

八年级上学期第二次数学节点作业

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 下列各组数中，是勾股数的是 ()

A. 13, 14, 15

B. 1, 1, $\sqrt{3}$

C. 0.3, 0.4, 0.5

D. 3, 4, 5

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了勾股数，勾股数是满足勾股定理的一组正整数。根据勾股数的定义解答即可。

【详解】解：A、 $13^2 + 14^2 \neq 15^2$ ，13, 14, 15 不是勾股数，本选项不符合题意；

B、 $\sqrt{3}$ 不是正整数，1, 1, $\sqrt{3}$ 不是勾股数，本选项不符合题意；

C、0.3, 0.4, 0.5 都不是正整数，不是勾股数，本选项不符合题意；

D、 $3^2 + 4^2 = 5^2$ ，3, 4, 5 是勾股数，本选项符合题意；

故选：D.

2. “我市为处理污水，需要铺设一条长为 4000 米的管道，为了尽量减少施工对交通所造成的影响，实际施工时每天比原计划多铺设 10 米，结果提前 20 天完成任务。”根据题意可得方程 $\frac{4000}{x-10} - \frac{4000}{x} = 20$ ，则方程中 x 表示 ()

A. 实际每天铺设管道的长度

B. 实际施工的天数

C. 原计划每天铺设管道的长度

D. 原计划施工的天数

【答案】A

【解析】

【分析】根据方程中的实际意义求解即可。

【详解】由方程可得，

方程中 x 表示实际每天铺设管道的长度。

故选：A.

【点睛】本题考查了分式方程的实际应用题，能正确分析题目中的等量关系是解题的关键。

3. 图1是第七届国际数学教育大会 (ICME-7) 会徽图案，它是由一串有公共顶点 O 的直角三角形 (如图 2) 演化而成的。如果图 2 中的 $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_7A_8 = 1$ ，那么 OA_8 的长为 ()



图1

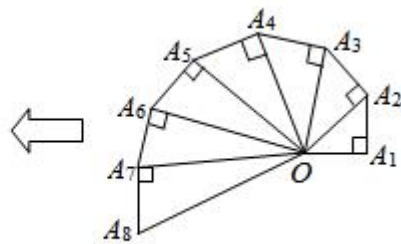


图2

A. $\sqrt{10}$

B. 4

C. 3

D. $2\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】 $OA_1 = 1$ ，根据勾股定理可得 $OA_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ， $OA_3 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ ，找到 $OA_n = \sqrt{n}$ 的规律，即可计算 OA_8 的长.

【详解】解： $\because OA_1 = 1$,

$\therefore$ 由勾股定理可得 $OA_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

$$OA_3 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

....,

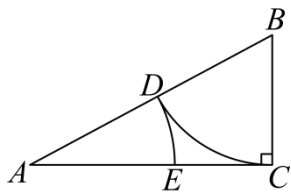
$$\therefore OA_n = \sqrt{n},$$

$$\therefore OA_8 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

故选择：D

【点睛】本题考查了勾股定理，数字类的找规律，勾股定理求得 $OA_n = \sqrt{n}$ 是解题的关键.

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $BC = a$ ， $AC = b$. 以点 B 为圆心， BC 的长为半径画弧，交线段 AB 于点 D ，以点 A 为圆心， AD 长为半径画弧，交线段 AC 于点 E . 下列哪条线段的长度是方程 $x^2 + 2ax - b^2 = 0$ 的一个根 ()



A. 线段 AD 的长

B. 线段 BC 的长

C. 线段 EC 的长

D. 线段 AC 的长

【答案】A

【解析】

【分析】由方程 $x^2 + 2ax - b^2 = 0$ 的解结合线段的和差可以得到答案.

【详解】解： $\because x^2 + 2ax - b^2 = 0$,

$$\therefore \Delta = (2a)^2 - 4 \times 1 \times (-b^2) = 4a^2 + 4b^2,$$

$$\therefore x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 + 4b^2}}{2},$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, BC = a, AC = b,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = AB^2,$$

$$\therefore x = \frac{-2a \pm 2AB}{2} = -a \pm AB,$$

$$\therefore x_1 = -a + AB, x_2 = -a - AB,$$

$$\because AB - a = AB - BC = AB - BD = AD,$$

$\therefore$ 线段 AD 的长是 $x^2 + 2ax - b^2 = 0$ 的根,

故选: A.

【点睛】本题考查一元二次方程的解法, 掌握公式法解一元二次方程是解题关键.

5. 如图, 从 ABC 内一点 O 出发, 把 ABC 剪成三个三角形(如图 1), 边 AB, BC, AC 放在同一直线上, 点 O 都落在直线 MN 上 (如图 2), 直线 $MN \parallel AC$, 则点 O 是 ABC 的 ()

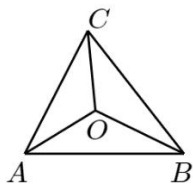


图1

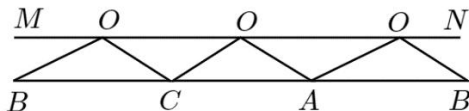


图2

- A. 三条角平分线的交点
- B. 三条高的交点
- C. 三条中线的交点
- D. 三边中垂线的交点

【答案】A

【解析】

【分析】根据平行线的性质可得点 O 到三边的距离相等, 点 O 是三角形三条角平分线的交点即可.

【详解】解: $\because$ 直线 $MN \parallel AC$,

根据平行线性质知点 O 到 BC 距离, 点 O 到 AC 距离, 点 O 到 BA 距离相等,

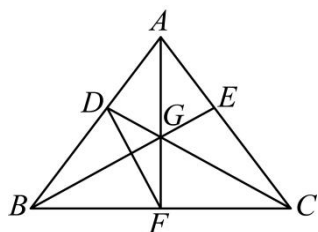
$\therefore$ 点 O 到三边的距离相等

∴ 点 O 是三角形三条角平分线的交点,

故选择 A.

