

上海市建平中学西校 2025-2026 学年上学期 9 月月考八年级数学试卷

一、选择题 (本大题共 6 题)

1. 下面说法正确的是 ()

A. -1 的平方根是 -1

B. 若 $x^2 = 9$, 则 $x = 3$;

C. 6 是 $(-6)^2$ 的算术平方根

D. 10^{-6} 没有平方根

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了平方根, 算术平方根, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

根据平方根, 算术平方根的定义计算即可.

【详解】解: A、负数没有平方根, 故选项错误, 不符合题意;

B、若 $x^2 = 9$, 则 $x = \pm 3$, 故选项错误, 不符合题意;

C、 $(-6)^2 = 36$, 6 是 36 的算术平方根, 故选项正确, 符合题意;

D、 10^{-6} 的平方根是 $\pm 10^{-3}$, 故选项错误, 不符合题意;

故选: C.

2. 下列运算中, 计算错误的有 ()

① $\sqrt{1\frac{25}{144}} = 1\frac{5}{12}$; ② $\sqrt{(-4)^2} = \pm 4$; ③ $\sqrt{-2^2} = -\sqrt{2^2} = -2$; ④ $\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{25}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$.

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查二次根式的计算, 熟练掌握二次根式的运算法则是解决此题的关键. 逐一分析各运算的正确性即可.

【详解】①: $\sqrt{1\frac{25}{144}}$

将带分数化为假分数: $1\frac{25}{144} = \frac{169}{144}$, 故 $\sqrt{\frac{169}{144}} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$. 原式结果为 $1\frac{5}{12}$, 错误;

②: $\sqrt{(-4)^2}$

算术平方根的非负性: $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{4^2} = 4$. 原式结果为 ± 4 , 错误;

③: $\sqrt{-2^2}$

$-2^2 = -4 < 0$, $\sqrt{-4}$ 在实数范围内无意义, 无法计算, 故错误;

④: $\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{25}}$

$\frac{1}{16} + \frac{1}{25} = \frac{41}{400}$, $\sqrt{\frac{41}{400}} = \frac{\sqrt{41}}{20} \neq \frac{9}{20}$, 故错误;

综上, 错误个数为 4,

故选: D.

3. 下列各组二次根式中, 属于同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{12}$ 与 $\sqrt{18}$

B. $\sqrt{\frac{16}{3}}$ 与 $\sqrt{\frac{2}{3}}$

C. $\sqrt{0.5}$ 与 $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{32x^3}$ 与 $\sqrt{2x}$

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了同类二次根式, 熟练掌握同类二次根式的定义是解本题的关键.

各式化简后, 利用同类二次根式定义判断即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, 不符合题意;

B、 $\sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 不符合题意;

C、 $\sqrt{0.5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{5}$, 不符合题意;

D、 $\sqrt{32x^3} = 4x\sqrt{2x}$, $\sqrt{2x}$, 符合题意,

故选: D.

4. 2025 年“五一”假期, 济南市图书馆推出全民阅读文化市集、集邮展销等活动, 累计接待读者 96110 人次, 数据 96110 用科学记数法表示为 ()

A. 9.611×10^3

B. 96.11×10^3

C. 9.611×10^4

D. 0.961×10^5

【答案】C

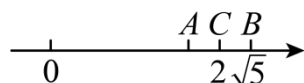
【解析】

【分析】本题主要考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同.

【详解】解: $96110 = 9.611 \times 10^4$,

故选:C.

5. 如图, 数轴上表示 2, $\sqrt{5}$ 的点分别为点 C, 点 B, 点 C 是线段 AB 的中点, 则点 A 表示的数 ()



- A. $-\sqrt{5}$ B. $2 - \sqrt{5}$ C. $\sqrt{5} - 2$ D. $4 - \sqrt{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了实数与数轴, 以及两点之间的距离公式. 数轴上的点与实数一一对应, 根据 C 是线段 AB 的中点, 可得 $CB = CA$, 用 C 点表示的数减去 CB 的距离, 可得 A 点表示的数.

【详解】解: $\because$ 点 C 是线段 AB 的中点,

$$\therefore CB = CA = \sqrt{5} - 2,$$

$$\therefore \text{点 A 表示的数是: } 2 - (\sqrt{5} - 2) = 4 - \sqrt{5},$$

故选: D.

