

市北初级中学北校 2025 学年第一学期八年级数学阶段练习 8

(满分 100 分, 完卷时间 60 分钟) 2025 年 12 月

一、选择题: (每题 3 分, 共 18 分)

1. 下列方程中是关于 x 的一元二次方程的是 ()

A. $x^2 = -1$

B. $ax^2 + bx + c = 0$ (其中 a 、 b 、 c 是常数)

C. $x^2 + \frac{1}{x} - 1 = 0$

D. $(x-3)(x-2) = x^2 - 1$

【答案】A

【解析】

【分析】此题考查的是一元二次方程的判断, 掌握一元二次方程的定义及一般形式是解题关键. 先将各选项一元二次方程不是一般形式的化为一般形式, 然后根据一元二次方程的定义逐一判断即可.

【详解】解: A. $x^2 = -1$, 是一元二次方程, 故符合题意;

B. 当 $a = 0$ 时, $ax^2 + bx + c = 0$ (其中 a 、 b 、 c 是常数) 不是一元二次方程, 故不符合题意;

C. $x^2 + \frac{1}{x} - 1 = 0$ 不是整式方程, 所以不是一元二次方程, 故不符合题意;

D. $(x-3)(x-2) = x^2 - 1$, 整理, 得 $5x - 7 = 0$, 不是一元二次方程, 故不符合题意.

故选: A.

2. 下列说法正确的是 ()

A. $\sqrt{16}$ 的平方根是 ± 4

B. 负数没有立方根

C. 64 的立方根是 ± 4 ;

D. $(-5)^2$ 的算术平方根是 5

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查平方根、立方根、算术平方根的概念, 解题的关键是准确理解这些概念的定义. 分别对每个选项根据平方根、立方根、算术平方根的定义进行分析判断.

【详解】解: A、先计算 $\sqrt{16} = 4$, 4 的平方根是 ± 2 , 不是 ± 4 , 该选项错误;

B、负数有立方根, 例如 -8 的立方根是 -2 , 该选项错误;

C、64 的立方根是 4, 不是 ± 4 , 该选项错误;

D、先计算 $(-5)^2 = 25$, 25 的算术平方根是 5, 该选项正确.

故选: D.

3. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, AB = 2$, 则 BC 为 ()

A. 4

B. 2

C. 1

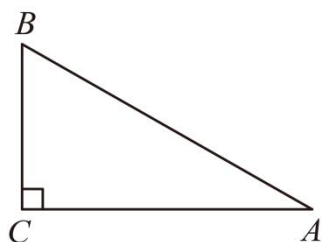
D. 不能确定

【答案】 C

【解析】

【分析】 含 30° 角的直角三角形中, 30° 角的对边等于斜边的一半.

【详解】 解: 如图,



在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, AB = 2$,

$$\therefore BC = \frac{1}{2} AB = 1$$

故选: C.

【点睛】 本题考查含 30° 角的直角三角形, 是重要考点, 掌握相关知识是解题关键.

4. 下列方程中, 没有实数根的是 ()

A. $x^2 + x = 0$

B. $5x^2 - 4x - 1 = 0$

C. $3x^2 - 4x + 1 = 0$

D. $4x^2 - 5x + 2 = 0$

【答案】 D

【解析】

【分析】 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 若 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 则方程有两个不相等的实数根, 若 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, 则方程有两个相等的实数根, 若 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, 则方程没有实数根, 据此求解即可.

【详解】 解: A、 $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 0 = 1 > 0$, 故原方程有两个不相等的实数根, 不符合题意;

B、 $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 5 \times (-1) = 36 > 0$, 故原方程有两个不相等的实数根, 不符合题意;

C、 $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 > 0$, 故原方程有两个不相等的实数根, 不符合题意;

D、 $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 4 \times 2 = -7 < 0$, 故原方程没有实数根, 符合题意;

故选: D.

