

第 21 章阶段测试卷 (二) 一元二次方程的 判别式及根与系数的关系

一、选择题 (每题 2 分, 共 12 分)

1. 下列所给方程中, 没有实数根的是 ()

A. $x^2 + 2x = 0$

B. $5x^2 - 4x - 2 = 0$

C. $x^2 - 4x + 1 = 0$

D. $x^2 - x + 1 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了根的判别式, 熟练掌握一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的关系: 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根, 是解决此题的关键. 求出各选项方程根的判别式的值, 判断出正负即可确定一元二次方程是否有实数根.

【详解】解: A、 $x^2 + 2x = 0$ 、 $b^2 - 4ac = 4 > 0$, 则方程有两个不相等的实数根, 所以 A 选项不符合题意;
B、 $5x^2 - 4x - 2 = 0$ 、 $b^2 - 4ac = 16 + 40 = 56 > 0$, 则方程有两个不相等的实数根, 所以 B 选项不符合题意;
C、 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 、 $b^2 - 4ac = 16 - 4 = 12 > 0$, 所以方程有两个不相等的实数根, 所以 C 选项不符合题意;
D、 $x^2 - x + 1 = 0$ 、 $b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$, 方程没有实数根, 所以 D 选项符合题意;
故选: D.

2. 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + (a+2)x + 1 = 0 (a \neq 0)$ 的根的情况是 ()

A. 有两个不相等的实数根 B. 有两个相等的实数根 C. 无实根 D. 不确定

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根的判别式, 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系: ① $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根, ② $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根, ③ $\Delta < 0$, 方程没有实数根. 由题意求出 $\Delta = (a+2)^2 - 4 \times a \$

$$\therefore \Delta = (a+2)^2 - 4 \times a \times 1 = a^2 + 4a + 4 - 4a = a^2 + 4 > 0,$$

$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + (a+2)x + 1 = 0 (a \neq 0)$ 的根的情况是有两个不相等的实数根,

故选: A.

3. 关于 x 的一元二次方程 $(k-1)^2 x^2 + (2k+1)x + 1 = 0$ 有两个实数根, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $k > \frac{1}{4}$ 且 $k \neq 1$ B. $k \geq \frac{1}{4}$ 且 $k \neq 1$ C. $k > \frac{1}{4}$ D. $k \geq \frac{1}{4}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程有根的条件、判别式, 熟练掌握以上知识点是解题的关键.

根据判别式非负且二次项系数不为零进行解题.

【详解】解: 由题意知,
$$\begin{cases} \Delta = (2k+1)^2 - 4(k-1)^2 \geq 0 \textcircled{1} \\ (k-1)^2 \neq 0 \textcircled{2} \end{cases},$$

由①得: $4k^2 + 4k + 1 - 4k^2 + 8k - 4 \geq 0,$

$$12k - 3 \geq 0,$$

解得: $k \geq \frac{1}{4},$

由②得: $k \neq 1,$

$$\therefore k \geq \frac{1}{4} \text{ 且 } k \neq 1.$$

故选: B.

4. 已知 $x=2$ 是方程 $x^2 - mx - 2 = 0$ 的一个根, 则另一个根为 ()

- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根与系数的关系,

∴方程的另一个根为 -1 ,

故选: B.

5. 已知 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1 = 0$ 的两个不相等的实数根. 且

$x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 6 = 0$, 则 m 的值是 ()

A. $-\frac{5}{4}$

B. -2

C. $\frac{2}{3}$

D. -2 或 $\frac{2}{3}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查根的判别式, 根与系数之间的关系, 解一元二次方程. 根据方程有 2 个不相等的实数根得到 $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 - 1) > 0$, 求出 $m > -\frac{5}{4}$, 根据根与系数的关系得到关于 m 的一元二次方程, 进行求解即可.

【详解】 解: 根据题意得 $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 - 1) > 0$, 解得 $m > -\frac{5}{4}$.

