

嘉一实验初级中学八上第一次阶段性测试

一、选择题 (6 小题, 每小题 2 分, 共 12 分)

1. 甲烷俗称瓦斯, 是天然气、沼气、坑气等的主要成分. 甲烷分子的直径为 0.000000000414m , 用科学记数法表示该数据为 ()

A. 0.414×10^{-9}

B. 4.14×10^{-10}

C. 4.14×10^{-9}

D. 4.14×10^{-8}

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了负整数指数科学记数法, 对于一个绝对值小于 1 的非 0 小数, 用科学记数法写成 $a \times 10^{-n}$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 是正整数, n 等于原数中第一个非 0 数字前面所有 0 的个数 (包括小数点前面的 0).

【详解】解: $0.000000000414 = 4.14 \times 10^{-10}$.

故选 B.

2. 实数 $\sqrt{10}$ 的值在 ()

A. 3 和 4 之间

B. 5 和 6 之间

C. 4 和 5 之间

D. 2 和 3 之间

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查估算算术平方根范围, 掌握夹逼法估算方法是解决问题的关键. 熟记算术平方根定义与求法, 找准要估算数平方后所对应的数左右两边能开尽方的数, 利用夹逼法求解即可得到答案.

【详解】解: $9 < 10 < 16$, 且 $\sqrt{9} = 3$ 、 $\sqrt{16} = 4$,

$$\therefore 3 < \sqrt{10} < 4,$$

即实数 $\sqrt{10}$ 的值在 3 和 4 之间,

故选: A.

3. 下列各式计算错误的是 ()

A. $\pm\sqrt{64} = \pm 8$

B. $-\sqrt{(-5)^2} = -5$

C. $\sqrt[3]{-216} = -6$

D. $\sqrt{-\frac{121}{225}} = -\frac{11}{15}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查平方根及立方根，熟练掌握相关性质及定义是解题的关键。利用平方根及立方根的定义逐项判断即可。

【详解】解：A. $\pm\sqrt{64} = \pm 8$ ，则不符合题意，

B. $-\sqrt{(-5)^2} = -\sqrt{25} = -5$ ，则不符合题意，

C. $\sqrt[3]{-216} = \sqrt[3]{-6^3} = -6$ ，则不符合题意，

D. $\sqrt{-\frac{121}{225}}$ 无意义，则符合题意，

故选：D.

4. 若最简二次根式 $\sqrt{2m-8}$ 与 $\sqrt{m+5}$ 可以合并，则 $\sqrt{3m+6}$ 的值是 ()。

A. $3\sqrt{3}$

B. $3\sqrt{5}$

C. $4\sqrt{5}$

D. $4\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查同类二次根式，化简二次根式，由最简二次根式 $\sqrt{2m-8}$ 与 $\sqrt{m+5}$ 可以合并，可知 $\sqrt{2m-8}$ 与 $\sqrt{m+5}$ 是同类二次根式，由此求出 m 的值，代入 $\sqrt{3m+6}$ 计算即可。

【详解】解：由题意知 $\sqrt{2m-8}$ 与 $\sqrt{m+5}$ 是同类二次根式，

$$\therefore 2m-8 = m+5,$$

解得 $m=13$ ，

$$\therefore \sqrt{3m+6} = \sqrt{3 \times 13 + 6} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5},$$

故选 B.

5. 如果 $ab > 0, a+b < 0$ ，那么下面各式正确的是 ()

A. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

B. $\sqrt{ab} \div \sqrt{\frac{a}{b}} = b$

C. $\sqrt{\frac{a}{b}} \times \sqrt{\frac{b}{a}} = 1$

D. $\sqrt{-b} \times \sqrt{\frac{a}{b}} = -\sqrt{a}$

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了二次根式的性质和乘除运算，熟练掌握运算法则是关键.

由条件 $ab > 0$ 且 $a + b < 0$ 可知， a 和 b 均为负数. 根据平方根的性质，需确保被开方数为非负数，且运算结果符号正确. 逐一分析选项即可.

【详解】解：∵ $ab > 0$ 说明 a 和 b 同号. $a + b < 0$ 进一步说明 a 和 b 均为负数.