5. 某工厂七月份的产值是 100 万元, 计划第三季度共创产值 484 万元. 若每个月产值的增长率相同, 并设

这个增长率为 x ，则下列方程中正确的是（ ）

A. $100(1+x)^2 = 484$

B. $100(1+x)^3 = 484$

C. $(1+x) + 100(1+x)^2 = 484$

D. $100[1 + (1+x) + (1+x)^2] = 484$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用，掌握增长率的计算方法是解题的关键；

根据每个月产值的平均增长率为 x ，七月份的产值是 100 万元，表示之后两个月的产值，然后已知第三季度的总产值，列方程即可．

【详解】解：∵每个月产值的平均增长率为 x ，七月份的产值是 100 万元，

∴八月份产值为 $100(1+x)$ ，

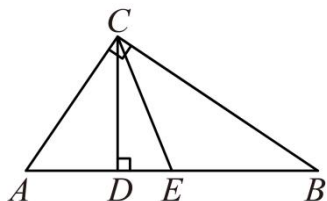
九月份产值为 $100(1+x)^2$ ，

∴计划第三季度共创产值 484 万元，

$$\therefore 100[1 + (1+x) + (1+x)^2] = 484,$$

故选：D．

6. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ．线段 CD 、 CE 分别为 $\triangle ABC$ 的高和中线，下列说法中错误的是（ ）



A. $\angle B = \angle ACD$

B. $\angle BCE = \angle ACD$

C. $2CE = AB$

D. $2AC = AB$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了三角形的高和中线的性质，熟练掌握三角形高和中线的性质是解题的关键；

根据三角形高和中线的性质，结合图形对选项一一判断即可求解．

【详解】解：线段 CD 、 CE 分别为 $\triangle ABC$ 的高和中线，

$$\therefore \angle CDB = \angle CDA = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle DCB = \angle B + \angle DCB = 90^\circ,$$

$\therefore \angle B = \angle ACD$, 故 A 选项正确, 不符合题意;

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore CE = \frac{1}{2}AB = BE = AE,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle B,$$

$\therefore \angle BCE = \angle ACD$, 故 B 选项正确, 不符合题意;

$$\therefore CE = \frac{1}{2}AB,$$

$\therefore AB = 2CE$, 故选项 C 正确, 不符合题意;

根据题中条件无法推出 $AC = AE = CE$, 故无法推出 $2AC = AB$, 故选项 D 错误, 符合题意;

故选: D

二、填空题: (每题 2 分, 共 24 分)

7. 比较大小: $3\sqrt{3}$ _____ $2\sqrt{7}$ (选填 “>”, “<”, “=”).

【答案】<

【解析】

【分析】本题主要考查了实数的大小的比较, 因为是两个无理数比较大小, 所以应把根号外的数整理到根号内再进行比较.

【详解】解: $\because 3\sqrt{3} = \sqrt{27}$, $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$, $27 < 28$,

$$\therefore 3\sqrt{3} < 2\sqrt{7}.$$

故答案为: <.

8. 化简: $\sqrt{50mn^2} (n > 0) =$ _____.

【答案】 $5n\sqrt{2m}$

【解析】

【分析】本题主要考查了二次根式的化简, 将 50 分解为 25×2 , 利用 n^2 的算术平方根为 $n (n > 0)$, 提取平方因子后化简.

【详解】解: $\because n > 0$,

$$\therefore \sqrt{50mn^2} = 5n\sqrt{2m},$$

故答案为: $5n\sqrt{2m}$.

9. $2\sqrt{6}+3\sqrt{2}$ 的有理化因式是_____.

【答案】 $2\sqrt{6}-3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了有理数因式的定义, 根据“如果两个含有二次根式的非零代数式相乘, 它们的积不含有二次根式, 就说这两个非零代数式互为有理化因式”, 即可解答.

【详解】 解: $\because (2\sqrt{6}+3\sqrt{2})(2\sqrt{6}-3\sqrt{2})$
 $= (2\sqrt{6})^2 - (3\sqrt{2})^2$
 $= 24 - 18$
 $= 6,$
 $\therefore 2\sqrt{6}+3\sqrt{2}$ 的有理化因式是 $2\sqrt{6}-3\sqrt{2}$,

故答案为: $2\sqrt{6}-3\sqrt{2}$.

10. 关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx-10=0$ 的一个根为 5, 则 m 的值为_____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的解, 将 $x=5$ 代入 $x^2+mx-10=0$ 求解即可.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx-10=0$ 的一个根为 5,

$\therefore 5^2+5m-10=0,$

解得 $m=-3$.

故答案为: -3.