6. 已知 x 是实数, 且 $(x-2)(x-3)\sqrt{1-x} = 0$, 则 $x^2 + x + 1$ 的值为 ()

- A. 13 B. 7 C. 3 D. 13 或 7 或 3

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了二次根式有意义的条件. 根据二次根式有意义的条件得到 $x \leq 1$, x 是实数, 且 $(x-2)(x-3)\sqrt{1-x} = 0$, 得到 $x = 2$ 或 $x = 3$ 或 $x = 1$, 则 $x = 1$, 代入代数式求值即可.

【详解】解: $\because$ 要使 $(x-2)(x-3)\sqrt{1-x}$ 有意义,

$$\therefore 1 - x \geq 0,$$

$$\therefore x \leq 1,$$

$$\because x \text{ 是实数, 且 } (x-2)(x-3)\sqrt{1-x} = 0,$$

$$\therefore x-2=0 \text{ 或 } x-3=0 \text{ 或 } \sqrt{1-x}=0,$$

$$\therefore x=2 \text{ 或 } x=3 \text{ 或 } x=1,$$

$$\therefore x=1,$$

$$\therefore x^2+x+1=1^2+1+1=3,$$

故选 C

二、填空题 (本大题共 12 题)

7. $\sqrt{25}$ 的平方根是_____.

【答案】 $\pm\sqrt{5}$

【解析】

【详解】 分析：根据平方运算，可得平方根、算术平方根.

详解： $\sqrt{25}$ 的平方根是 $\pm\sqrt{5}$.

故答案为 $\pm\sqrt{5}$.

点睛：本题考查了算术平方根. 平方运算是求平方根的关键.

8. 平方根与立方根相同的数是_____.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题主要考查了平方根和立方根，

根据平方根和立方根的定义解答即可.

【详解】 解：因为正数的平方根有两个，互为相反数，任何实数都有一个立方根，

所以正数的平方根和立方根不能相同.

因为负数没有平方根，

所以负数的平方根和立方根不能相同.

只有 0 的平方根是 0，立方根是 0.

故答案为：0.

9. 计算： $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$ =_____.

【答案】 0.75

【解析】

【分析】根据立方根的运算即可得.

【详解】 $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4} = 0.75$

故答案为: 0.75.

【点睛】本题考查了立方根的运算, 熟记运算法则是解题关键.

10. 比较大小 (用 “>”、“<”、“=” 连接): $-3\sqrt{3}$ _____ $-2\sqrt{7}$

【答案】>

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的大小比较, 根据二次根式的性质可得 $-3\sqrt{3} = -\sqrt{27}$, $-2\sqrt{7} = -\sqrt{28}$, 再比较 $-\sqrt{27}$ 与 $-\sqrt{28}$ 的大小即可得出结论.

【详解】解: $-3\sqrt{3} = -\sqrt{27}$, $-2\sqrt{7} = -\sqrt{28}$,

$$\because \sqrt{27} < \sqrt{28},$$

$$\therefore -\sqrt{27} > -\sqrt{28},$$

$$\therefore -3\sqrt{3} > -2\sqrt{7}.$$

故答案为: >.

11. 已知 $m < 0$, 化简: $|m| + \sqrt{m^2} - \sqrt[3]{m^3} =$ _____

【答案】 $-3m$

【解析】

【分析】本题考查了绝对值的化简, 二次根式的性质, 立方根的化简, 熟练掌握运算法则是解题的关键. 根据运算法则逐一化简再运算即可.

【详解】解: $\because m < 0$,

$$\therefore |m| + \sqrt{m^2} - \sqrt[3]{m^3} = -m - m - m = -3m.$$

故答案为: $-3m$.

12. 等式 $\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}} = \sqrt{\frac{x-2}{3-x}}$ 成立的条件是_____.