根据根与系数的关系得: $x_1 + x_2 = -(2m+1)$, $x_1x_2 = m^2 - 1$,

$$\because x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 6 = 0,$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 - 6 = 0,$$

$$\therefore (2m+1)^2 - (m^2 - 1) - 6 = 0,$$

整理得 $3m^2 + 4m - 4 = 0$, 解得 $m_1 = \frac{2}{3}$, $m_2 = -2$,

$$\therefore m > -\frac{5}{4},$$

$$\therefore m \text{ 的值为 } \frac{2}{3}.$$

故选: C.

6. 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 下列说法:

①若 $a - b + c = 0$, 则 $b^2 - 4ac \geq 0$;

A. ①②

B. ①②③

C. ①②④

D. ①②③④

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的解，一元二次方程的判别式与根的个数的关系，熟练掌握使等式成立的未知数的值，是方程的解，以及判别式与根的个数的关系，是解题的关键.

根据 $a-b+c=0$ ，得到方程有一个根为： $x=-1$ ，即可得到 $\Delta \geq 0$ ；②根据 $ax^2+c=0$ 有两个不相等的实

根，得到 $-4ac > 0$ ，进而可以得到 $b^2-4ac > 0$ ，即可得到方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有两个不相等的实根；

③根据 c 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，得到 $ac^2+bc+c=0$ ，分 $c=0$ 和 $c \neq 0$ 两种情况讨论，进行判断；④根据求根公式，进行变形判断即可.

【详解】解：①若 $a-b+c=0$ ，则方程有一个根为： $x=-1$ ，即方程有实数根，

$\therefore b^2-4ac \geq 0$ ，故①正确；

②若方程 $ax^2+c=0$ 有两个不相等的实根，则： $-4ac > 0$ ，

$\therefore b^2-4ac > 0$ ，

$\therefore$ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有两个不相等的实根，故②正确；

③若 c 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，则： $ac^2+bc+c=0$ ，

$\therefore c(ac+b+1)=0$ ，

当 $c \neq 0$ 时： $ac+b+1=0$ ；

当 $c=0$ 时， $ac+b+1$ 不一定等于 0，故③错误；

④若 x_0+1 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，则： $x_0+1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ，

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式，根据所给方程确定 a 、 b 、 c 的值，再根据 $\Delta = b^2 - 4ac$ 进行计算求解即可.

【详解】 解：由题意得， $a = 1$ ， $b = -4$ ， $c = -7$ ，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 16 + 28 = 44,$$

故答案为：44.

8. 关于 x 的方程 $x^2 + (m+2)x + m = 0$ 的根的判别式的值为 5，则 $m =$ _____.

【答案】 ± 1

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式，直接开平方法解一元二次方程等知识点，牢记一元二次方程根的判别式的定义是解题的关键.

根据题意建立关于 m 的一元二次方程，解方程即可求出 m 的值.

【详解】 解： $\because \Delta = b^2 - 4ac$

$$= (m+2)^2 - 4 \times 1 \times m$$

$$= m^2 + 4m + 4 - 4m$$

$$= m^2 + 4$$

$$= 5,$$

整理，得： $m^2 = 1$ ，

解得： $m = \pm 1$ ，

故答案为： ± 1 .

9. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个相等的实数根，则 $b^2 - 4(ac-1)$ 的值为_____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式，根据一元二次方程根的判别式得出 $\Delta = 0$ ，即 $b^2 - 4ac = 0$ ，然后代入 $b^2 - 4(ac-1)$ 计算即可.

【详解】 解： $\because$ 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个相等的实数根

$$\therefore \Delta = 0, \text{ 即 } b^2 - 4ac = 0,$$

$$\therefore b^2 - 4(ac - 1)$$

$$= b^2 - 4ac + 4 = 4.$$

故答案为：4.

10. 已知二元一次方程 $x^2 - 2x - m = 0$ 的两根之积为 -3 ，则 $m =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根与系数的关系，若 x_1, x_2 为方程的两个根，则 $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. 据此求解，即可解题.