【点睛】 本题考查角平分线的性质, 掌握角平分线的性质是解题关键.

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5, BC = 6$, D, E 分别为线段 AB, AC 上一点, 且 $AD = AE$, 连接 BE, CD 交于点 G , 延长 AG 交 BC 于点 F . 以下四个结论正确的是 ()



- ① $BF = CF$;
- ② 若 $BE \perp AC$, 则 $CF = DF$;
- ③ 连结 EF , 若 $BE \perp AC$, 则 $\angle DFE = 2\angle ABE$;
- ④ 若 BE 平分 $\angle ABC$, 则 $FG = \frac{3}{2}$

A. ①②③

B. ③④

C. ①②④

D. ①②③④

【答案】 D

【解析】

【分析】 由“SAS”可证 $\triangle BAE \cong \triangle CAD$, 可得 $\angle ABE = \angle ACD$, 可证 $\angle GBC = \angle GCB$, 可得 $BG = CG$, 则点 G 是 BC 的中垂线上, 由线段垂直平分线的性质可得 $BF = CF$, 故①正确;

由全等三角形的性质可得 $\angle ADC = \angle AEB = 90^\circ$, 由直角三角形的性质可得 $CF = DF$, 故②正确;

由等腰三角形的性质和三角形内角和定理可得 $2\angle DBF + 2\angle ECF - \angle DFE = 180^\circ$, 由 $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$, 可得 $\angle DFE = 2\angle ABE$, 故③正确;

由角平分线的性质可证点 G 是角平分线的交点, 可得点 G 到三边距离相等, 由面积法可求 $FG = \frac{3}{2}$, 故④正确; 即可求解.

【详解】 解: 在 $\triangle BAE$ 和 $\triangle CAD$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAC = \angle BAC, \\ AE = AD \end{cases}$$

∴ $\triangle BAE \cong \triangle CAD$ (SAS),

∴ $\angle ABE = \angle ACD$,

$$\because AB = AC = 5,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle GBC = \angle GCB,$$

$$\therefore BG = CG,$$

$\therefore$ 点 G 是 BC 的中垂线上,

$$\because AB = AC,$$

$\therefore$ 点 A 在 BC 的中垂线上,

$\therefore AG$ 垂直平分 BC ,

$\therefore BF = CF$, 故①正确;

若 $BE \perp AC$, 则 $\angle AEB = 90^\circ$,

$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle CAD,$$

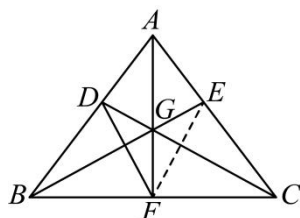
$$\therefore \angle ADC = \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because BF = CF,$$

$$\therefore CF = DF, \text{ 故②正确;}$$

如图, 连接 EF ,



若 $BE \perp AC$, 则 $\angle AEB = 90^\circ$,

$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle CAD,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ = \angle BEC,$$

$$\text{又} \because BF = CF,$$

$$\therefore CF = DF = EF = BF,$$

$$\therefore \angle DBF = \angle BDF, \angle FEC = \angle FCE,$$

$$\therefore 2\angle DBF + \angle DFB = 180^\circ, \quad 2\angle ECF + \angle EFC = 180^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle DFB + \angle EFC + \angle DFE = 180^\circ,$$

$$\therefore 2\angle DBF + 2\angle ECF - \angle DFE = 180^\circ,$$

$$\because \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ,$$

$$\therefore 2\angle BAC + 2\angle ABC + 2\angle ACB = 360^\circ,$$

$$\therefore 2\angle BAC + 180^\circ + \angle DFE = 360^\circ,$$

$$\therefore 2\angle BAC + \angle DFE = 180^\circ,$$

$$\because \angle BAC + \angle ABE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DFE = 2\angle ABE, \text{ 故③正确,}$$

若 BE 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle ABE = \angle CBE = \frac{1}{2}\angle ABC,$$

$$\because \angle ABE = \angle ACD, \angle GBC = \angle GCB,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCD,$$

$\therefore$ 点 G 是角平分线的交点,

$\therefore$ 点 G 到三边的距离为 GF 的长,

$$\because AB = AC = 5, BC = 6, BF = CF,$$

$$\therefore BF = CF = 3,$$

$$\therefore AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \sqrt{25 - 9} = 4,$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times BC \cdot AF = \frac{1}{2} \times AB \cdot GF + \frac{1}{2} \times AC \cdot GF + \frac{1}{2} \times CB \cdot GF,$$

$$\therefore FG = \frac{3}{2}, \text{ 故④正确;}$$

故选: D.

【点睛】本题考查了全等三角形的判定和性质, 线段垂直平分线的性质, 等腰三角形的性质, 证明三角形全等三角形是解题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 2 分, 共 24 分)

7. 已知 x_1 、 x_2 是一元二次方程 $2x^2 - x - 6 = 0$ 的两个实数根, 则 $x_1 + x_2$ 的值是_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】本题主要考查一元二次方程根与系数的关系, 解题的关键是掌握如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$

的两根为 x_1 , x_2 , 则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

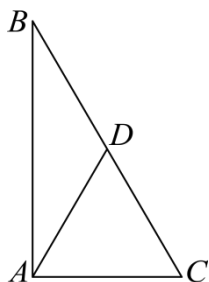
根据一元二次方程根与系数的关系，直接计算两根之和即可.

