

初二数学

(满分 100 分, 时间 120 分钟. 所有答案都写在答题卡上.)

一、选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 2 分, 共 16 分)

1. 下列各组数中, 是勾股数的一组是 ()

A. 2, 3, 4

B. 0.3, 0.4, 0.5

C. 4, 4, 7

D. 5, 12, 13

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了勾股树 (数) 问题, 解题关键是掌握勾股树 (数) 并能运用求解.

根据勾股数的意义, 通过计算对四组作出判断.

【详解】 解: $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 \neq 4^2$, 故 A 不符合;

勾股数是整数, 0.3, 0.4, 0.5 不是整数, 故 B 不符合;

$4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32 \neq 7^2$, 故 C 不符合;

$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$, 故 D 符合,

故选: D.

2. 下列各式从左到右的变形, 属于因式分解的是 ()

A. $16x^2y^3 = 2xy^2 \cdot 8xy$

B. $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

C. $x^2 - xy + y^2 = (x-y)^2 + xy$

D. $2x - 2y = 2(x-y)$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解. 根据把多项式写成几个整式积的形式叫做分解因式. 对各选项分析判断后利用排除法求解.

【详解】 解: A、 $16x^2y^3$ 不是多项式, 故本选项不符合题意;

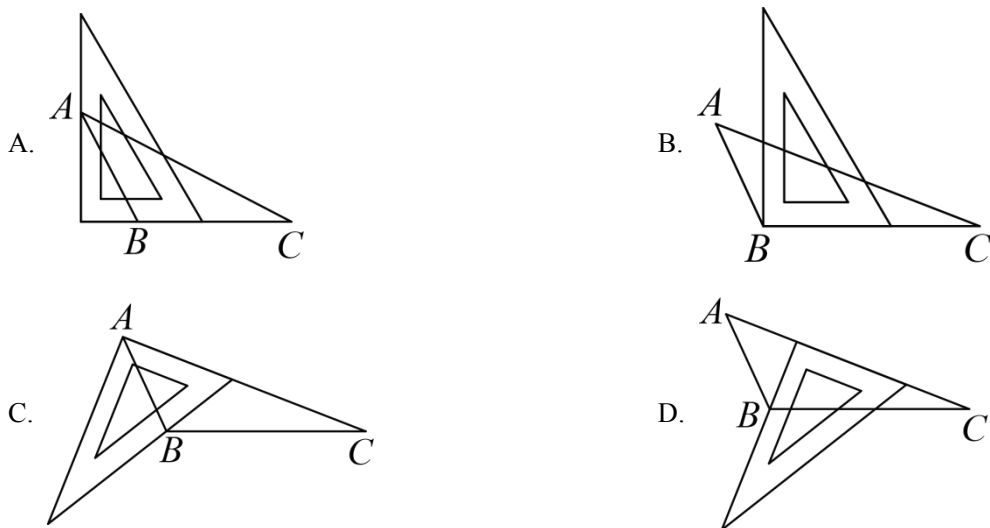
B、 $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$, 属于整式的乘法, 不是因式分解, 故本选项不符合题意;

C、 $x^2 - xy + y^2 = (x-y)^2 + xy$, 右边不是整式积的形式, 不是因式分解, 故本选项不符合题意;

D、 $2x - 2y = 2(x-y)$, 是因式分解, 故本选项符合题意;

故选: D.

3. 用三角板作 ABC 的边 BC 上的高, 下列三角板的摆放位置正确的是 ()



【答案】A

【解析】

【分析】本题考查三角形的高，根据三角形的高的定义一一判断即可.

【详解】解：A、可以作 ABC 的边 BC 上的高，此选项符合题意；

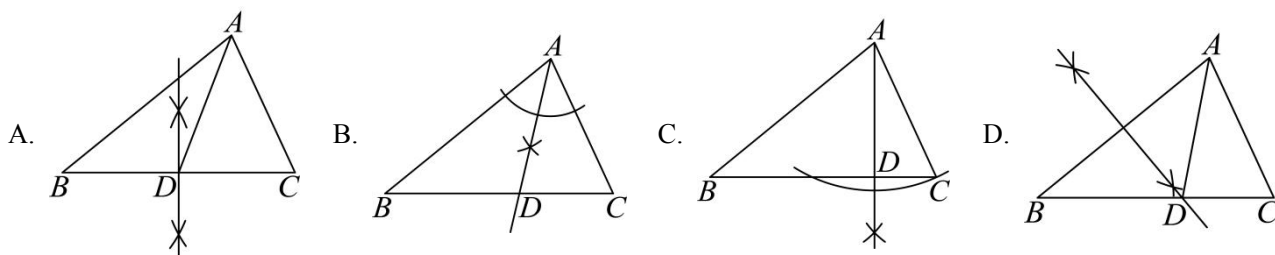
B、不是 ABC 的边 BC 上的高，此选项不符合题意；

C、不是 ABC 的边 BC 上的高，此选项不符合题意；

D、是 ABC 的边 AC 上的高，不是边 BC 上的高，此选项不符合题意；

故选：A.

4. 已知 ABC ，下列尺规作图的方法中，能确定 $\angle BAD = \angle CAD$ 的是（ ）



【答案】B

【解析】

【分析】本题考查作图——基本作图，解题的关键是掌握垂直平分线，角平分线，垂线的尺规作图方法；观察各选项作图痕迹，根据垂直平分线、角平分线、垂线的性质，逐项判断即可.