【详解】 解：设 x_1, x_2 为方程的两个根，

$$\therefore x_1 x_2 = -3, \text{ 即 } \frac{-m}{1} = -3$$

$$\therefore m = 3$$

故答案为：3.

11. 关于 x 的方程 $x^2 - 2mx + 3 = 0$ 的一个解是 $x_1 = 1$ ，则方程的另一个解 $x_2 =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根与系数的关系：若 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根，则满足 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. 先利用根与系数的关系得 $x_1 x_2 = 3$ ，然后把 $x_1 = 1$ 代入可得 x_2 的值.

【详解】 解：根据根与系数的关系得 $x_1 x_2 = 3$ ，

$$\therefore x_1 = 1,$$

$$\therefore x_2 = 3.$$

故答案为：3.

12. 若方程 $x^2 - \sqrt{k-1}x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围_____

【答案】 $k \geq 1$

【解析】

【分析】本题考查根的判别式，二次根式有意义的条件，根据方程有两个不相等的实数根，得到 $\Delta > 0$ ，结合二次根式的有意义的条件，进行求解即可.

【详解】解： $\because$ 方程 $x^2 - \sqrt{k-1}x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = \left(-\sqrt{k-1}\right)^2 + 4 > 0,$$

$$\therefore k > -3;$$

$$\text{又} \because k-1 \geq 0,$$

$$\therefore k \geq 1,$$

综上： $k \geq 1$ ；

故答案为： $k \geq 1$.

13. 若关于 x 的方程 $(k^2 - 1)x^2 + (k + 1)x + \frac{1}{4} = 0$ 无实根，则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \leq -1$ 或 $-1 \geq k$

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根的判别式的应用，分类讨论是解题关键.

分两种情况讨论：当 $k^2 - 1 = 0$ 时，方程为一元一次方程；当 $k^2 - 1 \neq 0$ 时，方程是一元二次方程，分别求出 k 的取值范围即可.

【详解】解：当 $k^2 - 1 = 0$ 且 $k + 1 \neq 0$ 时，即 $k = 1$ 时，原方程化为 $2x + \frac{1}{4} = 0$ ，这是一元一次方程，有实数根；

当 $k = -1$ 时，原方程无实数根，

当 $k^2 - 1 = 0$ 且 $k + 1 = 0$ 时，即 $k = -1$ 时，原方程化为 $\frac{1}{4} = 0$ ，此等式不成立，方程无解，但这种情况不属于一元二次方程的无实根情况；

当 $k^2 - 1 \neq 0$ ，即 $k \neq \pm 1$ 时，原方程 $(k^2 - 1)x^2 + (k + 1)x + \frac{1}{4} = 0$ 是一元二次方程，

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系，对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，若 x_1, x_2 是该方程的两个实数根，则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ，据此根据相反数的定义可得 $-(k^2 - 9) = 0$ ，且 $k + 2 \leq 0$ ，计算求解即可.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (k^2 - 9)x + k + 2 = 0$ 的两个实数根互为相反数，

$$\therefore -(k^2 - 9) = 0, \text{ 且 } k + 2 \leq 0,$$

$$\therefore k = \pm 3, \quad k \leq -2,$$

$$\therefore k = -3,$$

故答案为： -3.

15. 如果一元二次方程 $x^2 + 4x - 2 = 0$ 的两个根为 x_1, x_2 ，则 $x_1^2 + 6x_1 - x_1 x_2 + 2x_2 =$ _____ .

【答案】 -4

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根与系数的关系，若 x_1, x_2 为方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根，则 x_1, x_2 与系数的关系式：

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. 根据根与系数的关系可以得到 $x_1 + x_2 = -4$ ， $x_1 x_2 = -2$ ，

$x_1^2 + 4x_1 - 2 = 0$ ，然后即可得到 $x_1^2 + 4x_1 = 2$ ，再将所求式子变形，计算即可.