【详解】解： $2x^2 - x - 6 = 0$,

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2},$$

故答案为： $\frac{1}{2}$.

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， AD 是 BC 边上的中线，且 $BC + AD = 18$ ，则 BC 的长为_____.



【答案】 12

【解析】

【分析】 本题考查了直角三角形斜边上的中线是斜边的一半，掌握直角三角形的性质是解题的关键，根据直角三角形的性质可知 $AD = \frac{1}{2}BC$ ，再根据已知条件即可解答.

【详解】解： $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，

$\because AD$ 是 BC 边上的中线，

$$\therefore AD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\because BC + AD = 18,$$

$$\therefore \frac{3}{2}BC = 18,$$

$$\therefore BC = 12,$$

即 BC 的长为12，

故答案为： 12.

9. 某药品原价 25 元/盒，经两次降价后，现价 16 元/盒，则平均每次降价的百分率为_____.

【答案】 20%

【解析】

【分析】 设该药品平均每次降价的百分率为 x ，根据降价后的价格=降价前的价格 $(1-\text{降价的百分率})$ ，则第一次降价后的价格是 $25(1-x)$ ，第二次后的价格是 $25(1-x)^2$ ，据此即可列方程，求解即可.

【详解】解： 设该药品平均每次降价的百分率为 x ,

由题意可知经过连续两次降价，现在售价每盒 16 元，

故： $25(1-x)^2=16$ ，

解得 $x=\frac{1}{5}$ 或 $\frac{9}{5}$ （舍去）。

故答案为：20%。

【点睛】 本题考查了一元二次方程的应用中数量平均变化率问题。原来的数量（价格）为 a ，平均每次增长或降低的百分率为 x 的话，经过第一次调整，就调整到 $a(1 \pm x)$ ，再经过第二次调整就是 $a(1 \pm x)(1 \pm x) = a(1 \pm x)^2$ 。增长用“+”，下降用“-”。

10. 若关于 x 的分式方程 $\frac{2x+a}{x-1}=1$ 的解是正数，则 a 的取值范围是_____。

【答案】 $a < -1$ 且 $a \neq -2$

【解析】

【分析】 此题考查分式方程的解，根据解分式方程的一般步骤，可得分式方程的解，根据解为正数，可得不等式，根据解不等式，可得答案。

【详解】 解： $\frac{2x+a}{x-1}=1$ ，

解得： $x=-a-1$ ，

$\because$ 关于 x 的分式方程 $\frac{2x+a}{x-1}=1$ 解为正数，

$\therefore -a-1 > 0$ ，

$\therefore a < -1$

又 $\because x \neq 1$

$\therefore -a-1 \neq 1$

$\therefore a \neq -2$

$\therefore a$ 的取值范围是 $a < -1$ 且 $a \neq -2$ ；

故答案为： $a < -1$ 且 $a \neq -2$ 。

11. 已知 a 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - x - 11 = 0$ 的一个根，则 $\frac{a^2 - 11}{2a^3 - 3a^2 + 11}$ 的值等于_____。

【答案】 $\frac{1}{21}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程解的定义，根据一元二次方程的解是使方程左右两边相等的未知数

的值得到 $a^2 - a - 11 = 0$ ，进而得到 $a^2 - a = 11$, $a^2 - 11 = a$ ，再把所求式子转化为

$$\frac{a}{2a(a^2 - a) - (a^2 - 11)}, \text{ 据此整体代入求解即可.}$$

【详解】解：∵ a 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - x - 11 = 0$ 的一个根，

$$\therefore a^2 - a - 11 = 0,$$

$$\therefore a^2 - a = 11, \quad a^2 - 11 = a,$$

$$\therefore \frac{a^2 - 11}{2a^3 - 3a^2 + 11}$$

$$= \frac{a}{(2a^3 - 2a^2) - (a^2 - 11)}$$

$$= \frac{a}{2a(a^2 - a) - (a^2 - 11)}$$

$$= \frac{a}{22a - a}$$

$$= \frac{1}{21},$$

故答案为： $\frac{1}{21}$.

12. 某校八年级举行足球比赛，每个班级都要和其他班级比赛一次，结果一共进行了 15 场比赛，设八年级共有 x 个班级，那么列出方程是_____.

【答案】 $\frac{1}{2}x(x-1) = 15$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用，熟练掌握列方程的基本要领是解题的关键. 设有 x 个班级参赛，每两班之间赛一场，总比赛场数为所有可能的组合数. 每个班需与其他 $(x-1)$ 个班比赛，但每场比赛被计算了两次，因此总场数为 $\frac{1}{2}x(x-1)$ ，根据总场数为 15，列出方程即可.

【详解】解：设共有 x 个班参赛，根据题意，得 $\frac{1}{2}x(x-1) = 15$,

故答案为： $\frac{1}{2}x(x-1) = 15$.

13. 在实数范围内因式分解： $3x^2 + 12xy + 11y^2 =$ _____.

