEF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAF = \angle BEF$ ，

$$\therefore BA = BE ,$$

$\therefore AE$ 是 ABC 的中线,

$$\therefore BE = CE ,$$

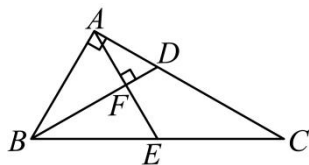
$$\therefore BA = BE = \frac{1}{2}BC ,$$

$$\therefore BC = 2AB ;$$

(2) 解: 可以,

理由如下:

①当 $\angle BAC = 90^\circ$ 时, 如图,



$\therefore \angle BAC = 90^\circ$, AE 是中线,

$$\therefore AE = BE = \frac{1}{2}BC ,$$

在“线垂”三角形 ABC 中, $BC = 2AB$,

$$\therefore AB = AE = BE ,$$

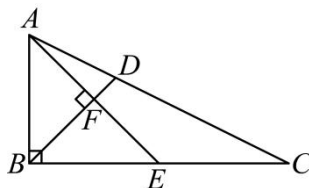
$\therefore \triangle ABE$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ$$

$\therefore BD$ 是 ABC 的角平分线,

$$\therefore \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ ;$$

②当 $\angle ABC = 90^\circ$ 时, 如图,



$\therefore AE$ 是中线,

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BC ,$$

在“线垂”三角形 ABC 中, $BC = 2AB$,

$$\therefore AB = BE ,$$

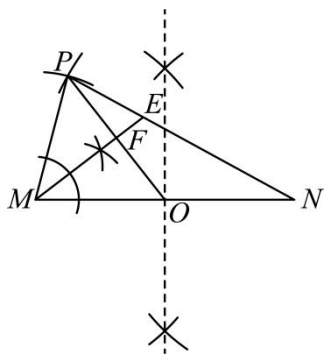
$\therefore BD$ 是 ABC 的角平分线,

$$\therefore \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 45^\circ,$$

③当 $\angle ACB = 90^\circ$, $AB > BC$, 与“线垂”三角形 ABC 中, $BC = 2AB$, 相矛盾, 故舍去;

综上, $\angle DBC$ 的度数为 30° 或 45° ;

(3) 解: 存在, 如图, $\triangle MNP$ 即为所求,



由作图知: O 为 MN 中点, $MP = MO$, $MN = PN$, ME 平分 $\angle PMN$,

$$\therefore ME \perp OP,$$

$\therefore$ 等腰 $\triangle MNP$ 是以 $\angle PMN$ 为“分角”的“线垂”三角形,

“线垂”等腰三角形的两底角相等.