11. 用换元法解方程 $\frac{x-2}{x}-\frac{3x}{x-2}=2$ 时, 如果设 $\frac{x-2}{x}=y$, 那么变形后的整式方程为_____.

【答案】 $y^2-2y-3=0$

【解析】

【分析】 本题考查用换元法解分式方程. 设 $\frac{x-2}{x}=y$, 则 $\frac{x}{x-2}=\frac{1}{y}$, 原方程变为: $y-\frac{3}{y}=2$, 方程两边乘最简公分母 y , 可以把分式方程转化为整式方程.

【详解】解：设 $\frac{x-2}{x} = y$ ，那么 $\frac{x}{x-2} = \frac{1}{y}$ ，

原方程变为 $y - \frac{3}{y} = 2$ ，

方程两边都乘 y 得 $y^2 - 2y - 3 = 0$ 。

故原方程可化为关于 y 的整式方程是 $y^2 - 2y - 3 = 0$ 。

故答案为： $y^2 - 2y - 3 = 0$ 。

12. 在实数范围内因式分解： $3x^2 - 2x - 2 =$ _____。

【答案】 $3\left(x - \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分解因式，解一元二次方程，令 $3x^2 - 2x - 2 = 0$ ，求出方程的两个根即可得到答案。

【详解】 解： 令 $3x^2 - 2x - 2 = 0$ ，

解得 $x = \frac{2+2\sqrt{7}}{6} = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$ 或 $x = \frac{2-2\sqrt{7}}{6} = \frac{1-\sqrt{7}}{3}$ ，

$\therefore 3x^2 - 2x - 2 = 3\left(x - \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$ ，

故答案为： $3\left(x - \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$ 。

13. n 个球队参加比赛，每两队之间进行一场比赛，比赛总场数为 15 场，则 $n =$ _____。

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的应用，涉及单循环比赛总场数的计算。根据总场数为 $\frac{n(n-1)}{2}$ ，令其等于 15，解方程即可。

【详解】 解： 依题意，比赛总场数为 $\frac{n(n-1)}{2} = 15$ ，

整理得 $n(n-1) = 30$,

即 $n^2 - n - 30 = 0$,

因式分解得 $(n-6)(n+5) = 0$,

$\therefore n-6=0, n+5=0$,

解得: $n=6$ 或 $n=-5$ (舍去).

故答案为: 6.

14. 若 α, β 是方程 $x^2 - 2x - 5 = 0$ 的两个实数根, 则 $\alpha + \beta - \alpha\beta$ 的值为_____.

【答案】 7

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程, 根与系数的关系, 解题的关键是熟练掌握一元二次方程

$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根 x_1, x_2 , 满足 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. 根据一元二次方程根与系数的

关系进行解答即可, 利用一元二次方程根与系数的关系, 求出两根之和与两根之积, 再代入所求表达式计算即可.

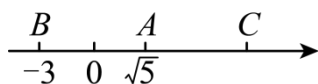
【详解】 解: $\because \alpha, \beta$ 是方程 $x^2 - 2x - 5 = 0$ 的两个实数根,

$\therefore \alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -5$,

$\therefore \alpha + \beta - \alpha\beta = 2 - (-5) = 7$.

故答案为: 7.

15. 如图, 在数轴上, 点 B 与点 C 关于点 A 对称, A, B 两点对应的实数分别是 $\sqrt{5}$ 和 -3 , 那么点 C 所对应的实数是_____.



【答案】 $2\sqrt{5} + 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了数轴上两点间的距离, 对称的性质, 熟练掌握两点间的距离公式是解题的关键. 设点 C 表示的数为 x , 根据两点间的距离公式可得到 $x - \sqrt{5} = \sqrt{5} - (-3)$, 求解即可得到答案.