A、 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 中， $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{b}$ 无意义（实数范围内），故选项错误；

B、 $\sqrt{ab} \div \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{\frac{a}{b}}} = \sqrt{b^2} = |b| = -b$ ，故选项错误；

C、 $\sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}} = \sqrt{1} = 1$ ，故选项正确；

D、 $\sqrt{-b} \times \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{(-b) \cdot \frac{a}{b}} = \sqrt{-a}$ ，故选项错误；

故选：C

6. 对于一个正实数 m ，我们规定：用符号 $\left[\sqrt{m} \right]$ 表示不大于 $\sqrt{m}$ 的最大整数（ $[m]$ 表示不大于 m 的最大整数），称 $\left[\sqrt{m} \right]$ 为 m 的根整数，如： $\left[\sqrt{4} \right] = 2$ ， $\left[\sqrt{10} \right] = 3$. 如果我们对 m 连续求根整数，直到结果为 1

为止. 例如：对 11 连续求根整数 2 次， $\left[\sqrt{11} \right] = 3 \rightarrow \left[\sqrt{3} \right] = 1$ ，这时候结果为 1. 现有如下四种说法：

① $\left[\sqrt{3} \right] + \left[\sqrt{6} \right] = \left[\sqrt{9} \right]$ ；② $\left[\sqrt{a} \right]^2 = \left[\left(\sqrt{a} \right)^2 \right]$ ；③若方程 $\left[\sqrt{12-x} \right] - \left[\sqrt{x-3} \right] = 1$ ，则满足条件的 x 的

整数值有 4 个；④只需进行 3 次连续求根整数运算后结果为 1 的所有正整数 m 中，最大值与最小值之差为

239. 其中正确说法的个数有（ ）

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查新定义“根整数”的理解与应用，涉及无理数的估算、二次根式及最值分析. 根据新定义再结合无理数的估算、二次根式及最值逐一验证各说法的正确性即可.

【详解】解：①：计算左边 $\left[\sqrt{3} \right] = 1$ ， $\left[\sqrt{6} \right] = 2$ ，和为 $1 + 2 = 3$ ；右边 $\left[\sqrt{9} \right] = 3$ ，等式成立. 故①正确.

②: $[\sqrt{a}]^2 = [(\sqrt{a})^2]$, 取反例 $a=2$, 左边 $[\sqrt{2}]^2 = 1^2 = 1$, 右边 $[(\sqrt{2})^2] = [2] = 2$, 显然 $1 \neq 2$. 故②

错误.

③: 方程 $[\sqrt{12-x}] - [\sqrt{x-3}] = 1$, x 为整数且 $3 \leq x \leq 12$.

逐一验证:

当 $x=4, 5, 6$ 时, 左边分别为 $2-1=1, 2-1=1, 2-1=1$, 满足条件;

其他 x 值均不满足. 故满足条件的 x 有 3 个, 而非 4 个. 故③错误.

④: 设正整数 m 进行 3 次连续求根整数运算后结果为 1, 即 $[\sqrt{m}] = m_1 \rightarrow [\sqrt{m_1}] = m_2 \rightarrow [\sqrt{m_2}] = 1$,

第三次操作时: $[\sqrt{m_2}] = 1$, 则 $1 \leq m_2 < 4$;

第二次操作时: $[\sqrt{m_1}] = m_2$, 则 $k^2 \leq m_2 < (k+1)^2$, 其中 $k=1, 2, 3$;

第一次操作时: $[\sqrt{m}] = m_1$, 则 $m_1^2 \leq m < (m_1+1)^2$.

排除提前终止的情况:

若 $k=1$, 则 $1 \leq m_1 < 4$, 对应 $m < 16$, 但这些 m 在 2 次操作内即可终止, 需排除;

若 $k=2$, 则 $4 \leq m_1 < 9$, 对应 $16 \leq m < 81$;

若 $k=3$, 则 $9 \leq m_1 < 16$, 对应 $81 \leq m < 256$;

$\therefore$ 需进行 3 次根整数运算结果为 1 的正整数 m 的范围为 $16 \leq m < 256$,

$\therefore m$ 的最大值为 255, 最小值为 16, 差值为 $255 - 16 = 239$. 故④正确.