【答案】 $2 \leq x < 3$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的除法法则、二次根式有意义的条件、解一元一次不等式组，理解二次根式有意义的条件是关键．根据二次根式的除法法则 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 成立的条件： $a \geq 0$ 且 $b > 0$ ，即可确定．

【详解】 解：根据题意得：
$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 3-x > 0 \end{cases}$$

解得： $2 \leq x < 3$ ．

故答案为： $2 \leq x < 3$ ．

13. 若 $\sqrt{63n}$ 是整数，则正整数 n 的最小值是_____．

【答案】 7

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的化简，熟练掌握二次根式的性质是解题的关键．先将 $\sqrt{63n}$ 化简，再根据其是整数的条件，确定正整数 n 的最小值．

【详解】 解： $\sqrt{63n} = \sqrt{9 \times 7n} = 3\sqrt{7n}$ ．

因为 $\sqrt{63n}$ 是整数，

所以 $\sqrt{7n}$ 必须是整数．则 $7n$ 为完全平方数，正整数 n 的最小值为 7．

故答案为：7．

14. 下列各数：① 3.14159、② 0.33333...、③ $\sqrt{5} - \sqrt{7}$ 、④ π 、⑤ $\sqrt{2.25}$ 、⑥ $-\frac{2}{7}$ 、⑦ 0.3030003000003，

是无理数的是_____（填序号）

【答案】 ③④

【解析】

【分析】 本题考查了无理数的概念，二次根式的化简，掌握无理数是指无限不循环小数是解题的关键．根据无理数定义逐一判断即得．

【详解】 解：① 3.14159 是有理数；

② 0.33333... 是有理数；

③ $\sqrt{5} - \sqrt{7}$ 是无理数；

④ π 是无理数；

⑤ $\sqrt{2.25} = 1.5$ 是有理数；

⑥ $-\frac{2}{7}$ 是有理数;

⑦ 0.3030003000003 是有理数.

故答案为: ③④.

15. $5 + \sqrt{5}$ 的整数部分为 a , 小数部分为 b , 则 $b^2 - 3ab - a^2 =$ _____.

【答案】 $2 - 25\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 此题考查了无理数的大小的应用, 关键是确定 $5 + \sqrt{5}$ 的范围.

求出 $2 < \sqrt{5} < 3$, 推出 $7 < 5 + \sqrt{5} < 8$, 得到 a , 求出 b , 代入 $b^2 - 3ab - a^2$ 计算即可.

【详解】 解: $\because 4 < 5 < 9$,

$$\therefore 2 < \sqrt{5} < 3,$$

$$\therefore 7 < 5 + \sqrt{5} < 8,$$

$$\therefore a = 7,$$

$$\therefore b = 5 + \sqrt{5} - 7 = \sqrt{5} - 2,$$

$$\therefore b^2 - 3ab - a^2 = 9 - 4\sqrt{5} - 21\sqrt{5} + 42 - 49 = 2 - 25\sqrt{5}.$$

故答案为: $2 - 25\sqrt{5}$.

16. 当 x 的值为_____时, $4 - \sqrt{x^2 + 9}$ 的值最大, 这个最大值为_____.

【答案】 ①. 0 ②. 1

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的性质, 掌握 $\sqrt{a} \geq 0$ 是解题的关键,

当 $\sqrt{x^2 + 9}$ 最小时, $4 - \sqrt{x^2 + 9}$ 的值最大, 求出答案即可.

【详解】 解: 因为 $4 - \sqrt{x^2 + 9}$ 的值最大,

所以 $\sqrt{x^2 + 9}$ 最小时, 符合题意,

即当 $x = 0$ 时, $4 - \sqrt{x^2 + 9} = 4 - 3 = 1$, 此时 $4 - \sqrt{x^2 + 9}$ 的值最大,

所以当 x 的值为 0 时, $4 - \sqrt{x^2 + 9}$ 的值最大, 最大值为 1.

故答案为：0，1.

17. 设 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，例如 $[3.15]=3$ ， $[3.7]=3$ ， $[3]=3$ ，则

$$\left[\sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 3}\right] + \left[\sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 4}\right] + \left[\sqrt[3]{3 \cdot 4 \cdot 5}\right] + \cdots + \left[\sqrt[3]{2000 \cdot 2001 \cdot 2002}\right] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】2001000

【解析】

【分析】本题主要考查三次方根的整数部分的判断；掌握发现每个三次方根的整数部分与第一个乘数的关系是解题的关键。观察得出每个三次方根的整数部分等于其第一个乘数，再将这些整数部分从1到2000求和，计算得到结果。

【详解】解：依题意，得 $\left[\sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 3}\right] = 1$ ， $\left[\sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 4}\right] = 2$ ， $\left[\sqrt[3]{3 \cdot 4 \cdot 5}\right] = 3$ ， $\cdots$ $\left[\sqrt[3]{2000 \cdot 2001 \cdot 2002}\right] = 2000$ ，
所以， $\left[\sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 3}\right] + \left[\sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 4}\right] + \left[\sqrt[3]{3 \cdot 4 \cdot 5}\right] + \cdots + \left[\sqrt[3]{2000 \cdot 2001 \cdot 2002}\right]$
 $= 1 + 2 + 3 + \cdots + 2000 = 2001000$

故答案为：2001000.

