

# 上海市晋元高级中学附属学校 2025-2026 学年八年级上学期数学

## 12 月周测卷

### 一、选择题：(本大题共 8 题，每题 3 分，共 24 分)

1. 下列代数式中，是最简二次根式的是 ( )

A.  $\sqrt{a^2b}$

B.  $\sqrt[3]{2}$

C.  $\sqrt{a^2-b^2}$

D.  $\sqrt{0.7}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据最简二次根式的定义判断即可.

本题考查了最简二次根式，熟练掌握定义是解题的关键.

【详解】A.  $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$ ，不符合题意；

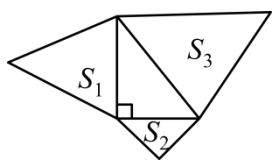
B.  $\sqrt[3]{2}$ ，不是二次根式，不符合题意；

C.  $\sqrt{a^2-b^2}$ ，符合题意；

D.  $\sqrt{0.7} = \sqrt{\frac{7}{10}} = \frac{\sqrt{70}}{10}$ ，不符合题意；

故选：C.

2. 如图所示，分别以直角三角形的三边向外作三个正三角形，其面积分别是  $S_1$ ， $S_2$ ， $S_3$ ，则它们之间的关系是 ( )



A.  $S_1 - S_2 = S_3$

B.  $S_1 + S_2 = S_3$

C.  $S_2 + S_3 < S_1$

D.  $S_2 - S_3 = S_1$

【答案】B

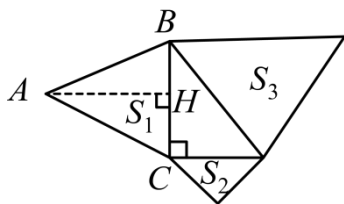
【解析】

【分析】本题主要考查勾股定理，解题的关键是掌握勾股定理和等边三角形的面积公式. 根据等边三角形的性质，知等边三角形的面积等于其边长的平方的  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  倍，结合勾股定理可知，以直角三角形的两条直角边为边长的等边三角形的面积和等于以斜边为边长的等边三角形的面积.

【详解】解：设直角三角形的三边从小到大是  $a$ ， $b$ ， $c$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2,$$

如图, 过  $A$  作  $AH \perp BC$  于  $H$ ,



$$BC = a, \quad BH = \frac{1}{2}a, \quad AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$\text{则 } S_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2;$$

$$\text{同理 } S_2 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}b^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2, \quad S_3 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2,$$

$$\text{又 } a^2 + b^2 = c^2,$$

$$\text{则 } S_1 + S_2 = S_3.$$

故选: B.

3. 某公司第一季度总共生产 80 万部 5G 手机. 已知 5G 手机的下载速度比 4G 手机每秒多 95MB, 若下载一部 1000MB 的电影, 5G 手机比 4G 手机快 190 秒, 设 5G 手机的下载速度为  $x$  MB/s, 则正确的方程是 ( )

A.  $\frac{1000}{x} - \frac{1000}{x+95} = 190$

B.  $\frac{1000}{x-95} - \frac{1000}{x} = 190$

C.  $\frac{1000}{x+95} - \frac{1000}{x} = 190$

D.  $\frac{1000}{x} - \frac{1000}{x-95} = 190$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查根据实际问题列分式方程, 根据“5G 手机比 4G 手机快 190 秒”列方程即可.

【详解】 解: 设 5G 手机下载速度为  $x$  MB/s,

则 4G 手机下载速度为  $(x-95)$  MB/s

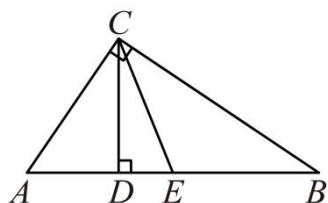
5G 下载时间为  $\frac{1000}{x}$  秒,

4G 下载时间为  $\frac{1000}{x-95}$  秒,

所以方程为  $\frac{1000}{x-95} - \frac{1000}{x} = 190$ ,

故选 B.

4. 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ . 线段  $CD$ 、 $CE$  分别为  $\triangle ABC$  的高和中线, 下列说法中错误的是 ( )



A.  $\angle B = \angle ACD$

B.  $\angle BCE = \angle ACD$

C.  $2CE = AB$

D.  $2AC = AB$

【答案】D

【解析】

【分析】 本题主要考查了三角形的高和中线的性质, 熟练掌握三角形高和中线的性质是解题的关键; 根据三角形高和中线的性质, 结合图形对选项一一判断即可求解.