【详解】 解: 设点 C 表示的数为 x ,

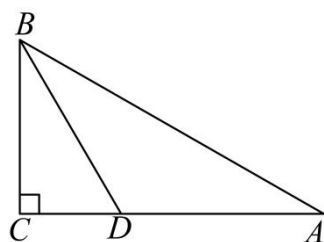
根据题意，得 $x - \sqrt{5} = \sqrt{5} - (-3)$ ，

解得 $x = 2\sqrt{5} + 3$ ，

$\therefore$ 点 C 所对应的实数为 $2\sqrt{5} + 3$ ，

故答案为： $2\sqrt{5} + 3$ 。

16. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， BD 平分 $\angle CBA$ ，且交 AC 于点 D ， $AC = 1$ ，那么 AD 的长是_____。



【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了含 30° 角的直角三角形的性质、角平分线定义以及等腰三角形的判定等知识，熟练掌握含 30° 角的直角三角形的性质和等腰三角形的判定是解题的关键。由直角三角形的性质和角平分线定义得 $\angle CBD = \angle ABD = 30^\circ = \angle A$ ，则 $BD = 2CD$ ， $AD = BD = 2CD$ ，得 $AC = 3CD$ ，再求出 $CD = \frac{1}{3}$ ，即可得出结论。

【详解】 解： $\because \angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$ ，

$\because BD$ 平分 $\angle CBA$ ，

$\therefore \angle CBD = \angle ABD = 30^\circ = \angle A$ ，

$\therefore BD = 2CD$ ， $AD = BD = 2CD$ ，

$\therefore AC = 3CD$ ，

$\because AC = 1$ ，

$\therefore CD = \frac{1}{3}$ ，

$\therefore AD = AC - CD = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

故答案为： $\frac{2}{3}$ 。

17. 如果一元二次方程的两根相差 1，那么该方程称为“差 1 方程”。例如 $x^2 + x = 0$ 是“差 1 方程”。已

知关于 x 的方程 $x^2 - (m-1)x - m = 0$ (m 是常数) 是“差 1 方程”，则 m 的值为_____

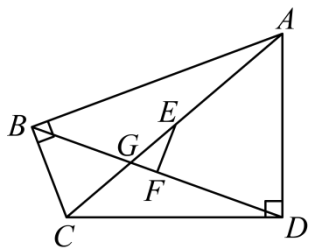
【答案】 -2 或 0 或 -2

【解析】

【分析】 本题考查根与系数的关系． 设方程的两个根为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)， 由题意， 得：
 $x_1 + x_2 = m-1, x_1 x_2 = -m$ ， $x_2 - x_1 = 1$ ， 利用完全平方公式的变形式进行计算即可．

【详解】 解： 设方程的两个根为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)， 由题意， 得： $x_1 + x_2 = m-1, x_1 x_2 = -m$ ， $x_2 - x_1 = 1$ ，
 $\therefore (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = (m-1)^2 + 4m = 1$ ，
解得： $m = -2$ 或 $m = 0$ ，
故答案为： -2 或 0 ．

18. 如图， 四边形 $ABCD$ 中， AC ， BD 相交于点 G ， $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ， E 、 F 分别是 AC 、 BD 的中点， $\angle BAC = 15^\circ$ ， $BG = EG$ ， 则 $\frac{EF}{AC}$ 的值为_____．

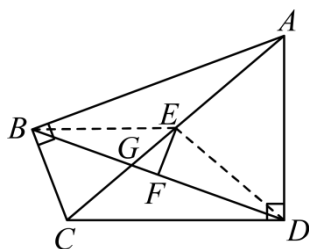


【答案】 $\frac{1}{4}$ 或 0.25

【解析】

【分析】 本题主要考查了等腰三角形的性质， 直角三角形的性质， 三角形外角的性质， 作出辅助线， 熟练掌握相关的判定和性质， 是解题的关键． 连接 BE 、 DE ， 根据直角三角形斜边中线等于斜边的一半， 得出 $BE = AE = \frac{1}{2}AC$ ， $DE = \frac{1}{2}AC$ ， 根据等腰三角形的性质得出 $\angle ABE = \angle BAC = 15^\circ$ ， 根据三角形外角的性质得出 $\angle BEG = \angle ABE + \angle BAC = 30^\circ$ ， 根据直角三角形的性质得出 $EF = \frac{1}{2}BE$ ， 即可得出答案．

【详解】 解： 连接 BE 、 DE ， 如图所示：



$\because \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, E 是 AC 的中点,

$$\therefore BE = AE = \frac{1}{2}AC, \quad DE = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore BE = DE, \quad \angle ABE = \angle BAC = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle BEG = \angle ABE + \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore BG = EG,$$

$$\therefore \angle EBG = \angle BEG = 30^\circ,$$

$\because BE = DE$, F 是 BD 的中点,

$$\therefore EF \perp BD,$$

$$\therefore \angle BFE = 90^\circ,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}BE,$$

$$\because BE = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{4}AC,$$

$$\therefore \frac{EF}{AC} = \frac{1}{4}.$$

故答案为: $\frac{1}{4}$.