18. 求值： $\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{2023^2} + \frac{1}{2024^2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $2023\frac{2023}{2024}$

【解析】

【分析】本题主要考查了二次根式的化简以及裂项相消法求和，熟练掌握二次根式的性质和裂项相消的方法是解题的关键。

先对每一项的根式进行化简，找出规律，再将所有项相加求和即可。

【详解】解： $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$

$$= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 + n^2}{n^2(n+1)^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{[n(n+1)]^2 + 2n^2 + 2n + 1}{n^2(n+1)^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{[n(n+1)]^2 + 2n(n+1) + 1}{n^2(n+1)^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{[n(n+1)+1]^2}{n^2(n+1)^2}} \\
&= \frac{n(n+1)+1}{n(n+1)} \\
&= 1 + \frac{1}{n(n+1)} \\
&= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \\
&\therefore \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{2023^2} + \frac{1}{2024^2}} \\
&= \left(1 + 1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}\right) \\
&= 2023 \times 1 + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}\right) \\
&= 2023 + 1 - \frac{1}{2024} \\
&= 2024 - \frac{1}{2024} \\
&= 2023 \frac{2023}{2024},
\end{aligned}$$

故答案为： $2023 \frac{2023}{2024}$.

三、计算题（本大题共 6 题）

19. 计算： $2\sqrt{12} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} + 3\sqrt{48}$

【答案】 $14\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 先将每个二次根式化成最简二次根式后再根据二次根式的加减计算法则进行求解即可.

【详解】 解： $2\sqrt{12} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} + 3\sqrt{48}$

$$= 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 12\sqrt{3}$$

$$= 14\sqrt{3}.$$

【点睛】 本题主要考查了二次根式的加减法，进行二次根式的加减，一定要将每个二次根式都化成最简二次根式后再合并同类二次根式，这是解决此类问题的关键.

20. 计算: $\left| -\sqrt{5\frac{4}{9}} \right| - \sqrt[3]{2\frac{10}{27}} + \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}}$

【答案】 $\frac{17}{12}$

【解析】

【分析】 本题考查实数的混合运算，立方根求值，绝对值化简，平方根求解等. 先将每项化简，再从左到右计算即可.

【详解】 解: 原式 $= \left| -\sqrt{\frac{49}{9}} \right| - \sqrt[3]{\frac{64}{27}} + \sqrt{\frac{25}{144}}$,

$$= \frac{7}{3} - \frac{4}{3} + \frac{5}{12},$$
$$= 1 + \frac{5}{12},$$
$$= \frac{17}{12}.$$

21. 解方程: $\frac{32}{81} - 2(x+1)^4 = 0$

【答案】 $x = -\frac{1}{3}$ 或 $x = -\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了利用平方根解方程，熟练掌握平方根的定义是解题的关键. 利用平方根的性质求解方程即可.

【详解】 解: $\frac{32}{81} - 2(x+1)^4 = 0$

$$-2(x+1)^4 = -\frac{32}{81}$$
$$(x+1)^4 = \frac{16}{81}$$
$$x+1 = \pm \frac{2}{3}$$
$$\therefore x = -\frac{1}{3} \text{ 或 } x = -\frac{5}{3}.$$

22. 计算: $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} - \sqrt[3]{-27}$

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质，熟练掌握运算法则是解题的关键.

根据二次根式的性质化简求值即可.

【详解】 解: $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} - \sqrt[3]{-27}$

$$= \sqrt{3} - 1 + 2 - \sqrt{3} + 3$$

$$= 5 - 1$$

$$= 4.$$

23. 化简: $\sqrt{\frac{(a+2)^5}{(a-2)^3}} (a > 2).$

【答案】 $\left(\frac{a+2}{a-2}\right)^2 \sqrt{a^2-4}$

【解析】

【分析】 本题考查分式的化简，利用 $\sqrt{a^2} = |a|$ 进行化简即可.