【详解】 解： $\because$ 一元二次方程 $x^2 + 4x - 2 = 0$ 的两个根为 x_1, x_2 ，

$$\therefore x_1 + x_2 = -4, \quad x_1 x_2$$

16. 已知实数 $m, n (m \neq n)$ 满足 $2m^2 - 3m - 1 = 0$, $2n^2 - 3n - 1 = 0$, 则 $\frac{n}{m} + \frac{m}{n}$ 的值为_____

【答案】 $-\frac{13}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了方程的解以及一元二次方程的根与系数关系, 能熟练利用方程解的定义得到 m, n 是方程 $2x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两实数根是解题的关键. 根据已知判断出 m, n 是方程 $2x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两实数根, 然后利用根与系数关系即可求解.

【详解】 解: $\because$ 实数 $m, n (m \neq n)$ 满足等式 $2m^2 - 3m - 1 = 0$, $2n^2 - 3n - 1 = 0$,

$\therefore m, n$ 是方程 $2x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两实数根,

$$\therefore m + n = \frac{3}{2}, \quad mn = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{n}{m} + \frac{m}{n} = \frac{n^2 + m^2}{mn} = \frac{(m+n)^2 - 2mn}{mn} = \frac{\frac{9}{4} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -\frac{13}{2},$$

故答案为: $-\frac{13}{2}$

17. 等腰三角形的一边长是 3, 另两边的长是关于 x 的方程 $x^2 - 5x + k = 0$ 的两根, 则 $k =$ _____.

【答案】 6 或 $\frac{25}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查根的判别式, 根与系数的关系. 熟练掌握等腰三角形的两腰相等, 以及 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根, 是解题的关键.

分 3 是底边和 3 是腰长, 两种情况进行讨论.

【详解】 解: 当 3 是底边时, 另两边为腰, 长度相等, 则 $x^2 - 5x + k = 0$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (-5)^2 - 4k = 0,$$

$$\therefore k = \frac{25}{4},$$

当 3 是腰长时, 则 3 是 $x^2 - 5x + k = 0$ 的一个根, 设另一个根为 a ,

则: $3 + a = 5, 3a = k$,

$\therefore a = 2, k = 6$;

$2 + 3 > 3$, 满足题意;

故 $k = 6$ 或 $\frac{25}{4}$.

故答案为: 6 或 $\frac{25}{4}$

18. 若方程 $x^2 + bx + 1 = 0$ 与方程 $x^2 - x - b = 0$ 至少有一个相等的实数根, 那么实数 b 的值为_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的根, 以及根的判别式, 解题的关键是掌握相关知识. 设相等的实数根为 m , 则 $m^2 + bm + 1 = 0$ ①, $m^2 - m - b = 0$ ②, 两式相减得: $(b+1)(m+1) = 0$, 得到 $b = -1$ 或 $m = -1$, 再根据题意和根的判别式综合分析即可求解.

【详解】 解: $\because$ 方程 $x^2 + bx + 1 = 0$ 与方程 $x^2 - x - b = 0$ 至少有一个相等的实数根,

$\therefore$ 设相等的实数根为 m ,

则 $m^2 + bm + 1 = 0$ ①, $m^2 - m - b = 0$ ②,

①-② 得: $(b+1)m + (b+1) = 0$, 即 $(b+1)(m+1) = 0$,

解得: $b = -1$ 或 $m = -1$,

分)

19. 已知关于 x 的方程 $2x^2 - (b^2 - 3b - 4)x + b = 0$ 有两个互为相反数的实数根, 求 b 的值.

【答案】 $b = -1$

【解析】

【分析】 本题考查的是一元二次方程根与系数的关系, 根的判别式的应用, 一元二次方程的解法, 由题意可得 $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(b^2 - 3b - 4) = 0$, 再进一步求解即可.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的方程 $2x^2 - (b^2 - 3b - 4)x + b = 0$ 有两个互为相反数的实数根,

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(b^2 - 3b - 4) = 0,$$

$$\therefore (b - 4)(b + 1) = 0,$$

解得: $b = 4$ 或 $b = -1$,

当 $b = 4$ 时, 方程为: $2x^2 + 4 = 0$,

$\therefore \Delta = 0^2 - 4 \times 2 \times 4 = -32 < 0$, 此时方程无解, 舍去,

当 $b = -1$ 时, 方程为: $2x^2 - 1 = 0$,

方程的解为: $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, 符合题意,

$\therefore b = -1$.