综上, 正确说法为①④, 共 2 个.

故选: B.

二、填空题 (12 小题, 每小题 2 分, 共 24 分)

7. 在实数: $-\sqrt{2}$, 3.14159 , $\sqrt[3]{27}$, π , $1.010010001\cdots$, $\frac{1}{3}$ 中, 无理数有_____个.

【答案】3

【解析】

【分析】本题考查了无理数的识别, 无限不循环小数叫无理数, 初中范围内常见的无理数有三类: ① π 类, 如 2π , $\frac{\pi}{3}$ 等; ② 开方开不尽的数, 如 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ 等; ③ 虽有规律但却是无限不循环的小数, 如 $0.1010010001\cdots$

(两个 1 之间依次增加 1 个 0), $0.2121121112\cdots$ (两个 2 之间依次增加 1 个 1) 等, 据此可得答案.

【详解】解： $\sqrt[3]{27} = 3$ ，

在实数： $-\sqrt{2}$ ， 3.14159 ， $\sqrt[3]{27}$ ， π ， $1.010010001\cdots$ ， $\frac{1}{3}$ 中，无理数有 $-\sqrt{2}$ ， π ， $1.010010001\cdots$ ，共 3 个，

故答案为： 3.

8. a 是 9 的算术平方根， b 是 8 立方根， 则 $a+b =$ _____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 根据算术平方根的定义， 立方根的定义， 求得 $a=3, b=2$ ， 代入代数式， 即可求解.

【详解】 解： $\because a$ 是 9 的算术平方根， b 是 8 立方根，

$$\therefore a = \sqrt{9} = 3, b = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\therefore a + b = 3 + 2 = 5,$$

故答案为： 5.

【点睛】 本题考查了算术平方根的定义， 立方根的定义， 熟练掌握算术平方根的定义， 立方根的定义是解题的关键.

9. 比较大小： $\frac{\sqrt{5}-2}{2}$ _____ $\frac{1}{2}$ (填 “>”， “<” 或者 “=”).

【答案】 <

【解析】

【分析】 本题考查了实数的大小比较. 估算 $\sqrt{5}$ 的取值范围， 然后比较 $\sqrt{5}-2$ 与 1 的大小即可.

【详解】 解： $\because 4 < 5 < 9$ ，

$$\therefore 2 < \sqrt{5} < 3,$$

$$\therefore 0 < \sqrt{5} - 2 < 1,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}-2}{2} < \frac{1}{2}.$$

故答案为： <.

10. 某正数的两个不相等的平方根分别是 $a-2$ 和 $18+a$ ， 则 a 的立方根为_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题主要考查了平方根的定义，求一个数的立方根，列一元一次方程解决问题，解题的关键是熟练掌握平方根的定义.

根据平方根的定义列出 $a-2+18+a=0$ ，然后求解，再求立方根即可.

【详解】 解：根据平方根的性质得 $a-2+18+a=0$ ，
解得 $a=-8$ ，

$\therefore a$ 的立方根为： $\sqrt[3]{-8}=-2$ ，

故答案为： -2 .

11. 若 $(a+\sqrt{2})^2$ 与 $\sqrt{b+1}$ 互为相反数，则 $\frac{b}{a}$ 的值是_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查的是非负数的性质，根据相反数的概念列出算式，根据偶次方、算术平方根具有非负性分别求出 a 、 b ，计算即可.

【详解】 解：由题意得： $(a+\sqrt{2})^2 + \sqrt{b+1} = 0$ ，

则 $a+\sqrt{2}=0$ ， $b+1=0$ ，

解得： $a=-\sqrt{2}$ ， $b=-1$ ，

则 $\frac{b}{a} = \frac{-1}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

故答案为： $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. 已知 $\sqrt[3]{2.019} \approx 1.2639$ ， $\sqrt[3]{20.19} \approx 2.7230$ ，则 $\sqrt[3]{-0.002019} \approx$ _____.