【详解】 解: $\because a > 2,$

$$\therefore a+2 > 0, a-2 > 0,$$

$$\therefore \text{原式} = \sqrt{\frac{(a+2)^5}{(a-2)^3}} = \sqrt{\frac{(a+2)^4}{(a-2)^4} \cdot (a+2)(a-2)} = \left(\frac{a+2}{a-2}\right)^2 \sqrt{a^2-4}.$$

24. 已知 $a > b$ ，化简二次根式: $\sqrt{-ab^3}$

【答案】 $-b\sqrt{-ab}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式化简. 根据题意利用二次根式性质可知 $a > 0, b < 0$ ，再利用二次根式非负性化简即可.

【详解】 解: $\because -ab^3 \geq 0, a > b,$

$$\therefore a > 0, b < 0,$$

$$\therefore \sqrt{-ab^3} = \sqrt{-ab^2 \cdot b} = -b\sqrt{-ab},$$

故答案为: $-b\sqrt{-ab}$.

四、解答题 (本大题共 5 题)

25. 已知一个数的两个不同的平方根是 $3a+1$ 和 $a+11$ ，求这个数的立方根.

【答案】这个数的立方根是4.

【解析】

【分析】本题考查了平方根和立方根的定义，由题意得 $3a+1+a+11=0$ ，解得 $a=-3$ ，求出这个数是64，然后利用立方根的定义即可求解，掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】解：∵一个数的两个不同的平方根是 $3a+1$ 和 $a+11$ ，

$$\therefore 3a+1+a+11=0, \text{ 解得: } a=-3,$$

$$\therefore \text{这个数是} (3a+1)^2 = [3 \times (-3)+1]^2 = 64,$$

$$\therefore \text{这个数的立方根是} \sqrt[3]{64} = 4.$$

26. 若最简二次根式 $\sqrt[3x-10]{2x+y-5}$ 和 $\sqrt{x-3y+11}$ 是同类二次根式，求 x 、 y 平方和的平方根.

【答案】 ± 5

【解析】

【分析】本题主要考查了同类二次根式的定义，求一个数的平方根，被开方数相同的最简二次根式叫做同类二次根式，据此可得方程组 $\begin{cases} 3x-10=2 \\ 2x+y-5=x-3y+11 \end{cases}$ ，解方程组求出 x 、 y 的值，再根据平方根的定义求解即可.

【详解】解：∵最简二次根式 $\sqrt[3x-10]{2x+y-5}$ 和 $\sqrt{x-3y+11}$ 是同类二次根式，

$$\therefore 3x-10=2, \quad 2x+y-5=x-3y+11,$$

$$\text{即} \begin{cases} 3x-10=2 \\ 2x+y-5=x-3y+11 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases},$$

$$\therefore x、y \text{ 的平方和为 } x^2 + y^2 = 16 + 9 = 25,$$

$$\therefore x、y \text{ 平方和的平方根为 } \pm 5.$$

27. 哪吒在镇压妖兽时，用“混天绫”围成一个面积为 400m^2 的正方形“封妖阵”，后因妖兽反噬，须将“封妖阵”调整为面积为 285m^2 的长方形，且长与宽之比为 $5:3$.

(1) “混天绫”的总长度是多少米？

(2) 哪吒的“混天绫”长度是否足够完成新阵法？请通过计算说明理由.

【答案】(1) 80m

(2) 能; 理由见解析

【解析】

【分析】 本题考查了平方根的应用, 无理数的估算, 正确理解题意是解题的关键.

(1) 根据平方根的意义即可求解;

(2) 根据题意列方程, 求出长方形的长与宽, 可得长方形的周长, 再经过估算即得答案.

【小问 1 详解】

解: $\because$ “混天绫” 围成一个面积为 400m^2 的正方形,

$\therefore$ 正方形的边长为 20m ,

$\therefore$ “混天绫” 的总长度 $20 \times 4 = 80\text{m}$.

答: “混天绫” 的总长度 80m .