【详解】解：A、作图痕迹可知， D 为 BC 中点，不能确定 $\angle BAD = \angle CAD$ ，故 A 不符合题意；

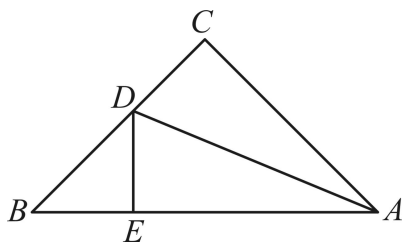
B、作图痕迹可知， D 在 $\angle BAC$ 的平分线上，能确定 $\angle BAD = \angle CAD$ ，故 B 符合题意；

C、作图痕迹可知， AD 是 BC 边上的高，不能确定 $\angle BAD = \angle CAD$ ，故 C 不符合题意；

D、作图痕迹可知， D 在 AB 的垂直平分线上，不能确定 $\angle BAD = \angle CAD$ ，故 D 不符合题意.

故选：B.

5. $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC$, AD 平分 $\angle BAC$, 交 BC 于 D , $DE \perp AB$ 于 E , 若 $AB = 8\text{ cm}$, 则 $\triangle DEB$ 的周长是 ()



A. 4cm

B. 5cm

C. 6cm

D. 8cm

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了全等三角形的判定与性质, 先利用“角角边”证明 $\triangle ACD$ 和 $\triangle AED$ 全等, 根据全等三角形对应边相等可得 $AC = AE$, $CD = DE$, 然后求出 $BD + DE = AE$, 进而可得 $\triangle DEB$ 的周长.

【详解】解: $\because DE \perp AB$, $\angle C = 90^\circ$,

$\therefore \angle C = \angle AED = 90^\circ$,

$\because AD$ 平分 $\angle CAB$,

$\therefore \angle CAD = \angle EAD$,

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle AED$ 中,

$$\begin{cases} \angle C = \angle AED \\ \angle CAD = \angle EAD, \\ AD = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle AED (\text{AAS})$,

$\therefore AC = AE$, $CD = DE$,

$\therefore BD + DE = BD + CD = BC = AC = AE$,

$BD + DE + BE = AE + BE = AB = 8$,

所以, $\triangle DEB$ 的周长为 8cm .

故选: D.

6. 若分式 “ $\frac{x-1}{x^2-\square} \cdot \frac{x+2}{x}$ ”, 可以进行约分化简, 则 “ $\square$ ” 不可以是 ()

A. 1

B. 2

C. 4

D. x

【答案】B

【解析】

【分析】 本题主要考查分式的乘法，分式可以进行约分化简，则分子与分母有公因式，据此分析即可.

【详解】 解：A、分母为 $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ ，分子有 $x-1$ ，可约分，结果为 $\frac{x+2}{x(x+1)}$ ，故 A 不符合题意；

B、分母为 $x^2 - 2$ ，无法在整数范围内分解，无法与分子约分，故 B 符合题意；

C、分母为 $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ ，分子有 $x+2$ ，可约分，结果为 $\frac{x-1}{x(x-2)}$ ，故 C 不符合题意；

D、分母为 $x^2 - x = x(x-1)$ ，分子有 $x-1$ ，可约分，结果为 $\frac{x+2}{x^2}$ ，故 D 不符合题意.

故选：B.

7. 某市为美化城市环境，计划种植树木 50 万棵，由于志愿者的加入，实际每天植树比原计划多 20%，结果提前 10 天完成任务，设原计划每天植树 x 万棵，则列方程为 ()

A. $\frac{50}{20\%x} - \frac{50}{x} = 10$

B. $\frac{50}{x} - \frac{50}{20\%x} = 10$

C. $\frac{50}{(1+20\%)x} - \frac{50}{x} = 10$

D. $\frac{50}{x} - \frac{50}{(1+20\%)x} = 10$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据“提前 10 天完成任务”即可列出方程.

【详解】 解：设原计划每天植树 x 万棵，需要 $\frac{50}{x}$ 天完成，

$\therefore$ 实际每天植树 $(x+0.2x)$ 万棵，需要 $\frac{50}{(1+20\%)x}$ 天完成，

$\therefore$ 提前 10 天完成任务，

$$\therefore \frac{50}{x} - \frac{50}{(1+20\%)x} = 10,$$

故选：D.

【点睛】 本题考查由实际问题抽象出分式方程，解题的关键是利用题目中的等量关系，本题属于基础题型.

8. 如图 1 的图案称“赵爽弦图”，是我国汉代数学家赵爽在注解《周髀算经》时给出的，它由四个全等的直角三角形围成一个大正方形，中间是个小正方形，我们在此图形中连接四条线段得到如图 2 的图案，记阴影部分的面积为 S_1 ，空白部分的面积为 S_2 ，大正方形的边长为 m ，小正方形的边长为 n ，若 $S_1 = S_2$ ，则 $\frac{n}{m}$ 的值为 ()

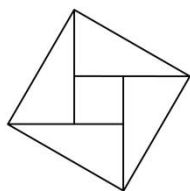


图1

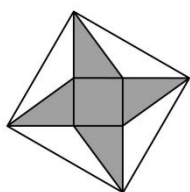


图2

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

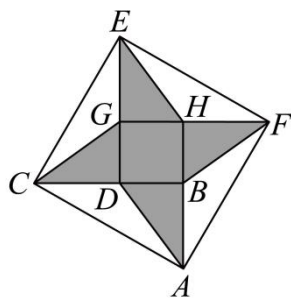
D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查勾股定理的应用，根据正方形的面积公式和三角形的面积公式得出它们之间的关系是解题的关键；设 $AB = CD = x$ ，则可以用 x 表示出 S_2 ，又由于 $S_1 = S_2$ ， $S_1 + S_2 = m^2$ ，所以可以得到 m 与 x 的关系式，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，利用勾股定理列出方程，得到 n 与 x 的关系，最后根据等量代换进行运算即可.