【答案】 -0.12639

【解析】

【分析】 本题主要考查了立方根，正确掌握相关的定义与性质是解题的关键.
利用立方根的性质结合已知数据得出答案即可.

【详解】 解： $\because \sqrt[3]{2.019} \approx 1.2639$ ，

$\therefore \sqrt[3]{-0.002019} = \sqrt[3]{-\frac{1}{1000} \times 2.019}$

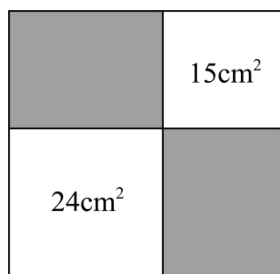
$= \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{10}\right)^3 \times \sqrt[3]{2.019}}$

$$= -\frac{1}{10} \times \sqrt[3]{2.019}$$

$$\approx -0.12639.$$

故答案为: -0.12639 .

13. 如图, 从大正方形中裁去面积为 15cm^2 和 24cm^2 的两个小正方形, 则阴影面积是_____.



【答案】 $12\sqrt{10}\text{cm}^2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的应用, 根据裁去的两个小正方形的面积可求出这两个小正方形的边长, 进而可求出大正方形的面积, 再用大正方形的面积减去裁去的两个小正方形的面积即可得到阴影面积.

【详解】 解: 由题意得, 裁去的两个小正方形的边长分别为 $\sqrt{15}\text{cm}$, $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}\text{cm}$,

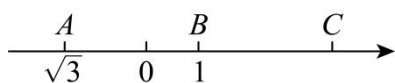
$\therefore$ 大正方形的边长为 $(\sqrt{15} + 2\sqrt{6})\text{cm}$,

$\therefore$ 大正方形的面积为 $(\sqrt{15} + 2\sqrt{6})^2 = 15 + 12\sqrt{10} + 24 = (39 + 12\sqrt{10})\text{cm}^2$,

$\therefore$ 阴影面积为 $39 + 12\sqrt{10} - 15 - 24 = 12\sqrt{10}(\text{cm}^2)$,

故答案为: $12\sqrt{10}\text{cm}^2$.

14. 如图, 在数轴上, A 、 B 对应的实数分别为 $-\sqrt{3}$ 和 1 , 且 $AB = BC$, 则点 C 所对应的数为_____.



【答案】 $\sqrt{3} + 2$

【解析】

【分析】 本题考查了实数与数轴和数轴上两点间的距离, 明确实数与数轴的关系、求出 $OC = \sqrt{3} + 2$ 是关键.

先根据数轴上两点间的距离得到 $AB = \sqrt{3} + 1$, 进而可得 $OC = \sqrt{3} + 2$, 即可得出答案.

【详解】 解: 因为 A 、 B 对应的实数分别为 $-\sqrt{3}$ 和 1 ,

所以 $AB = \sqrt{3} + 1$,

因为 $AB = BC$,

所以 $BC = \sqrt{3} + 1$,

所以 $OC = \sqrt{3} + 2$, 即点 C 所对应的数为 $\sqrt{3} + 2$;

故答案为: $\sqrt{3} + 2$.

15. 已知 $8 - \sqrt{15}$ 小数部分是 m , $8 + \sqrt{15}$ 小数部分是 n , 且 $(x-1)^2 = m+n$, 则 $x =$ _____.

【答案】 2 或 0

【解析】

【分析】 本题考查了无理数的有关运算;

根据 $\sqrt{15}$ 的取值范围得出 $m = 4 - \sqrt{15}$, $n = \sqrt{15} - 3$, 再根据平方根的性质求解即可.

【详解】 解: $\because 3 < \sqrt{15} < 4$,

$\therefore 8 - \sqrt{15}$ 的小数部分是 $4 - \sqrt{15}$, $8 + \sqrt{15}$ 的小数部分是 $\sqrt{15} - 3$,

$\therefore m = 4 - \sqrt{15}$, $n = \sqrt{15} - 3$,

$\therefore (x-1)^2 = 4 - \sqrt{15} + \sqrt{15} - 3 = 1$,

$\therefore x-1 = \pm 1$,

$\therefore x = 2$ 或 0 ,

故答案为: 2 或 0.