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x - k = 0$ 有两个实数根.

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 若方程有一个根为 2, 求方程的另一根.

【答案】 (1) $k \geq -1$;

(2) 方程的另一根为 <

$$\therefore \Delta \geq 0, \text{ 即 } 4 - 4 \times 1 \times (-k) \geq 0$$

$$\therefore k \geq -1 ;$$

【小问2详解】

解： $\because$ 方程有一个根为2，设方程的另一根 x_2 ，

$$\therefore 2 + x_2 = -\frac{2}{1} = -2,$$

$$\therefore x_2 = -4.$$

所以可方程的另一根为-4.

【点睛】 本题考查的是一元二次方程根的判别式，一元二次方程根与系数的关系，掌握以上知识是解题的关键.

21. 如果一元二次方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两实数根分别为 x_1 ， x_2 ，不解方程，求下列代数式的值.

$$(1) x_1^2 + x_2^2; \quad (2) (x_1 - 2)(x_2 - 2).$$

【答案】 (1) 7 ; (2) -1.

【解析】

【分析】 根据根与系数的关系找出 $x_1 + x_2 = 3$ 、 $x_1 \cdot x_2 = 1$.

(1) 将代数式 $x_1^2 + x_2^2$ 变形为只含 $x_1 + x_2$ 、 $x_1 \cdot x_2$ 的代数式，代入数据即可得出结论；

(2) 将代数式 $(x_1 - 2)(x_2 - 2)$ 展开后代入数据即可得出结论.

【详解】 $\because$ 方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两实数根分别为 x_1 ， x_2

(2) 利用求根公式判断即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because \Delta = [-(k+4)]^2 - 4 \times 1 \times 4k = (k-4)^2 \geq 0$

$\therefore$ 该方程总有两个实数根

【小问 2 详解】

解: 根据求根公式得 $x = \frac{(k+4) \pm \sqrt{[-(k+4)]^2 - 4 \times 1 \times 4k}}{2} = \frac{(k+4) \pm (k-4)}{2}$

$\therefore x_1 = 4, x_2 = k$

$\because$ 该方程有一个根小于 1

$\therefore k < 1$

23. 实数 k 使关于 x 的方程 $x^2 + 2kx + k^2 = x + 1$ 有两个实数根 x_1, x_2 . 若 $(3x_1 - x_2)(x_1 - 3x_2) = 19$, 求 k 的值.

【答案】 $k_1 = 0$ 或 $k_2 = -3$

【解析】

【分析】 根据根与系数的关系得 $x_1 + x_2 = -2k + 1$, $x_1 x_2 = k^2 - 1$, 再把 $(3x_1 - x_2)(x_1 - 3x_2) = 19$ 变形为 $3(x_1 + x_2)^2 - 16x_1 x_2 = 19$, 则 $3(-2k + 1)^2 - 16(k^2 - 1) = 19$, 接着解关于 k 的方程, 然后利用 k 的取值范围确定 k 的值即可.

【详解】 解: 原方程整理为 $x^2 + (2k - 1)x + k^2 - 1 = 0$,

根据题意得 $\Delta = (2k - 1)^2 - 4(k^2 - 1) = -4k + 5 \geq 0$, 解得 $k \leq \frac{5}{4}$,

$$\therefore k^2 + 3k = 0,$$

$\therefore k_1 = 0$ 或 $k_2 = -3$, 经检验他们均符合题意.