【详解】 解：如图所示，设 $AB = CD = x$ ，



$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}CD \times AB = \frac{1}{2}x^2,$$

$$\therefore S_2 = 4S_{\triangle ACD} = 4 \times \frac{1}{2}x^2 = 2x^2,$$

$$\because S_1 = S_2, \quad S_1 + S_2 = m^2,$$

$$\therefore 4x^2 = m^2,$$

$$\therefore m = 2x,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ，

$$\therefore x^2 + (x+n)^2 = m^2,$$

$$\therefore x^2 + (x+n)^2 = 4x^2,$$

$$\therefore x+n = \sqrt{3}x,$$

$$\therefore n = (\sqrt{3} - 1)x,$$

$$\therefore \frac{n}{m} = \frac{(\sqrt{3} - 1)x}{2x} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

故选：C.

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分）

9. 因式分解： $3x^2 - 6x =$ _____.

【答案】 $3x(x - 2)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，根据提公因式法进行因式分解，即可作答.

【详解】 解： $3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$,

故答案为： $3x(x - 2)$.

10. 若式子 $\sqrt{x - 3}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq 3$

【解析】

【详解】 解： 二次根式中被开方数 $x - 3 \geq 0$ ，所以 $x \geq 3$.

故答案为： $x \geq 3$.

11. 分式 $\frac{5c}{a^2b}$ ， $\frac{b}{2ac}$ 的最简公分母是_____.

【答案】 $2a^2bc$

【解析】

【分析】 本题考查确定最简公分母；确定最简公分母，需取各分母系数的最小公倍数和所有字母因式的最高次幂的积.

【详解】 解： $\therefore$ 分式 $\frac{5c}{a^2b}$ 的分母为 a^2b ，分式 $\frac{b}{2ac}$ 的分母为 $2ac$ ，系数的最小公倍数为 2，字母 a 的最高次幂为 a^2 ，字母 b 的最高次幂为 b ，字母 c 的最高次幂为 c ，

$\therefore$ 最简公分母为 $2a^2bc$.

故答案为： $2a^2bc$.

12. 已知 $\sqrt{12}$ 与最简二次根式 $\sqrt{2a - 1}$ 是同类二次根式，则 a 的值是_____.

【答案】2

【解析】

【分析】根据 $\sqrt{12}$ 与最简二次根式 $\sqrt{2a-1}$ 是同类二次根式，可以得到关于a的方程，解之可得a的值.

【详解】解： $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$,

$\therefore \sqrt{12}$ 与最简二次根式 $\sqrt{2a-1}$ 是同类二次根式,

$$\therefore 2a - 1 = 3,$$

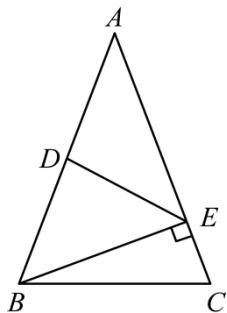
解得： $a = 2$,

故答案为：2.

【点睛】本题考查同类二次根式的判断和应用，注意在判断同类二次根式时，每个根式必须是最简二次根式.

13. 如图， $\triangle ABC$ 中， D 为 AB 的中点， $BE \perp AC$ ，垂足为 E .若 $DE = 5$ ， $AE = 8$ ，则 BE 的长度是

_____.



【答案】6

【解析】

【分析】根据直角三角形斜边上的中线求出AB长，根据勾股定理求出BE即可.

【详解】 $\because BE \perp AC$,

$$\therefore \angle BEA = 90^\circ,$$

$\because DE = 5$ ， D 为 AB 中点，

$$\therefore AB = 2DE = 10,$$

$$\because AE = 8,$$

$$\therefore \text{由勾股定理得: } BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = 6,$$

故答案为6.

【点睛】考查直角三角形的性质以及勾股定理，掌握直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半是解题的关

键.

14. 已知关于 x 的方程 $\frac{2x+m}{x-2} = 3$ 的解是正数, 则 m 的取值范围为_____.

【答案】 $m > -6$ 且 $m \neq -4$

【解析】

【分析】先解分式方程得到方程的根为: $x = m + 6$, 再根据方程的解为正数及分母不为 0, 列不等式组, 从而可得答案.

【详解】解: $\because \frac{2x+m}{x-2} = 3$,

$$\therefore 2x + m = 3x - 6,$$

$$\text{解得: } x = m + 6,$$

$\because$ 关于 x 的方程 $\frac{2x+m}{x-2} = 3$ 的解是正数,

$$\therefore m + 6 > 0 \text{ 且 } m + 6 \neq 2,$$

$$\text{解得: } m > -6 \text{ 且 } m \neq -4.$$

故答案为: $m > -6$ 且 $m \neq -4$.

【点睛】本题考查的是根据分式方程的解的情况求解参数的取值范围, 易错点是不注意分式方程产生增根时字母参数的取值要排除.

15. 已知 a 、 b 为有理数, m 、 n 分别表示 $5 - \sqrt{7}$ 的整数部分和小数部分, 且 $amn + bn^2 = 1$, 则

$$2a + b = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】

【详解】试题分析: 因为 $2 < \sqrt{7} < 3$, 所以 $2 < 5 - \sqrt{7} < 3$, 故 $m=2$, $n=5 - \sqrt{7} - 2=3 - \sqrt{7}$.