【小问 2 详解】

解: 能, 理由如下:

设长方形的长为 $5x$ 米, 宽为 $3x$ 米,

依题意得 $5x \cdot 3x = 285$,

解得 $x = \sqrt{19}$ 或 $x = -\sqrt{19}$,

$\because x > 0$,

$\therefore x = \sqrt{19}$,

$\therefore$ 长方形的长为 $5\sqrt{19}$ 米, 宽为 $3\sqrt{19}$ 米,

$\therefore$ 长方形的周长为 $2 \times (5\sqrt{19} + 3\sqrt{19}) = 16\sqrt{19}$,

$\because 4 < \sqrt{19} < 5$,

$\therefore 64 < 16\sqrt{19} < 80$,

$\therefore$ 能够完成新阵法.

28. 一些含根号的式子可以写成另一个式子的平方, 如 $3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$. 设 $a + b\sqrt{2} = (m + n\sqrt{2})^2$ (其

中 a 、 b 、 m 、 n 均为正整数), 则有 $a + b\sqrt{2} = m^2 + 2n^2 + 2mn\sqrt{2}$, $\therefore a = m^2 + 2n^2$, $b = 2mn$. 这样可

以把部分 $a + b\sqrt{2}$ 的式子化为平方式的方法. 请你仿照上述的方法探索并解决下列问题:

(1) 当 a 、 b 、 m 、 n 均为正整数时, 若 $a + b\sqrt{3} = (m + n\sqrt{3})^2$, 用含 m 、 n 的式子分别表示 a 、 b , 得:

$a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 计算: $\sqrt{11+4\sqrt{7}} - \sqrt{16-6\sqrt{7}}$.

【答案】(1) $m^2 + 3n^2$, $2mn$

(2) $2\sqrt{7}-1$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的恒等变形, 弄清材料中解题的方法, 熟练掌握和灵活运用二次根式的相关运算法则是解题的关键.

(1) 根据 $a+b\sqrt{3} = (m+n\sqrt{3})^2 = m^2 + 2mn\sqrt{3} + 3n^2$, 比较对应项系数即可.

(2) 根据 $16-6\sqrt{7} = (m-n\sqrt{7})^2 = m^2 - 2mn\sqrt{7} + 7n^2$, 得 $\begin{cases} m^2 + 7n^2 = 16 \\ -2mn = -6 \end{cases}$; 根据

$11+4\sqrt{7} = (m+n\sqrt{7})^2 = m^2 + 2mn\sqrt{7} + 7n^2$ 得 $\begin{cases} m^2 + 7n^2 = 11 \\ 2mn = 4 \end{cases}$, 最后代入计算即可.

【小问 1 详解】

解: $\because a+b\sqrt{3} = (m+n\sqrt{3})^2 = m^2 + 2mn\sqrt{3} + 3n^2$,

$\therefore a = m^2 + 3n^2$, $b = 2mn$,

故答案为: $m^2 + 3n^2$, $2mn$.

【小问 2 详解】

解: $\because 11+4\sqrt{7} = (m+n\sqrt{7})^2 = m^2 + 2mn\sqrt{7} + 7n^2$,

$\therefore \begin{cases} m^2 + 7n^2 = 11 \\ 2mn = 4 \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \end{cases}$,

$\therefore 11+4\sqrt{7} = (2+\sqrt{7})^2$,

$\therefore \sqrt{11+4\sqrt{7}} = \sqrt{(2+\sqrt{7})^2} = 2+\sqrt{7}$,

$\therefore 16-6\sqrt{7} = (m-n\sqrt{7})^2 = m^2 - 2mn\sqrt{7} + 7n^2$,

$\therefore \begin{cases} m^2 + 7n^2 = 16 \\ -2mn = -6 \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} m=3 \\ n=1 \end{cases}$,

$$\therefore 16-6\sqrt{7} = (3-\sqrt{7})^2,$$

$$\therefore \sqrt{16-6\sqrt{7}} = \sqrt{(3-\sqrt{7})^2} = 3-\sqrt{7},$$

$$\therefore \sqrt{11+4\sqrt{7}} - \sqrt{16-6\sqrt{7}} = 2+\sqrt{7} - (3-\sqrt{7}) = 2\sqrt{7}-1.$$

29. 配方法是中学数学的重要方法, 用配方法可求最大(小)值. 对于任意正实数 a, b , 可作如下变形(提示:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab});$$

$$\therefore a+b = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2\sqrt{ab},$$

$$\text{又} \because (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0,$$

$$\therefore (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2\sqrt{ab} \geq 0 + 2\sqrt{ab}, \text{ 即 } a+b \geq 2\sqrt{ab}.$$

当且仅当 $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, 即 $a=b$ 时等号成立.