16. 对于任意的正数 m 、 n 定义运算 $\ast$, $m \ast n = \begin{cases} \sqrt{m} - \sqrt{n} & (m > n) \\ \sqrt{m} + \sqrt{n} & (m < n) \end{cases}$, 计算 $(3 \ast 2) \times (8 \ast 12)$ 的结果为 _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算, 根据定义新运算可得: $(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \times (\sqrt{8} + \sqrt{12})$, 然后利用二次根式的乘法法则, 进行计算即可解答.

【详解】 解: 由题意得:

$(3 \ast 2) \times (8 \ast 12)$

$$\begin{aligned}
&= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \times (\sqrt{8} + \sqrt{12}) \\
&= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \times (2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) \\
&= 2 \times (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \times (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \\
&= 2 \times (3 - 2) \\
&= 2,
\end{aligned}$$

故答案为：2.

17. 若 m 满足关系式 $\sqrt{3x+5y-2-m} + \sqrt{2x+3y-m} = \sqrt{1-x-y} \cdot \sqrt{x-1+y}$ ，则 $m =$ ____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件，二次根式的非负性，解二元一次方程组，由二次根式有意义的条件得 $1-x-y = x-1+y = 0$ ，即得 $x+y=1$ ， $\sqrt{3x+5y-2-m} + \sqrt{2x+3y-m} = 0$ ，再根据二次根

式的非负性得 $3x+5y-2-m=0$ ， $2x+3y-m=0$ ，即得 $x+2y=2$ ，再解方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=2 \end{cases}$ 求出 x 、 y

的值即可求解，掌握二次根式有意义的条件及性质是解题的关键.

【详解】 解：由题意得， $1-x-y \geq 0$ ， $x-1+y \geq 0$ ，

$$\therefore 1-x-y = x-1+y = 0,$$

$$\therefore x+y=1, \quad \sqrt{3x+5y-2-m} + \sqrt{2x+3y-m} = 0,$$

$$\therefore 3x+5y-2-m=0, \quad 2x+3y-m=0,$$

$$\therefore x+2y=2,$$

$$\text{由 } \begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases},$$

$$\therefore 0+3 \times 1 - m = 0,$$

$$\therefore m=3,$$

故答案为：3.

18. 观察下列各式： $\sqrt{1}=1$ ， $\sqrt{1+3}=2$ ， $\sqrt{1+3+5}=3$ ， $\sqrt{1+3+5+7}=4$ ， $\sqrt{1+3+5+7+9}=5$ ；已

知 n 为正整数， $\sqrt{1+3+5+7+9+11+\cdots+(2n-1)} =$ _____.

【答案】 n

【解析】

【分析】 此题考查了算术平方根，数字类规律的归纳与运用能力，关键是能通过观察、猜想准确归纳出该类问题的运算规律.

观察各式即可得出结论.

【详解】 解: $\sqrt{1+3+5+7+9+11+\cdots+(2n-1)} = \sqrt{\frac{1}{2}n(1+2n-1)} = \sqrt{n^2},$

$\therefore n$ 为正整数,

$\therefore \sqrt{n^2} = n,$

即 $\sqrt{1+3+5+7+9+11+\cdots+(2n-1)} = n.$

故答案为: n .

三、解答题 (7 小题, 共 64 分)

19. 计算

(1) $\sqrt{12} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - 9\sqrt{\frac{1}{27}};$

(2) $\frac{1}{3}\sqrt{27a^3} - a^2\sqrt{\frac{3}{a}} + 3a\sqrt{\frac{a}{3}} - \frac{4}{3}\sqrt{108a}$

(3) $12\sqrt{a^2b^3} \div \frac{3}{2}\sqrt{a^3b} \times \sqrt{\frac{a^3}{b}}$

【答案】 (1) 2 (2) $(a-8)\sqrt{3a}$

(3) $8a\sqrt{b}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根的化简，熟练掌握运算是解题关键.

(1) 根据二次根式的性质，先把每个二次根式化为最简二次根式，再将被开方数相同的二次根式进行合并.