把 $m=2$, $n=3 - \sqrt{7}$ 代入 $amn + bn^2 = 1$ 得, $2(3 - \sqrt{7})a + (3 - \sqrt{7})^2 b = 1$

$$\text{化简得 } (6a + 16b) - \sqrt{7}(2a + 6b) = 1,$$

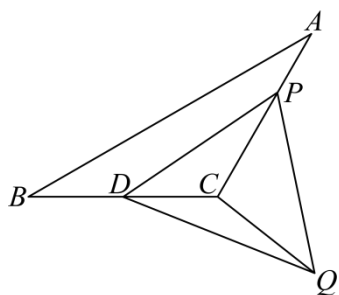
等式两边相对照, 因为结果不含 $\sqrt{7}$,

$$\text{所以 } 6a + 16b = 1 \text{ 且 } 2a + 6b = 0, \text{ 解得 } a = 1.5, b = -0.5.$$

$$\text{所以 } 2a + b = 3 - 0.5 = 2.5.$$

考点：1.二次根式的混合运算；2.估算无理数的大小.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 120^\circ$ ， $AC = BC = 4$ ，点 D 是 BC 的中点，点 P 是 AC 边上的一个动点，连接 PD ，以 PD 为边在 PD 的下方作等边 $\triangle DPQ$ ，连接 CQ ，则 CQ 的最小值是_____.



【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】求解 $BD = CD = 2$ ，如图，把 $\triangle DCP$ 绕 D 顺时针旋转 60° 得 $\triangle DKQ$ ，连接 CK ，过 C 作 $CF \perp KQ$ 于 F ，证明 $\triangle DCK$ 为等边三角形，进一步证明 $CD \parallel KQ$ ，可得 Q 在线段 KQ 上运动，可得当 Q, F 重合时， CQ 的最小值为 $\sqrt{3}$.

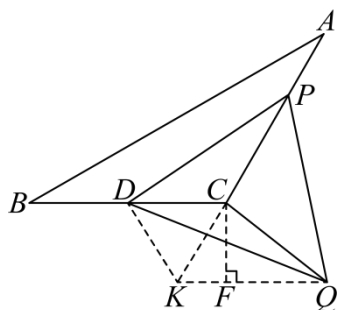
【详解】解： $\because \angle ACB = 120^\circ$ ， $AC = BC = 4$ ，点 D 是 BC 的中点，

$$\therefore BD = CD = 2,$$

$\therefore$ 以 PD 为边在 PD 的下方作等边 $\triangle DPQ$ ，

$$\therefore DP = PQ = DQ, \angle PDQ = 60^\circ,$$

如图，把 $\triangle DCP$ 绕 D 顺时针旋转 60° 得 $\triangle DKQ$ ，连接 CK ，过 C 作 $CF \perp KQ$ 于 F ，



$$\therefore DC = DK, \angle CDK = 60^\circ, \angle DKQ = \angle BCA = 120^\circ,$$

$\therefore \triangle DCK$ 为等边三角形，

$$\therefore DK = CK = 2, \angle DKC = \angle DCK = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CKQ = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ = \angle DCK,$$

$$\therefore CD \parallel KQ,$$

$\therefore Q$ 在线段 KQ 上运动,

$$\because \angle CFK = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle KCF = 30^\circ,$$

$$\therefore KF = \frac{1}{2}CK = 1, \quad CF = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$\therefore$ 当 Q, F 重合时, CQ 的最小值为 $\sqrt{3}$.

故答案为: $\sqrt{3}$

【点睛】 本题考查的是等边三角形的判定与性质, 含 30° 度角的直角三角形的性质, 勾股定理的应用, 垂线段最短, 旋转的性质, 作出合适的辅助线是解本题的关键.

三、解答题 (本大题共 10 小题, 共 68 分)

17. 计算:

$$(1) (-1)^{2025} + (\sqrt{2} + 1) \times (\sqrt{2} - 1) - \left| -3 \times \frac{1}{3} \right|$$

$$(2) (2\sqrt{3} - \sqrt{6}) \times \sqrt{12}.$$

【答案】 (1) -1

$$(2) 12 - 6\sqrt{2}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了实数混合运算, 二次根式的混合运算, 熟练掌握运算法则是解题的关键.

(1) 根据乘方运算法则, 平方差公式, 绝对值意义进行计算即可;

(2) 根据二次根式的混合运算法则进行计算即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } (-1)^{2025} + (\sqrt{2} + 1) \times (\sqrt{2} - 1) - \left| -3 \times \frac{1}{3} \right|$$

$$= -1 + 1 - 1$$

$$= -1;$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}
 \text{解: } & (2\sqrt{3} - \sqrt{6}) \times \sqrt{12} \\
 &= (2\sqrt{3} - \sqrt{6}) \times 2\sqrt{3} \\
 &= 12 - 6\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

18. 解方程:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{7}{x-3} = \frac{5}{x}; \\
 (2) \quad & \frac{1-2x}{x-2} = 2 + \frac{3}{2-x}.
 \end{aligned}$$

【答案】 (1) $x = -\frac{15}{2}$

(2) 无解

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程，熟练掌握分式方程的解法是解题关键.

(1) 方程两边同乘以 $x(x-3)$ 化成整式方程，解方程可得 x 的值，然后进行检验即可得；

(2) 方程两边同乘以 $(x-2)$ 化成整式方程，解方程可得 x 的值，然后进行检验即可得.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \frac{7}{x-3} = \frac{5}{x}$$

$$7x = 5(x-3)$$

$$7x = 5x - 15$$

$$7x - 5x = -15$$

$$\text{解得 } x = -\frac{15}{2},$$

经检验， $x = -\frac{15}{2}$ 是原方程的解，

$$\therefore \text{原方程的解为 } x = -\frac{15}{2};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \frac{1-2x}{x-2} = 2 + \frac{3}{2-x}$$

$$1-2x = 2(x-2) - 3$$

$$1-2x = 2x-4-3$$

$$-4x = -8,$$

解得 $x = 2$,

经检验, $x = 2$ 是增根,

$\therefore$ 原方程无解.

19. 先化简, 再求值: $\frac{a+1}{a-3} - \frac{a-3}{a+2} \div \frac{a^2-6a+9}{a^2-4}$, 其中 $a = \sqrt{6} + 3$.