【答案】 $3\left(x + \frac{6-\sqrt{3}}{3}y\right)\left(x + \frac{6+\sqrt{3}}{3}y\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了实数范围内分解因式：一些式子在有理数的范围内无法分解因式，可是在实数范围内就可以继续分解因式．通过补项配成完全平方公式是解决问题的关键．

先把原式变形为 $3\left(x^2 + 4xy + 4y^2 - \frac{1}{3}y^2\right)$ ，可得到 $3\left[(x+2y)^2 - \frac{1}{3}y^2\right]$ ，再利用平方差公式进行因式分解，

即可求解．

【详解】 解： $3x^2 + 12xy + 11y^2$

$$= 3\left(x^2 + 4xy + \frac{11}{3}y^2\right)$$

$$= 3\left(x^2 + 4xy + 4y^2 - \frac{1}{3}y^2\right)$$

$$= 3\left[(x+2y)^2 - \frac{1}{3}y^2\right]$$

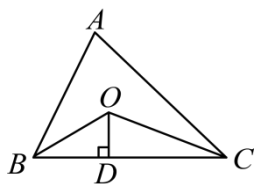
$$= 3\left[(x+2y) + \frac{\sqrt{3}}{3}y\right]\left[(x+2y) - \frac{\sqrt{3}}{3}y\right]$$

$$= 3\left(x + 2y + \frac{\sqrt{3}}{3}y\right)\left(x + 2y - \frac{\sqrt{3}}{3}y\right)$$

$$= 3\left(x + \frac{6-\sqrt{3}}{3}y\right)\left(x + \frac{6+\sqrt{3}}{3}y\right).$$

故答案为： $3\left(x + \frac{6-\sqrt{3}}{3}y\right)\left(x + \frac{6+\sqrt{3}}{3}y\right).$

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， BO ， CO 分别平分 $\angle ABC$ ， $\angle ACB$ ， $OD \perp BC$ 于点 D ．若 $OD=3$ ， $\triangle ABC$ 的面积是 50，则 $\triangle ABC$ 的周长为_____．

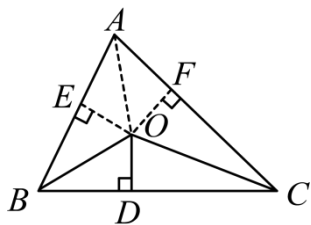


【答案】 $\frac{100}{3}$ ## $33\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了角平分线的性质定理，熟练掌握角平分线的性质定理是解此题的关键. 连接 OA ，过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E ，作 $OF \perp AC$ 于点 F ，由角平分线的性质定理可得， $OF = OE = OD = 3$ ，再结合三角形面积公式计算即可得解.

【详解】 解：连接 OA ，过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E ，作 $OF \perp AC$ 于点 F ，如图所示：



由 BO ， CO 分别平分 $\angle ABC$ ， $\angle ACB$ ， $OD \perp BC$ 于点 D ， $OD = 3$ ，

故 $OF = OE = OD = 3$ ，

$$\text{故 } \frac{1}{2}OF \cdot AC + \frac{1}{2}OE \cdot AB + \frac{1}{2}OD \cdot BC = 50,$$

$$\frac{1}{2} \times 3 \times (AC + AB + BC) = 50,$$

$$\text{解得 } AC + AB + BC = \frac{100}{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{100}{3}.$$

15. 已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的高， $\angle B = 35^\circ$ ， $\angle CAD = 20^\circ$ ， $\angle BAC$ 的度数是_____.

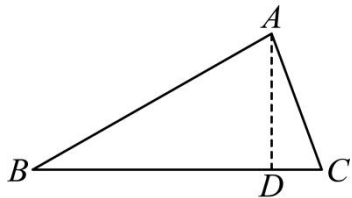
【答案】 35° 或 75°

【解析】

【分析】 本题考查了直角三角形两锐角互余，三角形内角和.

分高 AD 在 $\triangle ABC$ 的内部和外部两种情况讨论求解即可.

【详解】 解：当高 AD 在 $\triangle ABC$ 内部时，



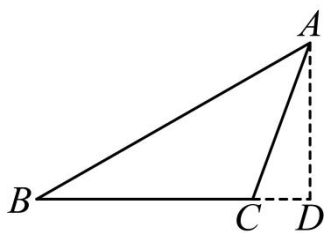
在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $\angle B = 35^\circ$ ， $\angle ADB = 90^\circ$ ，

由直角三角形两锐角互余，得 $\angle BAD = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$ ，

又 $\angle CAD = 20^\circ$ ，

所以 $\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = 55^\circ + 20^\circ = 75^\circ$ ；

当高 AD 在 $\triangle ABC$ 外部时，



在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\angle ABD = 35^\circ$, $\angle ADB = 90^\circ$,

由直角三角形两锐角互余, 得 $\angle BAD = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$,

又 $\angle CAD = 20^\circ$,

所以 $\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD = 55^\circ - 20^\circ = 35^\circ$.

故答案为: 35° 或 75° .

16. 定义新运算“ $\ast$ ”: 对于实数 m, n, p, q , 有 $[m, p] \ast [q, n] = mn + pq$, 其中等式右边是通常的加

法和乘法运算, 例如: $[2, 3] \ast [4, 5] = 2 \times 5 + 3 \times 4 = 22$. 若关于 x 的方程 $[x^2 + 1, x] \ast [5 - 2k, k] = 0$:

有两个实数根, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \leq \frac{5}{4}$ 且 $k \neq 0$

【解析】

【分析】 由新定义的运算法则可得出关于 x 的方程为 $kx^2 + (5 - 2k)x + k = 0$, 由该方程有两个实数根得出其为一元二次方程, 且 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, 即 $(5 - 2k)^2 - 4k^2 \geq 0$ 且 $k \neq 0$, 解出 k 的解集即可.