【点睛】 本题主要考查一元二次方程根的判别式、一元二次方程根与系数的关系、解一元二次方程, 解答关键是熟练掌握根的情况与根的判别式的关系以及熟知一元二次方程根与系数的关系: 设一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ 的两个根为 } x_1, x_2, \text{ 则 } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

24. 若关于 x 的方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 有两个不相等的实数根, 请判断关于 x 的方程

$$(k-2)x^2 - 2kx + k - 3 = 0 \text{ 的根的情况.}$$

【答案】 当 $k \neq 2$ 时, 方程无实数根; 当 $k = 2$ 时, 方程有一个实数根

【解析】

【分析】 本题考查了根的判别式和一元二次方程的定义, 能根据题意得出关于 k 的不等式是解此题的关键. 由方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 有两个不相等的实数根, 得到 $k < 1$, 再分为当 $k \neq 2$ 时和当 $k = 2$ 时分别求解即可.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4k = 4 - 4k > 0,$$

解得: $k < 1$;

【答案】(1) 方程 $x^2 + 3x - 8 = 0$ 为波浪方程, 理由见解析

(2) $a = -1, b = \frac{5}{2}$

(3) $-x^2 + 3x - 2 = 0$

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系, 一元二次方程的解的定义, 波浪方程的定义, 熟知波浪方程的定义是解题的关键:

(1) 直接根据波浪方程的定义判断即可;

(2) 先根据波浪方程的定义得到 $3a + 2b = 2$ ①, 再由一元二次方程的解的定义得到 $4a + 2b - 1 = 0$ ②, 据此联立①②求解即可;

(3) 根据根与系数的关系推出 $n = -3m, p = 2m$, 根据波浪方程的定义得到 $3m + 2n + p = 1$, 据此得到关于 m 的方程, 解方程即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: 方程 $x^2 + 3x - 8 = 0$ 为波浪方程, 理由如下:

由题意得, $a = 1, b = 3, c = -8$,

$$\therefore 3a + 2b + c = 1 = 3 + 6 - 8 = 1,$$

$\therefore$ 方程 $x^2 + 3x - 8 = 0$ 为波浪方程,

【小问 2 详解】

解: $\because$ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx - 1 = 0$ 为波浪方程,

$$\therefore 3a + 2b + c = 1, \text{ 且 } c = -1,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{n}{m} = 3, \quad x_1 x_2 = \frac{p}{m} = 2, \quad 3m + 2n + p = 1,$$

$$\therefore n = -3m, \quad p = 2m,$$

$$\therefore 3m - 6m + 2m = 1,$$

$$\therefore m = -1, \quad n = 3, \quad p = -2,$$

$$\therefore \text{这个波浪方程为 } -x^2 + 3x - 2 = 0.$$

26. 类比是探索发现的重要途径，是发现新问题、新结论的重要方法.

学习再现：

设一元二次方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根分别为 x_1 和 x_2 ,

$$\text{那么 } x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2,$$

比较系数得 $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$.

类比推广：

(1) 设 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 的三个根分别为 x_1, x_2, x_3 , 求 $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$ 的值.

问题解决：

(2) 若 $x^3 - 5x^2 - 12x - 3 = 0$ 的三个根分别为 x_1, x_2, x_3 , 则 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 的值是_____.

【详解】解：（1）根据学习材料提示得，

$$\begin{aligned}x^3 + px^2 + qx + r &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\&= [x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2](x - x_3), \\&= x^3 - x^2x_3 - (x_1 + x_2)x^2 + (x_1 + x_2)x_3x + x_1x_2x - x_1x_2x_3, \\&= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - x_1x_2x_3, \\&\therefore -(x_1 + x_2 + x_3) = p, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = q,\end{aligned}$$

$\therefore x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ 的值为 q ；

（2） $\because x^3 - 5x^2 - 12x - 3 = 0$ 的三个根分别为 x_1, x_2, x_3 ,

$$\text{又} \because -(x_1 + x_2 + x_3) = p, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = q,$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 = -p = 5, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -12,$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = 5^2 - 2 \times (-12) = 49,$$

故答案为：49；

$$(3) \because a + b + c = 0, \quad abc = \frac{27}{4},$$

$$\therefore a + c = -b, \quad ac = \frac{27}{4b},$$

$$\therefore a, c \text{ 是方程 } x^2 + bx + \frac{27}{4b} = 0 \text{ 的两根,}$$
</