【答案】 $\frac{3}{a-3}, \frac{\sqrt{6}}{2}$

【解析】

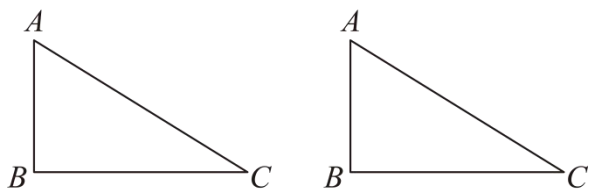
【分析】 本题主要考查了分式的化简求值、因式分解, 熟练掌握分式的运算法则和因式分解方法是解题的关键. 先将除法运算转化为乘法运算并因式分解, 再通分进行分式加减, 最后代入求值.

【详解】 解: $\frac{a+1}{a-3} - \frac{a-3}{a+2} \div \frac{a^2-6a+9}{a^2-4}$

$$= \frac{a+1}{a-3} - \frac{a-3}{a+2} \cdot \frac{(a+2)(a-2)}{(a-3)^2}$$
$$= \frac{a+1}{a-3} - \frac{a-2}{a-3}$$
$$= \frac{(a+1)-(a-2)}{a-3}$$
$$= \frac{a+1-a+2}{a-3}$$
$$= \frac{3}{a-3},$$

当 $a = \sqrt{6} + 3$ 时, 原式 $= \frac{3}{(\sqrt{6}+3)-3} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

20. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, 利用无刻度的直尺和圆规完成下列作图.



(1)

(2)

(1) 在如图 (1) 边 BC 上求作一点 D , 使点 D 到点 A 、 C 两点的距离相等;

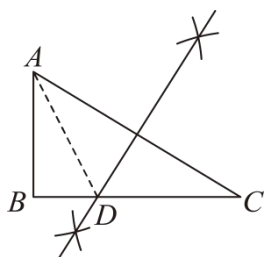
(2) 在如图 (2) 边 BC 上求作一点 E , 使得 $\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACE}} = \frac{AB}{AC}$.

(2) 画图见解析

【分析】 本题考查尺规作图画已知线段的垂直平分线，尺规作图画已知角的角平分线；

(2) 使得 $\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACE}} = \frac{AB}{AC}$ 的点 E 到 AC 、 AB 的距离相等, 即 $\angle BAC$ 的角平分线与 BC 的交点.

解: 如图, 作线段 AC 的垂直平分线, 交 BC 于点 D , 连接 AD ,

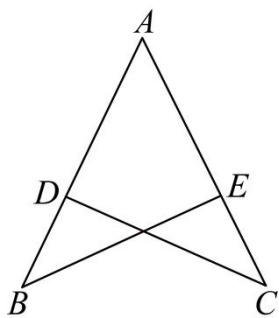


则点 D 即为所求.

此时点 E 到 AB 、 AC 的距离都等于 BE 的长度,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACE}} = \frac{\frac{1}{2} \times AB \times BE}{\frac{1}{2} \times AC \times BE} = \frac{AB}{AC},$$

21. 如图, 点 D 在 AB 上, E 在 AC 上, $AB=AC$, $\angle B=\angle C$, 求证: $AD=AE$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定与性质. 在应用全等三角形的判定时, 要注意三角形的公共边和公共角.

根据两边及其夹角对应相等可以判断 $\triangle ADE \cong \triangle AEB$, 再由全等三角形对应边相等可说明结论.

【详解】证明: 在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle A \\ AB = AC \\ \angle B = \angle C \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ABE (ASA),$$

$$\therefore AD = AE \text{ (全等三角形的对应边相等)}.$$

22. 2025 年春晚舞台上, 宇树科技的人形机器人以一身喜庆的大红棉袄亮相, 随着秧歌舞步灵活扭动, 手中的红手绢在空中划出流畅弧线. 这场表演不仅让观众惊叹于机器人动作的精准协调, 更因“机器人舞团”在舞蹈时队形变化整齐无误, 成为社交媒体热议的焦点. 某公司计划购买 A、B 两种机器人进行销售. 已知每个 B 种机器人比 A 种机器人贵 5 万元, 用 1200 万元购进 A 种机器人的数量是用 650 万元购进 B 种机器人数量的 2 倍. 求购买一个 A 种机器人、一个 B 种机器人各需多少万元?

【答案】购买一个 A 种机器人需 60 万元, 一个 B 种机器人需 65 万元

【解析】

【分析】本题考查分式方程解决实际问题; 设购买一个 A 种机器人需要 x 万元, 则一个 B 种机器人需要 $(x+5)$ 万元, 利用“用 1200 万元购进 A 种机器人的数量是用 650 万元购进 B 种机器人数量的 2 倍”作为等量关系建立方程求解即可.

【详解】解: 设购买一个 A 种机器人需要 x 万元, 则一个 B 种机器人需要 $(x+5)$ 万元

$$\frac{1200}{x} = \frac{650}{x+5} \times 2$$

$$\text{去分母得: } 1200(x+5) = 1300x$$

解得: $x = 60$

经检验 $x = 60$ 是原方程的解

$$\therefore x + 5 = 60 + 5 = 65$$

答: 购买一个 A 种机器人需 60 万元, 一个 B 种机器人需 65 万元.

23. 在一次“探究性学习”中, 老师设计了如下数表:

n	2	3	4	5	6	...
a	$2^2 - 1$	$3^2 - 1$	$4^2 - 1$	$5^2 - 1$	$6^2 - 1$	...
b	4	6	8	10	12	...
c	$2^2 + 1$	$3^2 + 1$	$4^2 + 1$	$5^2 + 1$	$6^2 + 1$	...