【详解】 解: 线段  $CD$ 、 $CE$  分别为  $\triangle ABC$  的高和中线,

$$\therefore \angle CDB = \angle CDA = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle DCB = \angle B + \angle DCB = 90^\circ,$$

$\therefore \angle B = \angle ACD$ , 故 A 选项正确, 不符合题意;

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,

$$\therefore CE = \frac{1}{2}AB = BE = AE,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle B,$$

$\therefore \angle BCE = \angle ACD$ , 故 B 选项正确, 不符合题意;

$$\because CE = \frac{1}{2}AB,$$

$\therefore AB = 2CE$ , 故选项 C 正确, 不符合题意;

根据题中条件无法推出  $AC = AE = CE$ , 故无法推出  $2AC = AB$ , 故选项 D 错误, 符合题意;

故选: D

5. 下列说法中，不正确的是（ ）

- A. 有两个角是  $60^\circ$  的三角形是等边三角形
- B. 已知  $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 8$ ， $AC = 4$ ，则可以画出唯一确定的  $\triangle ABC$
- C. 若  $\triangle ABC$  中， $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$ ，则  $\triangle ABC$  是直角三角形
- D. 三角形中，到三边距离相等的点是这个三角形三条边的垂直平分线的交点

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了等边三角形的判定定理，全等三角形的判定定理，三角形内角和定理，角平分线的判定定理，根据等边三角形的判定定理可判断 A；根据 HL 可判断 B；根据三角形内角和定理可判断 C；根据角平分线的判定定理可判断 D.

【详解】解：A、有两个角是  $60^\circ$  的三角形是等边三角形，原说法正确，不符合题意；

B、由 HL 可证明两个三角形全等，故可以画出唯一确定的  $\triangle ABC$ ，原说法正确，不符合题意；

C、 $\because \triangle ABC$  中， $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$ ，

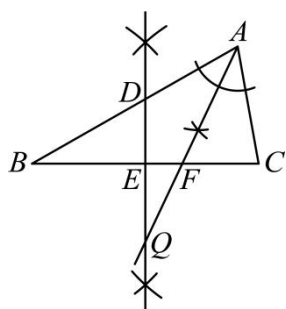
$$\therefore \angle C = 180^\circ \times \frac{3}{1+2+3} = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$  是直角三角形，原说法正确，不符合题意；

D、三角形中，到三边距离相等的点是这个三角形三个内角的角平分线的交点，原说法错误，符合题意；

故选：D.

6. 如图， $\triangle ABC$  中，若  $\angle BAC = 70^\circ$ ， $\angle ACB = 80^\circ$ ，根据图中尺规作图的痕迹推断，以下结论错误的是（ ）



- A.  $\angle BAQ = 35^\circ$
- B.  $DE = \frac{1}{2}BD$
- C.  $AF = AC$
- D.  $\angle EQF = 25^\circ$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了等腰三角形的判定，三角形内角和定理，角平分线和线段垂直平分线的尺规作图，含  $30^\circ$  角的直角三角形的性质. 由作图方法可知 MN 垂直平分 BC，AQ 平分  $\angle BAC$ ，则由角平分线的

定义可得  $\angle BAQ = \angle CAF = \frac{1}{2} \angle BAC = 35^\circ$ ，即可判断 A；利用三角形内角和定理得到  $\angle C \neq \angle AFC$ ，即可判断 B；利用三角形内角和定理得到  $\angle B = 30^\circ$ ，即可判断 C；利用三角形内角和定理和对顶角线段得到  $\angle EQF = 25^\circ$ ，即可判断 D。

【详解】解：由作图方法可知  $DQ$  垂直平分  $BC$ ， $AQ$  平分  $\angle BAC$ ，

$\therefore \angle BAQ = \angle CAF = \frac{1}{2} \angle BAC = 35^\circ$ ，故 A 结论正确，不符合题意；

$\therefore \angle AFC = 180^\circ - \angle C - \angle CAF = 65^\circ$ ，

$\therefore \angle C \neq \angle AFC$ ，

$\therefore AF \neq AC$ ，故 C 结论错误，符合题意；

$\therefore \angle B = 180^\circ - \angle C - \angle BAC = 30^\circ$ ， $\angle DEB = 90^\circ$ ，

$\therefore DE = \frac{1}{2}BD$ ，故 B 结论正确，不符合题意；

$\therefore \angle EFQ = \angle AFC = 65^\circ$ ， $\angle QEF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle EQF = 25^\circ$ ，故 D 结论正确，不符合题意；

故选：C。

7. 关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + mx + n = 0$ ，下列说法：①若  $m - 2n = 1$ ，则方程一定有两个不相等的实数根；②若  $n$  是方程  $x^2 + mx + n = 0$  的一个根，则  $m + n = -1$ ；③等腰三角形一腰上的高与另一腰所成的夹角为  $50^\circ$ ，则这个等腰三角形的顶角度数为  $40^\circ$ ；④一元二次方程  $-x^2 + 3x + 4 = 0$ ，由根与系数的关系，可得  $x_1 + x_2 = 3, x_1x_2 = -4$ 。正确的个数是（ ）