(2) 先把各二次根式化为最简二次根式，然后合并即可；

(3) 先计算乘除法，再化简即可；

【小问 1 详解】

解: $\sqrt{12} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - 9\sqrt{\frac{1}{27}}$

$$= 2\sqrt{3} + \frac{(\sqrt{3}-1) \times (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1) \times (\sqrt{3}-1)} - \sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3} + \frac{4-2\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$= 2.$$

【小问 2 详解】

解：根据题意可得 $a > 0$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}\sqrt{27a^3} - a^2\sqrt{\frac{3}{a}} + 3a\sqrt{\frac{a}{3}} - \frac{4}{3}\sqrt{108a} \\ &= \frac{1}{3} \times 3a\sqrt{3a} - a^2 \cdot \frac{\sqrt{3a}}{a} + 3a \cdot \frac{\sqrt{3a}}{3} - \frac{4}{3} \times 6\sqrt{3a} \\ &= a\sqrt{3a} - a\sqrt{3a} + a\sqrt{3a} - 8\sqrt{3a} \\ &= (a-8)\sqrt{3a}. \end{aligned}$$

【小问 3 详解】

解：根据题意可得 $a \geq 0, b > 0$,

$$\begin{aligned} & 12\sqrt{a^2b^3} \div \frac{3}{2}\sqrt{a^3b} \times \sqrt{\frac{a^3}{b}} \\ &= 12\sqrt{a^2b^3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt{a^3b}} \times \sqrt{\frac{a^3}{b}} \\ &= 8\sqrt{a^2b^3} \times \sqrt{\frac{1}{a^3b}} \times \sqrt{\frac{a^3}{b}} \\ &= 8\sqrt{a^2b^3 \times \frac{1}{a^3b} \times \frac{a^3}{b}} \\ &= 8a\sqrt{b}. \end{aligned}$$

20. 解方程： $27 + (1-2x)^3 = 0$;

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题考查了利用立方根解方程. 先移项, 然后开立方即可得出方程的解.

【详解】 解: $27 + (1 - 2x)^3 = 0$,

$$\therefore (1 - 2x)^3 = -27,$$

$$\therefore 1 - 2x = -3,$$

$$\therefore x = 2.$$

21. 已知 $x = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$, $y = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$, 求 $x^2 + y^2 + xy$ 的值.

【答案】 15

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的化简求值, 先分母有理化得到 $x = 2 - \sqrt{3}$, $y = 2 + \sqrt{3}$, 再求出 $x + y$ 和 xy 的值, 最后把所求式子变形为 $(x + y)^2 - xy$ 并代值计算即可得到答案.

$$\text{【详解】 解: } \because x = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3}) \times (2 - \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3},$$

$$y = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3}) \times (2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3},$$

$$\therefore x + y = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4, \quad xy = (2 - \sqrt{3}) \times (2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1,$$

$$\therefore x^2 + y^2 + xy$$

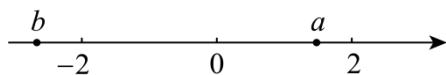
$$= (x^2 + 2xy + y^2) - xy$$

$$= (x + y)^2 - xy$$

$$= 4^2 - 1$$

$$= 15.$$

22. 实数 a , b 在数轴上对应点的位置如图所示, $M = \sqrt{(a+2)^2} - \sqrt{(b-2)^2} + \sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{b^2}$.



(1) 化简 M ;

(2) 当 $a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $b = -\sqrt{3}$ 时, 求 M 的值.

【答案】 (1) $2a - b$

$$(2) 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$$

【解析】

【分析】 本题考查了利用数轴判断式子的正负、二次根式的性质、二次根式的混合运算，采用数形结合的思想是解此题的关键.

(1) 由数轴可得 $b < -2$, $0 < a < 2$, 从而得出 $a+2 > 0$, $b-2 < 0$, $a-b > 0$, 再根据二次根式的性质化简即可;

(2) 将 $a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $b = -\sqrt{3}$ 代入 (1) 中化简的式子计算即可得解.