(1) 观察上表, 用含 n ($n > 1$ 且 n 为整数) 的代数式表示 a, b, c , 则 $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.

(2) 在 (1) 的条件下判断: 以 a, b, c 为边的三角形是否为直角三角形? 证明你的结论.

【答案】(1) $n^2 - 1$; $2n$; $n^2 + 1$ (2) 是直角三角形; 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 根据题意找到规律即可写出;

(2) 由勾股定理的逆定理, 只要验证两小边的平方和等于最长边的平方即可.

【详解】解: (1) 用含 n ($n > 1$ 且 n 为整数) 的代数式表示 a, b, c , 为 $a = n^2 - 1$, $b = 2n$, $c = n^2 + 1$

故答案为: $n^2 - 1$; $2n$; $n^2 + 1$

(2) 以 a, b, c 为边的三角形是直角三角形

证明: $\because a = n^2 - 1$, $b = 2n$, $c = n^2 + 1$

$$\therefore a^2 = (n^2 - 1)^2 = n^4 - 2n^2 + 1$$

$$b^2 = (2n)^2 = 4n^2$$

$$c^2 = (n^2 + 1)^2 = n^4 + 2n^2 + 1.$$

$$\text{又} \because a^2 + b^2 = n^4 - 2n^2 + 1 + 4n^2 = n^4 + 2n^2 + 1$$

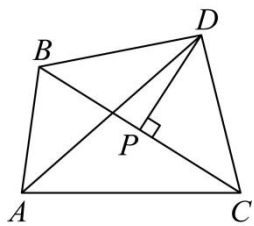
$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$

$\therefore$ 以 a, b, c 为边的三角形是直角三角形.

【点睛】本题考查勾股定理的逆定理的应用. 判断三角形是否为直角三角形, 已知三角形三边的长, 只要

利用勾股定理的逆定理加以判断即可.

24. 如图, DP 所在直线是 BC 的垂直平分线, 垂足是点 P , DP 与 $\angle BAC$ 的平分线相交于点 D ,



(1) 如果 $AB=3$, $AC=5$, $S_{\triangle ACD}=10$, 那么 $S_{\triangle ABD} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) 若 $\angle BAC=86^\circ$, 求 $\angle BDC$ 度数.

【答案】(1) 6

(2) 94°

【解析】

【分析】 本题考查垂直平分线的性质, 角平分线的性质;

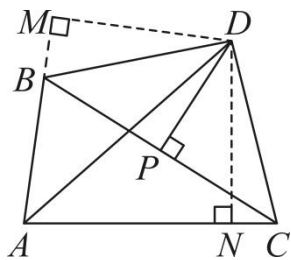
(1) 过 D 作 $DM \perp AB$ 交 AB 延长线于 M , $DN \perp AC$ 交 AC 于 N , 根据角平分线得到 $DM=DN$, 再

根据 $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{\frac{1}{2}DN \cdot AC}{\frac{1}{2}DM \cdot AB} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{3}$ 得到 $S_{\triangle ABD} = \frac{3}{5}S_{\triangle ACD} = \frac{3}{5} \times 10 = 6$;

(2) 证明 $\text{Rt}\triangle DMA \cong \text{Rt}\triangle DNA$ (HL) 得到 $\angle DBM + \angle DBA = 180^\circ = \angle DCN + \angle DBA$, 再根据四边形内角和求 $\angle BDC$ 度数.

【小问 1 详解】

解: 过 D 作 $DM \perp AB$ 交 AB 延长线于 M , $DN \perp AC$ 交 AC 于 N ,



$\therefore \angle BAC$ 的平分线 DA ,

$\therefore DM=DN$,

$\therefore AB=3$, $AC=5$, $S_{\triangle ACD}=10$,

$\therefore \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{\frac{1}{2}DN \cdot AC}{\frac{1}{2}DM \cdot AB} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{3}$,

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{3}{5}S_{\triangle ACD} = \frac{3}{5} \times 10 = 6,$$

故答案为：6；

【小问2详解】

解： $\because DP$ 所在直线是 BC 的垂直平分线，

$$\therefore DB = DC,$$

$$\because DM \perp AB, DN \perp AC,$$

$$\therefore \angle DMA = \angle DNA = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle DMA \cong \text{Rt}\triangle DNA (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle DBM = \angle DCN,$$

$$\therefore \angle DBM + \angle DBA = 180^\circ = \angle DCN + \angle DBA,$$

$$\because \angle DCN + \angle DBA + \angle BAC + \angle BDC = 360^\circ, \angle BAC = 86^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = 360^\circ - (\angle DCN + \angle DBA + \angle BAC)$$

$$= 360^\circ - (86^\circ + 180^\circ)$$

$$= 94^\circ.$$

25. 【阅读材料】小明在学习二次根式时，发现一些含根号的式子可以化成另一个式子的平方，如：

$$5 - 2\sqrt{6} = (2+3) - 2\sqrt{2 \times 3} = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2,$$

$$8 + 4\sqrt{3} = (2+6) + 2\sqrt{12} = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{6} = (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2,$$

【类比归纳】

(1) 仿照小明的方法将 $7 - 2\sqrt{10}$ 化成另一个式子的平方： $7 - 2\sqrt{10} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 请运用小明的方法化简： $\sqrt{13 - 4\sqrt{10}}$.

(3) 将式子化成平方的形式： $x + 5 + 4\sqrt{x+1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 已知 a, b 为非负实数， $\because a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ ，

$\therefore a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ，当且仅当“ $a = b$ ”时，等号成立. 这个结论就是著名的“均值不等式”. 请利用均值不

等式解决：当 x 为何值时， $\frac{x+3\sqrt{x+2}+5}{\sqrt{x+2}+1}$ 有最小值？求出该最小值.