图1

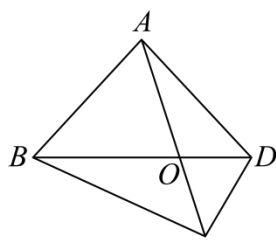


图2

(1) 若 $x > 0$, 代数式 $x + \frac{9}{x}$ 的最小值为_____, 此时 $x =$ _____.

(2) 某园林设计师要对园林的一个区域进行设计改造, 一面利用墙体将该区域用篱笆围成中间隔有一道篱笆的矩形花圃, 如图1所示, 为了围成面积为 108m^2 的花圃, 所用的篱笆至少为多少米?

(3) 如图2, 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , $\triangle AOB$ 、 $\triangle COD$ 的面积分别为 9 和 4, 求四边形 $ABCD$ 面积的最小值.

【答案】 (1) 6; 3 (2) 所用的篱笆至少为 36 米

(3) 四边形 $ABCD$ 面积的最小值为 25

【解析】

【分析】 本题考查了实数的大小比较、完全平方公式的运用, 用配方法求最值, 理解在 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (a, b 均为正实数) 中, 当且仅当 a, b 满足 $a=b$ 时, $a+b$ 有最小值 $2\sqrt{ab}$ 是解题的关键.

本题主要考查了完全平方公式的变形在求最值中的应用，正确理解题意并举一反三是解题关键；

(1) 依据题意，设 $a = x$ ， $b = \frac{9}{x}$ ，则由 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ，得 $x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = 6$ ，进而当且仅当 $x = \frac{9}{x}$ ，即 $x = 3$ 时，代数式取到最小值，最小值为 6，故可得解；

(2) 设花圃的宽为 x 米，则长为 $\frac{108}{x}$ 米，所用的篱笆 $= 3x + \frac{108}{x}$ ，据此即可求解；

(3) 设 $S_{\triangle COB} = m$ ，由三角形的面积公式可知，若两三角形底边上的高相等，则其面积比等于底边之比，由此可将 $S_{\triangle AOD}$ 表示出来．写出四边形 $ABCD$ 的面积表达式，利用题中结论求其最小值即可．

【小问 1 详解】

解：由题意，设 $a = x$ ， $b = \frac{9}{x}$ ，

$\therefore$ 由 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ，得 $x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = 6$ ，

$\therefore$ 当且仅当 $x = \frac{9}{x}$ ，即 $x = 3$ （负值舍去）时，代数式取到最小值，最小值为 6．

故答案为：6；3；

【小问 2 详解】

解：由题意，设花圃的宽为 x 米，则长为 $\frac{108}{x}$ 米，

$\therefore$ 所用的篱笆 $= 3x + \frac{108}{x}$ ，

又令 $a = 3x$ ， $b = \frac{108}{x}$ ，

$\therefore$ 由 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ，

$\therefore 3x + \frac{108}{x} \geq 2\sqrt{3x \cdot \frac{108}{x}} = 36$ ．

$\therefore$ 当且仅当 $3x = \frac{108}{x}$ ，即 $x = 6$ （负值舍去）时，代数式取到最小值，最小值为 36，

答：所用的篱笆至少为 36 米．

【小问 3 详解】

解：由题意，设 $S_{\triangle COB} = m$ ，

$\because \triangle COB$ 与 $\triangle COD$ 底边上的高相等， $\triangle AOB$ 与 $\triangle AOD$ 底边上的高相等，

$$\therefore \frac{OB}{OD} = \frac{S_{\triangle COB}}{S_{\triangle COD}} = \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOD}},$$

$$\therefore \frac{m}{4} = \frac{9}{S_{\triangle AOD}}.$$

$$\therefore S_{\triangle AOD} = \frac{36}{m}.$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = 9 + 4 + m + \frac{36}{m} = 13 + m + \frac{36}{m}.$$

$$\text{又} \because m + \frac{36}{m} \geq 2\sqrt{m \times \frac{36}{m}} = 12,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} \geq 13 + 12 = 25,$$

$$\therefore \text{当 } m = \frac{36}{m} \text{ 时, 即 } m = 6 \text{ (负值舍去) 时取等号.}$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 面积的最小值为 25.