三、解答题: (共 58 分)

19. 计算:

$$(1) \frac{1}{\sqrt{3}-2} - 4\sqrt{\frac{1}{2}} + (\sqrt{48} - \sqrt{24}) \div \sqrt{6};$$

$$(2) a\sqrt{8a} - 2a^2\sqrt{\frac{1}{8a}} + 3\sqrt{2a^3}.$$

【答案】 (1) $-\sqrt{3}-4$

(2) $\frac{9}{2}a\sqrt{2a}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算, 利用二次根式的性质化简, 熟练掌握运算法则是解题的关键.

(1) 分别进行分母有理化, 二次根式的除法运算, 以及化简二次根式, 然后进行加减计算;

(2) 先利用二次根式的性质化简, 再进行加减计算.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}
 \text{解: } & \frac{1}{\sqrt{3}-2} - 4\sqrt{\frac{1}{2}} + (\sqrt{48} - \sqrt{24}) \div \sqrt{6} \\
 & = -\sqrt{3} - 2 - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{8} - \sqrt{4} \\
 & = -\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2 \\
 & = -\sqrt{3} - 4;
 \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}
 \text{解: } & a\sqrt{8a} - 2a^2\sqrt{\frac{1}{8a}} + 3\sqrt{2a^3} \\
 & = a \times 2\sqrt{2a} - 2a^2\sqrt{\frac{2a}{16a^2}} + 3a\sqrt{2a} \\
 & = 2a\sqrt{2a} - 2a^2 \times \frac{\sqrt{2a}}{4a} + 3a\sqrt{2a} \\
 & = 2a\sqrt{2a} - \frac{a}{2}\sqrt{2a} + 3a\sqrt{2a} \\
 & = \frac{9}{2}a\sqrt{2a}.
 \end{aligned}$$

$$20. (1) \text{ 解方程: } \frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = 1;$$

$$(2) \text{ 解方程: } \frac{y+1}{y^2-1} - \frac{1}{3y} = \frac{1}{3y-3}.$$

【答案】(1) $x = -4$; (2) 无解

【解析】

【分析】本题考查了解分式方程，能把分式方程转化成整式方程是解此题的关键．注意：解分式方程要检验．

(1) 方程两边同时乘 $x(x-2)$ ，化简转化为一元二次方程，并求出 x 的值，再检验即可．

(2) 现将方程进行整理化简，再将方程两边同时乘 $3y(y-1)$ ，化简并转化为一元一次方程，求出 y 的值，再检验即可．

$$\text{【详解】解: (1) } \frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = 1,$$

方程两边同时乘 $x(x-2)$ ，得，

$$2x^2 - 8 = x^2 - 2x$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x-2)(x+4) = 0$$

解得 $x_1 = 2$, $x_2 = -4$

检验: 当 $x = 2$ 时, 分母 $x(x-2) = 0$, 舍去, $x = -4$ 时 $x(x-2) \neq 0$,

$\therefore$ 原方程的解为 $x = -4$;

$$(2) \text{ 解: } \frac{y+1}{y^2-1} - \frac{1}{3y} = \frac{1}{3y-3},$$

$$\text{整理得 } \frac{1}{y-1} - \frac{1}{3y} = \frac{1}{3(y-1)}$$

方程两边同时乘 $3y(y-1)$, 得

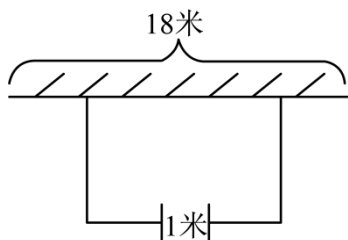
$$3y - (y-1) = y,$$

解得 $y = -1$,

检验: 当 $y = -1$ 时, $y^2 - 1 = 0$,

$\therefore$ 原方程无解.