【答案】(1) $(\sqrt{2} - \sqrt{5})^2$

(2) $2\sqrt{2} - \sqrt{5}$

$$(3) \left(\sqrt{x+1}+2\right)^2$$

(4) 当 $x = -2$ 时, 最小值为 3

【解析】

【分析】本题为新定义问题, 考查了完全平方公式的变形, 分式的计算, 二次根式的化简等知识, 难度较大.

(1) 把 $7-2\sqrt{10}$ 变形为 $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{2} \times \sqrt{5}$ 即可求解;

(2) 把 $\sqrt{13-4\sqrt{10}}$ 变形为 $\sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}$ 即可求解;

(3) 把 $x+5+4\sqrt{x+1}$ 变形为 $(\sqrt{x+1})^2 + 2^2 + 2\sqrt{x+1} \times 2$ 即可求解;

(4) 把 $\frac{x+3\sqrt{x+2}+5}{\sqrt{x+2}+1}$ 变形为 $\frac{(\sqrt{x+2}+1)^2 + \sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}+1}$, 进而变形为 $\sqrt{x+2}+1+1+\frac{1}{\sqrt{x+2}+1}$, 根据

“均值不等式”结论得到 $\sqrt{x+2}+1+1+\frac{1}{\sqrt{x+2}+1} \geq 2 \times \sqrt{(\sqrt{x+2}+1) \times \frac{1}{\sqrt{x+2}+1}} + 1$, 进而得到

$\sqrt{x+2}+1+1+\frac{1}{\sqrt{x+2}+1} \geq 3$, 从而得到当且仅当 $\sqrt{x+2}+1 = \frac{1}{\sqrt{x+2}+1}$ 即 $x = -2$ 时, 等号成立, 原式的最小值为 3.

【小问 1 详解】

解: $7-2\sqrt{10} = 2+5-2\sqrt{2 \times 5} = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{2} \times \sqrt{5} = (\sqrt{2}-\sqrt{5})^2$.

故答案为: $(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2$

【小问 2 详解】

解: $\sqrt{13-4\sqrt{10}} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = \sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{5})^2} = |2\sqrt{2}-\sqrt{5}| = 2\sqrt{2}-\sqrt{5}$;

【小问 3 详解】

解: $x+5+4\sqrt{x+1} = x+1+4+4\sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1})^2 + 2^2 + 2\sqrt{x+1} \times 2 = (\sqrt{x+1}+2)^2$;

故答案为: $(\sqrt{x+1}+2)^2$

【小问 4 详解】

解: 条件可得 $x \geq -2$,

$$\therefore \frac{x+3\sqrt{x+2}+5}{\sqrt{x+2}+1}$$

$$= \frac{x+2+3\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{x+2}+1)^2 + \sqrt{x+2}+1+1}{\sqrt{x+2}+1} \\
&= \sqrt{x+2}+1+1+\frac{1}{\sqrt{x+2}+1} \geq 2 \times \sqrt{(\sqrt{x+2}+1) \times \frac{1}{\sqrt{x+2}+1}} + 1 \\
&\because 2 \times \sqrt{(\sqrt{x+2}+1) \times \frac{1}{\sqrt{x+2}+1}} + 1 = 2+1=3, \\
&\therefore \sqrt{x+2}+1+1+\frac{1}{\sqrt{x+2}+1} \geq 3, \\
&\therefore \text{当且仅当 } \sqrt{x+2}+1 = \frac{1}{\sqrt{x+2}+1} \text{ 即 } x = -2 \text{ 时, 等号成立,} \\
&\therefore \text{原式的最小值为 } 3.
\end{aligned}$$

26. 如图 1, 四边形 $ABCD$ 是长方形, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle ADC = 90^\circ$, $AD = BC$, $AB = CD$, $AD = 6$, $AB = 10$, 点 E 是 AB 边上一点, 连接 DE , 过点 E 作 DE 的垂线, 交 BC 于点 F , 将 $\triangle BEF$ 沿 EF 所在直线翻折得到 $\triangle EFG$, 其中点 G 是点 B 的对应点.

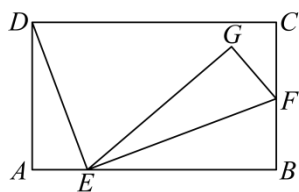


图1

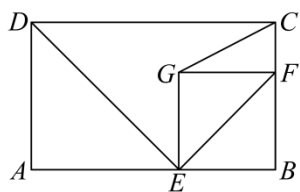


图2

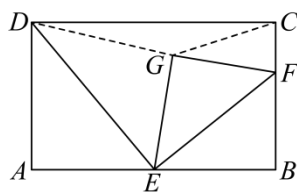


图3

- (1) 如图 2, 连接 CG , 若 $\angle AED = 45^\circ$, 直接写出 CG 的长为_____;
- (2) 连接 DG , 若 $\triangle DEG$ 是以 DE 为腰的等腰三角形时, 求 AE 的长;
- (3) 如图 3, 连接 CG , 若 FG 的延长线正好经过点 D , 直接写出 $\triangle CDG$ 的面积为_____.