【详解】 由新定义的运算法则可得出:

$$[x^2 + 1, x] \ast [5 - 2k, k] = k(x^2 + 1) + (5 - 2k)x = kx^2 + (5 - 2k)x + k.$$

$$\therefore [x^2 + 1, x] \ast [5 - 2k, k] = 0,$$

$$\therefore kx^2 + (5 - 2k)x + k = 0.$$

$\therefore$ 该方程有两个实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (5 - 2k)^2 - 4k^2 \geq 0 \text{ 且 } k \neq 0,$$

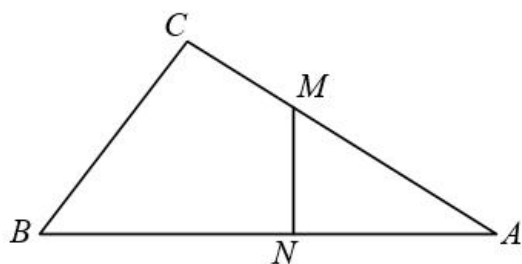
$$\therefore k \leq \frac{5}{4} \text{ 且 } k \neq 0.$$

故答案为: $k \leq \frac{5}{4}$ 且 $k \neq 0$.

【点睛】 本题考查新定义下的实数运算, 一元二次方程的定义, 根据一元二次方程根的情况求参数. 掌握一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根的判别式为 $\Delta = b^2 - 4ac$, 且当 $\Delta > 0$ 时, 该方程有两个不相等的实

数根；当 $\Delta = 0$ 时，该方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，该方程没有实数根是解题关键.

17. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， MN 是 AB 的中垂线， $\angle A = 30^\circ$ ， $AM = 10\text{cm}$ ，则 $CM = \underline{\hspace{1cm}}\text{cm}$.

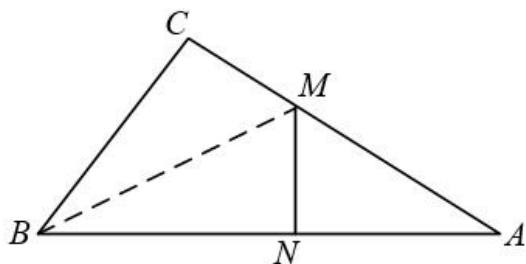


【答案】5

【解析】

【分析】连接 BM ，根据垂直平分线的性质可得 $MB = MA$ ，进而根据含 30° 度角的直角三角形的性质即可求得 MC 的长.

【详解】如图，连接 BM



$\because MN$ 是 AB 的中垂线， $\angle A = 30^\circ$ ， $AM = 10\text{cm}$,

$$\therefore MB = MA = 10$$

$$\therefore \angle MBA = \angle A = 30^\circ$$

$$\therefore \angle CMB = \angle MBA + \angle A = 60^\circ$$

$$\because \angle C = 90^\circ$$

$$\therefore \angle CBM = 30^\circ$$

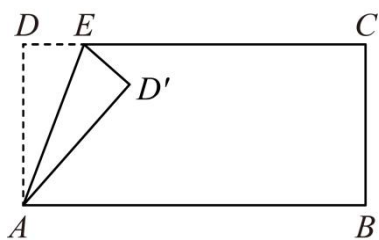
$$\therefore CM = \frac{1}{2}BM = 5$$

故答案为：5

【点睛】本题考查了垂直平分线的性质，含 30° 度角的直角三角形的性质，掌握垂直平分线的性质是解题的关键.

18. 如图，长方形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ ， $AD = BC = 8$ ， $AB = CD = 17$. 点 E 为射线 DC 上的一个动点， $\triangle ADE$ 与 $\triangle AD'E$ 关于直线 AE 对称，当 $\triangle AD'B$ 为直角三角形时， DE 的长为

_____.



【答案】2 或 32

【解析】

【分析】分两种情况：点 D' 在线段 BE 上，点 D' 在 EB 延长线上，然后分别根据折叠的性质和勾股定理得出答案即可。

【详解】解：如图 1，当点 D' 在线段 BE 上时，

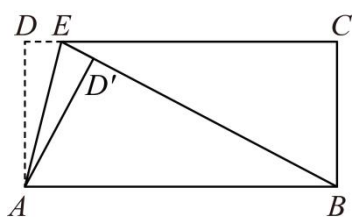


图1

$\because$ 折叠，

$$\therefore \triangle AD'E \cong \triangle ADE,$$

$$\therefore \angle AD'E = \angle D = 90^\circ, \quad \angle AED = \angle AED', \quad AD' = AD = BC = 8$$

$$\therefore \angle AD'B = 90^\circ,$$

$\therefore B, D', E$ 三点共线，

$$\therefore DC \parallel AB$$

$$\therefore \angle DEA = \angle EAB$$

$$\therefore \angle AEB = \angle EAB$$

$$\therefore BE = AB = 17,$$

$$\therefore BD' = \sqrt{AB^2 - AD'^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15,$$

$$\therefore DE = D'E = 17 - 15 = 2;$$

如图 2，当点 D' 在 EB 延长线上时，

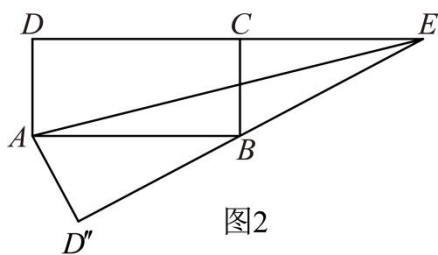


图2

∵ 折叠,

$$\therefore \triangle AD''E \cong \triangle ADE,$$

$$\therefore \angle AD''E = \angle D = 90^\circ, \quad \angle AED = \angle AED'', \quad AD'' = AD = BC = 8$$

$$\therefore \angle AD''B = 90^\circ,$$

∴ B 、 D'' 、 E 三点共线,

$$\therefore DC \parallel AB$$

$$\therefore \angle DEA = \angle EAB$$

$$\therefore \angle AEB = \angle EAB$$

$$\therefore BE = AB = 17,$$

$$\therefore BD'' = \sqrt{AB^2 - AD''^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15,$$

$$\therefore DE = D''E = 17 + 15 = 32.$$

综上所述, DE 的长为 2 或 32

故答案为: 2 或 32.