【小问 1 详解】

解: 由数轴可得: $b < -2$, $0 < a < 2$,

$$\therefore a+2 > 0, \quad b-2 < 0, \quad a-b > 0,$$

$$\therefore M = \sqrt{(a+2)^2} - \sqrt{(b-2)^2} + \sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{b^2}$$

$$= a+2 - [-(b-2)] + a-b + (-b)$$

$$= a+2+b-2+a-b-b$$

$$= 2a-b;$$

【小问 2 详解】

解: 当 $a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $b = -\sqrt{3}$ 时, 原式 $= 2 \times (\sqrt{3} - \sqrt{2}) - (-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$.

23. 已知 m 是实数, 且 $m+2\sqrt{2}$ 和 $\frac{1}{m}-2\sqrt{2}$ 都是整数, 那么 m 的值是_____.

【答案】 $\pm 3 - 2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据题意可以设 $m+2\sqrt{2}=a$ (a 为整数), $\frac{1}{m}-2\sqrt{2}=b$ (b 为整数), 求出 m , 然后代入 $\frac{1}{m}-2\sqrt{2}=b$ 求解即可.

【详解】 由题意设 $m+2\sqrt{2}=a$ (a 为整数), $\frac{1}{m}-2\sqrt{2}=b$ (b 为整数),

$$\therefore m = a - 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{1}{a-2\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} = b,$$

整理得:

$$2\sqrt{2} - b = 8a - ab^2 + 2\sqrt{2}(b^2 - 8),$$

$$\therefore b^2 - 8 = 1, \quad 8a - ab^2 = -b,$$

$$\text{解得: } b = \pm 3, \quad a = \pm 3,$$

$$\therefore m = \pm 3 - 2\sqrt{2}.$$

$$\text{故答案为 } \pm 3 - 2\sqrt{2}.$$

【点睛】 本题主要考查的是实数的有关知识，根据题意可以设 $m + 2\sqrt{2} = a$ (a 为整数)， $\frac{1}{m} - 2\sqrt{2} = b$ (b 为整数)，整理求出 a, b 的值是解答本题的关键..

24. 若 a, b, c 为实数，且满足 $a + b + c = 2\sqrt{a+1} + 4\sqrt{b+1} + 6\sqrt{c-2} - 14$ ，求 $\sqrt{ab+bc+ca+3}$ 的值为__.

【答案】 6

【解析】

【分析】 根据配方法的理论依据，即公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ ，将原方程转化为

$$a + 1 - 2\sqrt{a+1} + 1 + b + 1 - 4\sqrt{b+1} + 4 + c - 2 - 6\sqrt{c-2} + 9 = 0 \text{ 即可解答.}$$

$$\text{【详解】 解: } \because a + b + c = 2\sqrt{a+1} + 4\sqrt{b+1} + 6\sqrt{c-2} - 14,$$

$$\therefore a + 1 - 2\sqrt{a+1} + 1 + b + 1 - 4\sqrt{b+1} + 4 + c - 2 - 6\sqrt{c-2} + 9 = 0,$$

$$\therefore (\sqrt{a+1} - 1)^2 + (\sqrt{b+1} - 2)^2 + (\sqrt{c-2} - 3)^2 = 0,$$

$$\therefore \sqrt{a+1} - 1 = 0, \quad \sqrt{b+1} - 2 = 0, \quad \sqrt{c-2} - 3 = 0,$$

$$\therefore a = 0, \quad b = 3, \quad c = 11,$$

$$\therefore \sqrt{ab + bc + ca + 3}$$

$$= \sqrt{0 + 33 + 0 + 3}$$

$$= 6,$$

故答案为: 6.

【点睛】 本题考查的是配方法的应用、非负数的性质和实数的计算，解题的关键是熟练掌握配方法的理论依据.

25. 我国南宋时期数学家秦九韶曾提出利用三角形的三边求面积的公式，此公式与古希腊几何学家海伦提出的公式如出一辙，即三角形的三边长分别为 a, b, c ，记 $p = \frac{a+b+c}{2}$ ，则其面积

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

这个公式也被称为海伦-秦九韶公式.