【答案】 (1) $2\sqrt{5}$

(2) $AE = \frac{16}{5}$ 或 $\frac{10}{3}$

(3) $\frac{330}{61}$

【解析】

【分析】 本题考查翻折的性质, 正方形的性质, 勾股定理, 等腰三角形的性质, 全等三角形的性质和判定, 三角形面积计算;

(1) 由翻折的性质得 $\angle EGF = \angle B = 90^\circ$, $BE = GE$, $\angle FEB = \angle GEF = 45^\circ$, 从而得到四边形 $GEBF$ 为正方形, 最后在 $\text{Rt}\triangle CGF$ 中勾股定理即可求解;

(2) 分两种情况: ①当 $DE = EG$, 设 $AE = x$, 利用 $DE = EG = BE$ 在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中建立方程求解; ②

当 $DE = DG$ ，设 $AE = x$ ，过 D 点作 $DH \perp EG$ ，证明 $\triangle AED \cong \triangle HED$ (AAS) 得到 $AE = EH$ 建立方程求解；

(3) 连接 CG ，若 FG 的延长线正好经过点 D ，设 $BF = GF = x$ ，则 $CF = 6 - x$ ， $DF = 6 + x$ ，在 $\text{Rt}\triangle DCF$ 中建立方程可求出 CF ，从求出 $\text{Rt}\triangle DCF$ 的面积，再利用 DG 与 DF 的比例关系即可求出 $\triangle CDG$ 的面积。

【小问 1 详解】

解： $\because \angle A = 90^\circ$ ， $\angle AED = 45^\circ$ ， $AD = 6$ ，

$\therefore \triangle ADE$ 为等腰直角三角形，

$\therefore AD = AE = 6$ ，

$\because AB = 10$ ，

$\therefore BE = AB - AE = 10 - 6 = 4$ ，

$\because DE \perp EF$ ， $\angle AED = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle FEB = 45^\circ$ ，

$\therefore$ 将 $\triangle BEF$ 沿 EF 所在直线翻折得到 $\triangle EFG$ ，

$\therefore \angle EGF = \angle B = 90^\circ$ ， $BE = GE$ ， $\angle FEB = \angle GEF = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle GEB = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $GEBF$ 为正方形，

$\therefore GF = BF = BE = 4$ ， $\angle GFB = 90^\circ$ ，

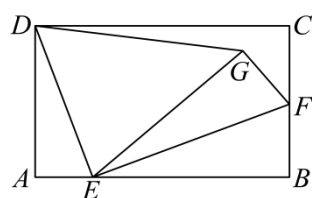
$\therefore CF = BC - BF = 6 - 4 = 2$ ，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle CGF$ 中， $CG = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ 。

【小问 2 详解】

解：若 $\triangle DEG$ 是以 DE 为腰的等腰三角形，分两种情况：

①当 $DE = EG$ ，如图所示，设 $AE = x$ ，



$\because AB = 10$ ，

$\therefore BE = 10 - x$ ，

由翻折可得： $EG = BE = 10 - x$ ，

$\therefore DE = EG = 10 - x$ ，

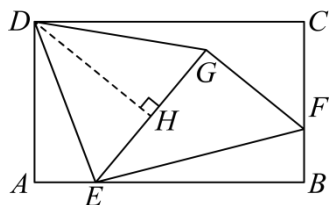
在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $AD^2 + AE^2 = DE^2$,

$$\text{即 } 6^2 + x^2 = (10 - x)^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{16}{5},$$

$$\therefore AE = \frac{16}{5},$$

②当 $DE = DG$, 如图所示, 设 $AE = x$, 过 D 点作 $DH \perp EG$,



$$\because AB = 10,$$

$$\therefore BE = 10 - x,$$

由翻折可得: $EG = BE = 10 - x$,

$$\because DE = DG, \quad DH \perp EG,$$

$$\therefore EH = HG = \frac{1}{2}EG = \frac{1}{2}(10 - x),$$

$$\because DE \perp EF,$$

$$\therefore \angle AED + \angle BEF = 90^\circ, \quad \angle DEH + \angle HEF = 90^\circ,$$

由翻折可得: $\angle FEB = \angle HEF$,

$$\therefore \angle AED = \angle DEH,$$

在 $\triangle AED$ 与 $\triangle HED$ 中

$$\begin{cases} \angle A = \angle DHE \\ \angle AED = \angle DEH \\ DE = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle HED (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = EH,$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}(10 - x),$$

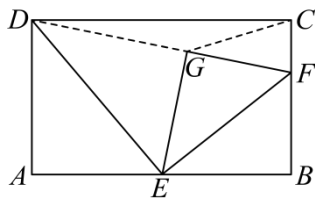
$$\text{解得: } x = \frac{10}{3},$$

$$\therefore AE = \frac{10}{3}.$$

综上: $AE = \frac{16}{5}$ 或 $\frac{10}{3}$.

【小问3详解】

解：连接 CG ，若 FG 的延长线正好经过点 D ，如图所示，



由翻折可知： $\angle EGF = \angle B = 90^\circ$ ， $BE = GE$ ， $BF = GF$ ，

$\therefore FG$ 的延长线正好经过点 D ，

$\therefore \angle DGE = 90^\circ$ ，

由 (2) 可得 $\triangle AED \cong \triangle GED$ (AAS)，

$\therefore AD = GD = 6$ $AE = EG$ ，

$\therefore AE = BE = \frac{1}{2}AB = 5$ ，

设 $BF = GF = x$ ，则 $CF = 6 - x$ ， $DF = 6 + x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DCF$ 中， $DC^2 + CF^2 = DF^2$ ，

$\therefore 10^2 + (6 - x)^2 = (x + 6)^2$ ，

解得： $x = \frac{25}{6}$ ，

$\therefore CF = 6 - \frac{25}{6} = \frac{11}{6}$ ， $DF = 6 + \frac{25}{6} = \frac{61}{6}$ ，

$\therefore S_{\triangle DCF} = \frac{1}{2}DC \times CF = \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{11}{6} = \frac{55}{6}$

$\therefore DG : DF = 6 : \frac{61}{6} = \frac{36}{61}$ ，

$\therefore S_{\triangle DCG} = \frac{36}{61} S_{\triangle DCF} = \frac{36}{61} \times \frac{55}{6} = \frac{330}{61}$ 。