【点睛】此题考查翻折的性质, 三角形全等的性质, 勾股定理, 掌握翻折的性质, 分类探讨的思想方法是解决问题的关键.

三、解答题: (本大题共 8 题, 共 58 分)

19. 解方程: $(x-1)^2 - 13(x-1) + 40 = 0$

【答案】 $x_1 = 6, \quad x_2 = 9$

【解析】

【分析】本题主要考查了解一元二次方程, 熟练掌握解一元二次方程的一般方法, 是解题的关键. 用因式分解法, 解一元二次方程即可.

【详解】解: $(x-1)^2 - 13(x-1) + 40 = 0,$

因式分解得: $(x-1-5)(x-1-8) = 0,$

即 $(x-6)(x-9) = 0,$

∴ $x-6=0, \quad x-9=0,$

解得: $x_1 = 6, \quad x_2 = 9.$

20. 解方程: $\frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} = 1$

【答案】 无解

【解析】

【分析】 本题主要考查了解分式方程，熟练掌握解分式方程的一般方法，是解题的关键.

先去分母，然后解整式方程，最后对方程的解进行检验即可.

【详解】 解: $\frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} = 1$,

去分母得: $(x+1)(x+1) - 4 = x^2 - 1$,

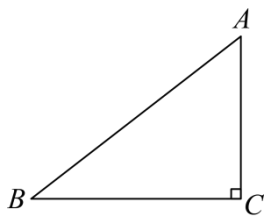
解整式方程得: $x = 1$,

检验: 把 $x = 1$ 代入 $x^2 - 1$ 得: $x^2 - 1 = 0$,

$\therefore x = 1$ 是原方程的增根,

$\therefore$ 原方程无解.

21. 如图, 在直角 ABC 中, $\angle C = 90^\circ$,



(1) 请用尺规作图法在 AC 边上求作一点 P , 使得点 P 到边 AB , BC 的距离相等, (保留作图痕迹, 不写作法)

(2) 若 $CP = 1$, $AB = 3$, 求 $\triangle ABP$ 的面积.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\frac{3}{2}$

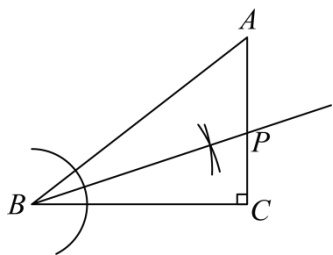
【解析】

【分析】 (1) 作 $\angle ABC$ 的角平分线, 与 AC 的交点即为点 P ;

(2) 作 $PQ \perp AB$, 由角平分线的性质可得 $PQ = PC = 1$, 即可求解.

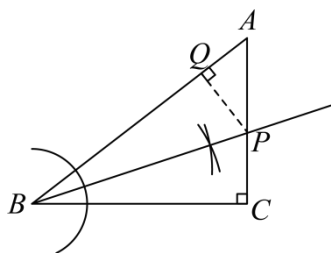
【小问 1 详解】

解: 如图所示: 点 P 即为所求:



【小问 2 详解】

解: 作 $PQ \perp AB$, 如图所示:



由 (1) 可得, BP 平分 $\angle ABC$,

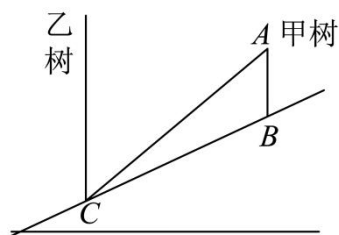
$$\therefore PQ \perp AB, PC \perp BC$$

$$\therefore PQ = PC = 1$$

$$\triangle ABP \text{ 的面积为: } \frac{1}{2} \times AB \times PQ = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{3}{2}$$

【点睛】 本题考查了角平分线的性质及尺规作图. 掌握角平分线的性质是解题关键.

22. 由于大风, 山坡上的一棵甲树从 A 点处被拦腰折断, 其顶点恰好落在一棵树乙的底部 C 处, 如图所示, 已知 $AB = 4$ 米, $BC = 13$ 米, 两棵树的水平距离是 12 米, 求甲树原来的高度.

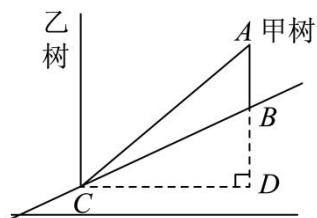


【答案】 19 米

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理在实际生活中的应用, 延长 AB , 过点 C 作 $CD \perp AB$ 延长线于点 D , 利用勾股定理先求出 $BD = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5\text{m}$, 即可得到 $AD = 9\text{m}$, 再利用勾股定理即可求解.

【详解】 解: 如图所示: 过点 C 作 $CD \perp AB$ 交 AB 延长线于点 D , 则 $\angle D = 90^\circ$,



由题意可得: $BC = 13\text{m}, DC = 12\text{m}$,

$$\text{故 } BD = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5\text{m},$$

$$\therefore AD = 4 + 5 = 9\text{m},$$

则 $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15\text{m}$,

故 $AC + AB = 15 + 4 = 19\text{m}$,

答: 树原来的高度 19 米.

23. 某商店如果将进货价为每件 10 元的商品按每件 12 元出售, 每天可销售 200 件, 这种商品如果每涨价一元, 其销售量就减少 10 件.

(1) 将售价定为每件多少元时, 能使这天所获利润达到 1200 元?

(2) 将售价定为每件多少元时, 能使这天所获利润最大? 最大的利润是多少?