21. 如图, 现有一个面积为 160 平方米的长方形养鸡场, 鸡场的一边靠墙 (墙长 18 米), 另三边用竹篱笆围成, 在与墙平行的一边, 开一扇 1 米宽的门. 如果竹篱笆的长为 35 米, 求这个长方形养鸡场与墙垂直的边长是多少? 与墙平行的边长是多少? (列方程解答)



【答案】 这个长方形养鸡场与墙垂直的边长是 10 米, 则与墙平行的边长是 16 米

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的实际应用, 设这个长方形养鸡场与墙垂直的边长是 x 米, 则与墙平行的边长是 $(36 - 2x)$ 米, 再根据长方形面积计算公式建立方程求解即可.

【详解】 解: 设这个长方形养鸡场与墙垂直的边长是 x 米, 则与墙平行的边长是 $35 - 2x + 1 = (36 - 2x)$ 米,

由题意得, $x(36-2x)=160$,

整理得 $x^2-18x+80=0$,

解得 $x=8$ 或 $x=10$,

当 $x=10$ 时, $36-2x=16<18$, 符合题意;

当 $x=8$ 时, $36-2x=20>18$, 不符合题意;

$\therefore x=10$, $36-2x=16$,

答: 这个长方形养鸡场与墙垂直的边长是 10 米, 则与墙平行的边长是 16 米.

22. 为加强防汛工作, 市工程队准备对苏州河一段长为 2240 米的河堤进行加固, 由于采用新的加固模式, 现在计划每天加固的长度比原计划增加了 20 米, 因而完成此段加固工程所需天数将比原计划缩短 2 天, 为进一步缩短该段加固工程的时间, 如果要求每天加固 224 米, 那么在现在计划的基础上, 每天加固的长度还要再增加多少米?

【答案】每天加固的长度还要再增加 64 米

【解析】

【分析】设现在计划每天加固的长度为 x 米, 则原计划每天加固的长度为 $(x-20)$ 米, 根据“现计划比原计划所需天数缩短 2 天”列分式方程, 即可求解.

【详解】解: 设现在计划每天加固的长度为 x 米,

由题意知: $\frac{2240}{x}+2=\frac{2240}{x-20}$,

整理可得: $x^2-20x-22400=0$,

解得 $x_1=160$, $x_2=-140$ (舍),

经检验, $x=160$ 是所列分式方程的解,

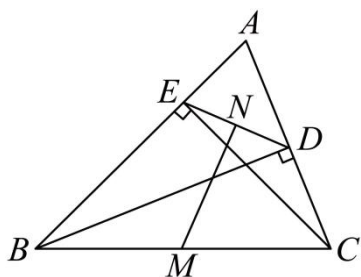
即现在计划每天加固的长度为 160 米,

$224-160=64$ (米),

因此每天加固的长度还要再增加 64 米.

【点睛】本题考查分式方程的实际应用、解一元二次方程, 解题的关键是根据所给等量关系列出分式方程, 求出解后注意检验.

23. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $BD \perp AC$ 于 D , $CE \perp AB$ 于 E , M , N 分别是 BC , DE 的中点.



(1) 求证: $MN \perp DE$;

(2) 若 $BC=10$, $DE=6$, 求 $\triangle MDE$ 的周长.

【答案】(1) 见解析 (2) 16

【解析】

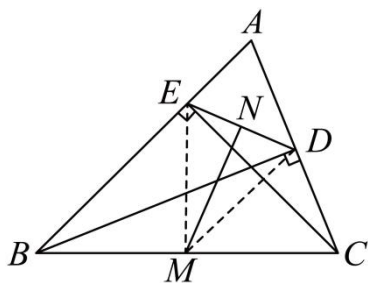
【分析】本题综合考查了直角三角形斜边上的中线定理;

(1) 由直角三角形, 线段中点的条件和定理“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”得到辅助线作法, 连接 ME 、 MD , 进而得到等腰三角形, 再根据定理“三线合一”即可证明 $MN \perp DE$.

(2) 根据“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”可得 $DM = EM = \frac{1}{2}BC = 5$, 根据三角形的周长公式即可求解.