(1) 当三角形的三边 $a = 3, b = 5, c = 6$ 时，请你利用公式计算出三角形的面积;

(2) 一个三角形的三边长依次为 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{6}$ 、 $\sqrt{7}$ ，请求出三角形的面积；

(3) 若 $p=8$ ， $a=4$ ，求此时三角形面积的最大值.

【答案】(1) $2\sqrt{14}$

(2) $\frac{\sqrt{26}}{2}$

(3) $8\sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 直接利用已知得出 p 的值，再利用三角形面积公式得出答案；

(2) 将 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 变形为 $S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[a^2b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2} \right)^2 \right]}$ 再代入求值即可；

(3) 根据公式计算出 $b+c=12$ ，再表示成 $c=12-b$ ，代入公式即可求出解.

【小问 1 详解】

解： $\because a=3$ ， $b=5$ ， $c=6$ ，

则： $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+5+6}{2} = 7$ ，

$$\therefore S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{7 \times (7-3) \times (7-5) \times (7-6)}$$

$$= \sqrt{56}$$

$$= 2\sqrt{14}；$$

【小问 2 详解】

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{4} \cdot \frac{c^2 - (a-b)^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{4} \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{4}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\left(\frac{ab}{2} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}\right)\left(\frac{ab}{2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}\right)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{ab}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)^2\right]},
\end{aligned}$$

则三边长依次为 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{6}$ 、 $\sqrt{7}$ ，代入 $S = \sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)^2\right]}$ 可得：

$$S = \sqrt{\frac{1}{4}\left[5 \times 6 - \left(\frac{5+6-7}{2}\right)^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{4} \times (30-4)} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

【小问3详解】

$$\because p = \frac{a+b+c}{2}, \quad p=8, \quad a=4,$$

$$\therefore b+c=12, \text{ 则 } c=12-b,$$

$$\therefore S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{8(8-4)(8-b)(8-c)}$$

$$= 4\sqrt{2} \times \sqrt{(8-b)(8-12+b)}$$

$$= 4\sqrt{2} \times \sqrt{(8-b)(b-4)}$$

$$= 4\sqrt{2} \times \sqrt{4-(b-6)^2},$$

$$\therefore \text{当 } b=6 \text{ 时, } S \text{ 有最大值, 为 } S=8\sqrt{2}.$$

【点睛】本题主要考查了二次根式的应用，乘法公式的应用，解答本题的关键是明确题意，求出相应的三角形的面积。

26. 请你观察下列式子的特点，并直接写出结果：

$$(1) \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \underline{\hspace{2cm}};$$

根据你的阅读回答下列问题:

(4) 请根据上面式子的规律填空:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (n \text{ 为正整数});$$

(5) 请直接写出下列式子的结果

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 (1) $\frac{3}{2}$, (2) $\frac{7}{6}$, (3) $\frac{13}{12}$; (4) $1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n}$; (5) $n + \frac{n}{n+1}$ 或 $\frac{n^2 + 2n}{n+1}$.

【解析】

【分析】 本题考查了数字类规律的探索, 此类规律探究问题一定要结合式子特点和数的规律进行探究, 类比, 一般要根据规律进行变形, 往往会消去部分中间项, 实现简化运算目的.

(1) (2) (3) (4) 计算题目中结果, 并根据计算过程和结果, 总结得到一般规律, 作出猜想, 并对猜想进行计算, 即可进行证明; (5) 根据规律进行变形, 往往会消去部分中间项, 实现简化运算.

【详解】 (1) $\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$

$$(2) \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6};$$

$$(3) \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{13}{12};$$

$$(4) \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n(n+1)}$$

证明: $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$

$$= \sqrt{\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} - \frac{2}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2}$$

$\because n$ 为正整数,

$$\therefore 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

$$\therefore \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\begin{aligned} (5) & \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= n + 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= n + \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{n^2 + 2n}{n+1} \end{aligned}$$

故答案为 (1) $\frac{3}{2}$, (2) $\frac{7}{6}$, (3) $\frac{13}{12}$; (4) $1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n}$; (5) $n + \frac{n}{n+1}$ 或 $\frac{n^2 + 2n}{n+1}$.