【答案】 (1) 把售价定为每件 20 元或 22 元能使每天利润达到 1200 元

(2) 将售价定位每件 21 元时, 能使这天可获的利润最大, 最大利润是 1210 元

【解析】

【分析】 对于 (1), 设商品的售价定为 x 元, 再表示出单间利润和销售量, 然后根据单间利润 $\times$ 销售量 = 总利润列出方程, 再求出解即可;

对于 (2), 设这天的利润为 y 元, 结合 (1) 列出函数关系式, 再配方讨论极值即可.

【小问 1 详解】

设每件商品的售价定为 x 元, 依题意, 得

$$(x - 10)[200 - 10(x - 12)] = 1200,$$

整理得: $x^2 - 42x + 440 = 0$,

解得: $x_1 = 20$, $x_2 = 22$,

$\therefore$ 把售价定为每件 20 元或 22 元能使每天利润达到 1200 元;

【小问 2 详解】

设这天的利润为 y 元,

$$\text{则 } y = (x - 10)[200 - 10(x - 12)] = -10(x - 21)^2 + 1210,$$

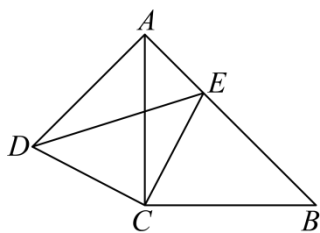
$$\because -10 < 0,$$

$\therefore$ 当 $x = 21$ 时, y 有最大值, 最大值为 1210,

答: 将售价定位每件 21 元时, 能使这天可获的利润最大, 最大利润是 1210 元.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程的应用, 函数最大值的问题等, 根据等量关系列出关系式 (方程) 是解题的关键.

24. 如图, $\triangle DCE$ 和 $\triangle ACB$ 都是等腰三角形, $\angle DCE$ 和 $\angle ACB$ 是顶角且 $\angle DCE = \angle ACB$.



(1) 求证: $AD = BE$;

(2) 若 $DE^2 - AE^2 = EB^2$, 求证: $\angle ACB = 90^\circ$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据SAS证明三角形全等即可证明 $AD = BE$;

(2) 利用勾股定理的逆定理证明 $\angle DAE = 90^\circ$, 再证明 $\angle CAB + \angle B = 90^\circ$ 即可.

【小问1详解】

证明: $\because \angle DCE = \angle ACB$,

$\therefore \angle DCA = \angle ECB$,

在 $\triangle DCA$ 和 $\triangle ECB$ 中,

$$\therefore \begin{cases} CD = CE \\ \angle DCA = \angle ECB, \\ CA = CB \end{cases}$$

$\therefore \triangle DCA \cong \triangle ECB (\text{SAS})$,

$\therefore AD = BE$;

【小问2详解】

证明: $\because \triangle DCA \cong \triangle ECB (\text{SAS})$,

$\therefore AD = BE, \angle CAD = \angle B$,

$\because DE^2 - AE^2 = EB^2$,

$\therefore DE^2 = AE^2 + AD^2$,

$\therefore \angle DAE = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAD + \angle CAB = \angle CAB + \angle B = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$.

【点睛】本题考查全等三角形的判定和性质, 勾股定理的逆定理等知识, 解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题.

25. 【综合与探究】

已知 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 的两个不相等的实数根.

(1) 求实数 m 的取值范围;

(2) 若 $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 7$, 求 m 的值;

(3) 已知等腰 ABC 的一边长为 7, 若 x_1, x_2 恰好是 ABC 的另外两边长, 求这个三角形的周长.

【答案】 (1) $m > 2$;

(2) 3;

(3) 17.

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式, 根与系数的关系, 等腰三角形的定义, 三角形三边关系等知识点, 熟练掌握知识点的应用是解题的关键.

(1) 利用一元二次方程根的判别式即可求解;

(2) 利用一元二次方程根与系数的关系即可求解;

(3) 由题意得 $x_1 \neq x_2$ 时, 故只能取 $x_1 = 7$ 或 $x_2 = 7$, 即 7 是方程的一个根, 然后代入方程求出 m 的值, 再通过三角形三边关系进行判断即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 的两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = [-2(m+1)]^2 - 4(m^2 + 5)$$

$$= 4m^2 + 8m + 4 - 4m^2 - 20$$

$$= 8m - 16 > 0,$$

$$\therefore m > 2;$$

【小问 2 详解】

解: $\because x_1, x_2$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 的两个不相等的实数根,

$$\therefore x_1 + x_2 = 2(m+1), \quad x_1 x_2 = m^2 + 5,$$

$$\therefore (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 7,$$

$$\therefore x_1 x_2 - (x_1 + x_2) = 6,$$

$$\therefore m^2 + 5 - 2(m+1) = 6, \text{ 整理得: } m^2 - 2m - 3 = 0,$$

解得: $m_1 = 3$, $m_2 = -1$,

由 (1) 得 $m > 2$,

$\therefore m = 3$;

【小问 3 详解】

解: 由题意得 $x_1 \neq x_2$ 时,

$\therefore$ 只能取 $x_1 = 7$ 或 $x_2 = 7$, 即 7 是方程的一个根,

将 $x = 7$ 代入得: $49 - 14(m+1) + m^2 + 5 = 0$,

解得: $m = 4$ 或 $m = 10$,

当 $m = 4$ 时, 得 $x^2 - 10x + 21 = 0$, 方程的另一个根为 3, 此时三角形三边分别为 7, 7, 3, 周长为 17;

当 $m = 10$ 时, 得 $x^2 - 22x + 105 = 0$, 方程的另一个根为 15, 此时不能构成三角形,

故三角形的周长为 17.