【小问 1 详解】

证明: 如图, 连接 ME 、 MD ,



$\because BD \perp AC$,

$\therefore \angle BDC = 90^\circ$,

$\because M$ 是 BC 的中点,

$\therefore DM = \frac{1}{2}BC$

同理可得 $EM = \frac{1}{2}BC$,

$\therefore DM = EM$

$\because N$ 是 DE 的中点,

$\therefore MN \perp DE$;

【小问2详解】

$\because BC = 10, ED = 6$,

$$\therefore DM = EM = \frac{1}{2}BC = 5,$$

$\therefore \triangle MDE$ 的周长为 $MD + ME + DE = 5 + 5 + 6 = 16$.

24. 配方法是初中数学中重要的代数变形方法, 通过将二次三项式

$x^2 + bx + c$ 变形为 $(x + m)^2 + n$ 的形式 (m, n 为常数), 结合平方具有非负性, 即 $(x + m)^2 \geq 0$ 就可以解决

很多问题, 例如: 把多项式 $x^2 - 2x + 3$ 配方为:

$$x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + 3 = (x - 1)^2 + 2$$

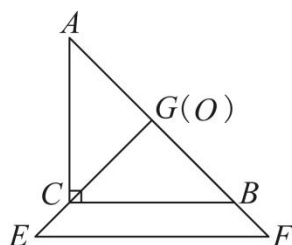


图1

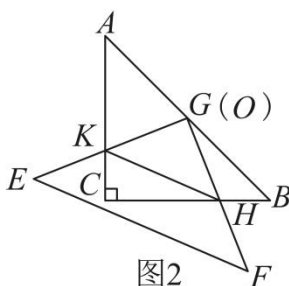


图2

(1) 基础小试: 把多项式 $x^2 + 4x + 6$ 配方成 $(x + m)^2 + n$ 的形式, 则 $m = \underline{\hspace{1cm}}$, $n = \underline{\hspace{1cm}}$;

(2) 几何实践: 把两个全等的等腰直角三角板 ABC 和 EFG 叠放在一起 (如图 1), 两直角三角板的直角边长均为 4, 且使三角板 EFG 的直角顶点 G 与三角板 ABC 的斜边中点 O 重合, 现将三角板 EFG 绕 O 点按顺时针方向旋转 (旋转角 α 满足条件: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$), 四边形 $CHGK$ 是旋转过程中两三角板的重叠部分 (如图 2). 连接 HK , 在上述旋转过程中, 求出 $\triangle GKH$ 面积的最小值.

(3) 拓展运用: 已知正整数 a, b, c 满足不等式 $a^2 + b^2 + c^2 + 36 < ab + 6b + 10c$, 求 $a + b + c$ 的值.

【答案】(1) 2, 2

(2) 2 (3) 11

【解析】

【分析】本题考查了完全平方公式、三角形全等的判定与性质、直角三角形斜边上的中线的性质等知识, 熟练掌握完全平方公式的应用是解题关键.

(1) 根据完全平方公式将式子变形为 $x^2 + 4x + 4 + 2$, 由此即可得;

(2) 连接 OC , 先证出 $\triangle COK \cong \triangle BOH$, 根据全等三角形的性质可得 $CK = BH$, $S_{\triangle COK} = S_{\triangle BOH}$, 则可

得 $S_{\text{四边形}CHGK} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = 4$ ，再设 $CK = BH = x (0 < x < 4)$ ，则 $CH = 4 - x$ ，根据

$S_{\triangle GKH} = S_{\text{四边形}CHGK} - S_{\triangle CHK} = 4 - S_{\triangle CHK}$ 和完全平方公式进行配方解答即可得；

(3) 先配方得 $\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}(b-4)^2 + (c-5)^2 < 1$ ，再根据 a, b, c 都是正整数可得 $c = 5$ ， $b = 3$ 或 $b = 4$

或 $b = 5$ ，然后根据 b 的值确定 a 的值，由此即可得。

【小问 1 详解】

解： $x^2 + 4x + 6$

$$= x^2 + 4x + 4 + 2$$

$$= (x+2)^2 + 2,$$

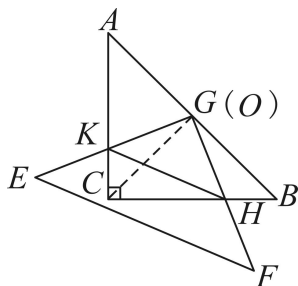
$\therefore$ 把多项式 $x^2 + 4x + 6$ 配方成 $(x+m)^2 + n$ 的形式，

$$\therefore m = 2, n = 2,$$

故答案为： 2， 2.

【小问 2 详解】

解： 如图，连接 OC ，



$\therefore$ 点 O 是等腰直角三角板 ABC 斜边的中点，三角形的直角边长均为 4，

$$\therefore OC = OB, \angle OCK = \frac{1}{2}\angle ACB = 45^\circ, \angle A = \angle B = 45^\circ, OC \perp AB, AC = BC = 4,$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8,$$

$$\therefore \angle OCK = \angle B, \angle COF + \angle BOH = 90^\circ,$$

$\therefore$ 三角板 EFG 的直角顶点 G 与三角板 ABC 的斜边中点 O 重合，

$$\therefore \angle EGF = \angle EOF = \angle COF + \angle COK = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle COK = \angle BOH,$$

在 $\triangle COK$ 和 $\triangle BOH$ 中，

$$\begin{cases} \angle COK = \angle BOH \\ OC = OB \\ \angle OCK = \angle B \end{cases},$$

$$\therefore \triangle COK \cong \triangle BOH (\text{ASA}),$$

$$\therefore CK = BH, \quad S_{\triangle COK} = S_{\triangle BOH},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}CHGK} = S_{\triangle COK} + S_{\triangle COH} = S_{\triangle BOH} + S_{\triangle COH} = S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = 4,$$

$$\text{设 } CK = BH = x (0 < x < 4), \text{ 则 } CH = BC - BH = 4 - x,$$

$$\therefore S_{\triangle CHK} = \frac{1}{2} CK \cdot CH = \frac{1}{2} x(4-x) = -\frac{1}{2} x^2 + 2x,$$

$$\therefore S_{\triangle GKH} + S_{\triangle CHK} = S_{\text{四边形}CHGK} = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle GKH} = 4 - S_{\triangle CHK}$$

$$= 4 - \left(-\frac{1}{2} x^2 + 2x \right)$$

$$= \frac{1}{2} x^2 - 2x + 4$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 - 4x + 4 - 4) + 4$$

$$= \frac{1}{2} [(x-2)^2 - 4] + 4$$

$$= \frac{1}{2} (x-2)^2 - 2 + 4$$

$$= \frac{1}{2} (x-2)^2 + 2,$$

$$\therefore (x-2)^2 \geq 0,$$

$$\therefore \frac{1}{2} (x-2)^2 + 2 \geq 2, \text{ 当且仅当 } x=2 \text{ 时, 等号成立,}$$

$$\therefore \triangle GKH \text{ 面积的最小值为 } 2.$$

【小问3 详解】

$$\text{解: } \because a^2 + b^2 + c^2 + 36 < ab + 6b + 10c,$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 + 36 - ab - 6b - 10c < 0,$$

$$\therefore \left(a^2 - ab + \frac{1}{4} b^2 \right) + \frac{3}{4} (b^2 - 8b + 16) + (c^2 - 10c + 25) < 1,$$

$$\therefore \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}(b-4)^2 + (c-5)^2 < 1,$$

$$\because a, b, c \text{ 都是正整数, 且 } \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 \geq 0, \frac{3}{4}(b-4)^2 \geq 0, (c-5)^2 \geq 0,$$

$$\therefore c-5=0, \text{ 即 } c=5,$$

$$\therefore \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}(b-4)^2 < 1,$$

$$\therefore b-4=0 \text{ 或 } b-4=1 \text{ 或 } b-4=-1, \text{ 即 } b=4 \text{ 或 } b=5 \text{ 或 } b=3,$$

$$\text{当 } b=3 \text{ 时, 则 } \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} < 1, \text{ 即 } \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}, \text{ 此时没有符合条件的正整数 } a;$$

$$\text{当 } b=4 \text{ 时, 则 } (a-2)^2 < 1, \text{ 此时符合条件的正整数 } a=2;$$

$$\text{当 } b=5 \text{ 时, 则 } \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} < 1, \text{ 即 } \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}, \text{ 此时没有符合条件的正整数 } a;$$

$$\text{综上, } a=2, b=4, c=5,$$

$$\therefore a+b+c=2+4+5=11.$$