26. 综合与实践

【问题情境】“综合与实践”课上, 老师提出如下问题: 如图 1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 将 ABC 绕点 A 逆时针旋转得到 ADE , 旋转角小于 $\angle CAB$, 点 B 的对应点为点 D , 点 C 的对应点为点 E , DE 交 AB 于点 O , 延长 DE 交 BC 于点 P .

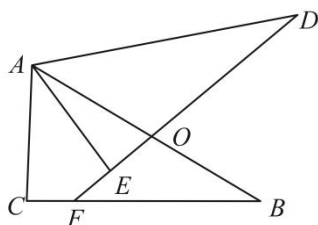


图1

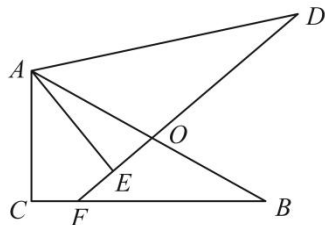


图2

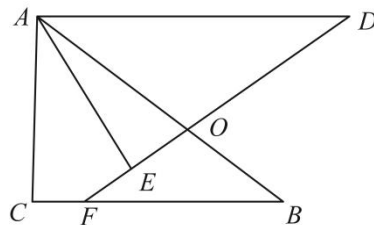


图3

【数学思考】(1) 试判断 FC 与 FE 的数量关系, 并说明理由.

【深入探究】(2) 在图形旋转的过程中, 老师让同学们提出新的问题.

① “乐学小组”提出问题: 如图 2, 如果 $\angle ABC = 30^\circ$, 当 $\angle CAE = 40^\circ$ 时, 求 $\angle FDB$ 的度数;

② “善思小组”提出问题: 如图 3, 如果 $CA = 6$, $CB = 8$. 当 $\angle CAE = \angle B$ 时, 求线段 BF 的长.

【答案】(1) $FC = FE$, 理由见解析; (2) ① 40° ; ② 6.

【解析】

【分析】(1) 由旋转的性质可得: $AC = AE$, $\angle AED = \angle C = \angle AEF = 90^\circ$, 再证明

$\text{Rt}\triangle AFE \cong \text{Rt}\triangle AFC$ (HL), 从而可得结论;

(2) ①由全等三角形的性质证明 $AB = AD$, $\angle CAE = \angle BAD = 40^\circ$, 求解 $\angle ADB = \angle ABD = 70^\circ$, 再进一

步求解即可；②利用勾股定理求解 $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ，证明 $\angle BAD = \angle B$ ，可得 $AD \parallel BC$ ，可得 $\angle DAF = \angle AFC$ ．结合 $\angle AFC = \angle AFE$ ，可得 $\angle DAF = \angle AFD$ ，证明 $DA = DF = 10$ ，再进一步解答即可．

【详解】(1) 解： $FC = FE$ ．理由：如图 1，连接 AF ，

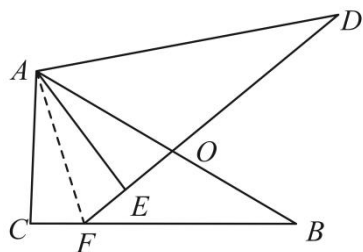


图1

由旋转的性质知， $AC = AE$ ， $\angle AED = \angle C = \angle AEF = 90^\circ$ ，

$\therefore AF = AF$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle AFE \cong \text{Rt}\triangle AFC (\text{HL})$ ，

$\therefore FC = FE$ ；

(2) 解：①如图 2，由旋转可得， $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ ，

$\therefore \angle CAB = \angle EAD$ ， $AB = AD$ ， $\angle ADE = \angle B$ ，

$\therefore \angle CAE = \angle BAD$ ， $\angle ADB = \angle ABD$ ，

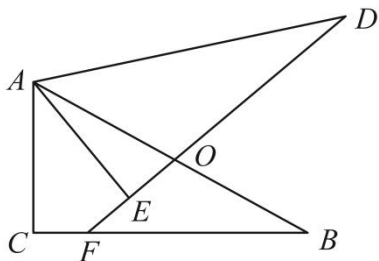


图2

$\therefore \angle ABC = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle ADE = \angle ABC = 30^\circ$ ．

$\therefore \angle CAE = 40^\circ$ ，

$\therefore \angle BAD = 40^\circ$ ，

$\therefore \angle ADB = \angle ABD = 70^\circ$ ．

$\therefore \angle FDB = \angle ADB - \angle ADE = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ$ ．

②如图 3， $\because \angle C = 90^\circ$ ， $CA = 6$ ， $CB = 8$ ，

$\therefore AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ．

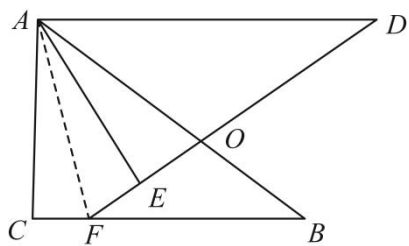


图3

由旋转的性质知， $AD = AB = 10$ ， $DE = BC = 8$ ， $\angle B = \angle D$ ， $\angle C = \angle AED = 90^\circ$ 。

$$\therefore \angle CAE = \angle BAD, \quad \angle CAE = \angle B,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle B,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle AFC.$$

由 (1) 得 $\text{Rt}\triangle AFE \cong \text{Rt}\triangle AFC$,

$$\therefore \angle AFC = \angle AFE,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle AFD,$$

$$\therefore DA = DF = 10.$$

$$\therefore EF = DF - ED = 2,$$

$$\therefore CF = EF = 2,$$

$$\therefore BF = BC - FC = 6.$$

【点睛】 本题考查的是旋转的性质，全等三角形的性质，等腰三角形的判定与性质，勾股定理的应用，三角形的内角和定理的应用，掌握旋转的性质是解本题的关键。