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的判别式、等腰三角形性质及根与系数关系，需注意分类讨论。

根据根的判别式可以判断①；将  $n$  代入方程  $x^2 + mx + n = 0$ ，可得  $n(n + m + 1) = 0$ ，即可判断②；分类讨论画图，利用角度的计算可判断③；根据根与系数的关系可判断④。

【详解】解：①  $\because m - 2n = 1$ ，

$\therefore m = 1 + 2n$ ，

$\Delta = m^2 - 4n = (1 + 2n)^2 - 4n = 1 + 4n + 4n^2 - 4n = 1 + 4n^2 \geq 1 > 0$ ，

∴方程一定有两个不相等的实数根，故①正确.

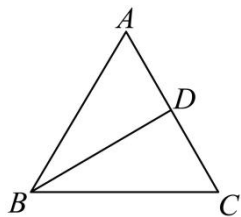
②若  $n$  是方程  $x^2 + mx + n = 0$  的根，

则代入得  $n^2 + mn + n = 0$ ，即  $n(n + m + 1) = 0$ ，

若  $n = 0$ ，则  $m + n$  不一定为  $-1$ ；若  $n \neq 0$ ，则  $m + n = -1$ ，故②错误.

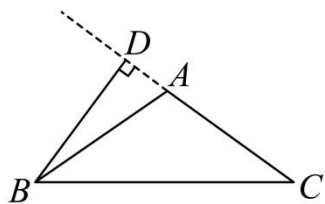
③等腰三角形一腰上的高与另一腰夹角为  $50^\circ$ ，

当等腰三角形顶角为锐角时，如图， $AB = AC, BD \perp AC$ ，



此时  $\angle A = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ ；

当等腰三角形顶角为钝角时，如图， $AB = AC, BD \perp AC$ ，



此时  $\angle BAC = 90^\circ + \angle ABD = 90^\circ + 50^\circ = 140^\circ$ ，

故顶角可能为  $40^\circ$  或  $140^\circ$ ，不唯一，故③错误.

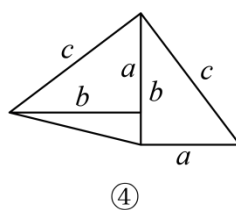
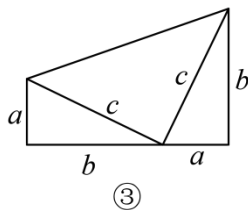
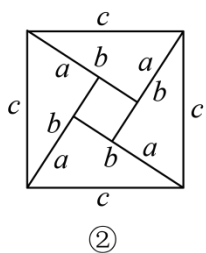
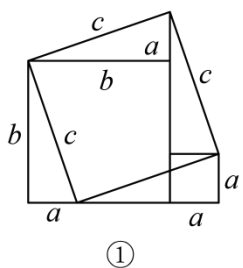
④方程  $-x^2 + 3x + 4 = 0$  即  $x^2 - 3x - 4 = 0$ ，

由根与系数关系， $x_1 + x_2 = -\frac{-3}{1} = 3$ ， $x_1 x_2 = \frac{-4}{1} = -4$ ，故④正确.

∴正确的有①和④，共 2 个.

故选：B.

8. 在勾股定理的学习过程中，我们已经学会了运用图形验证著名的勾股定理，下列选项中的图形，能证明勾股定理的是（ ）



A. ①②③

B. ①②④

C. ②③④

D. ①②③④

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查勾股定理的证明过程，分别利用每个图形面积的两种不同的计算方法，再建立等式，再整理即可判断.

【详解】解：在图①中，整个图形的面积等于两个三角形的面积加大正方形的面积，也等于两个小正方形的面积加上两个直角三角形的面积，

$$\therefore c^2 + 2 \times \frac{1}{2}ab = a^2 + b^2 + 2 \times \frac{1}{2}ab,$$

$$\text{整理得 } a^2 + b^2 = c^2,$$

故①可以证明勾股定理；

在图②中，大正方形的面积等于四个三角形的面积加小正方形的面积，

$$\therefore 4 \times \frac{1}{2}ab + c^2 = (a+b)^2,$$

$$\text{整理得 } a^2 + b^2 = c^2,$$

故②可以证明勾股定理；

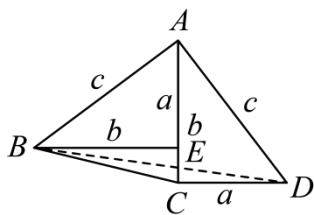
在图③中，由图可知三个三角形的面积的和等于梯形的面积，

$$\therefore \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}(a+b)(a+b),$$

$$\text{整理可得 } a^2 + b^2 = c^2,$$

故③可以证明勾股定理；

在图④中，连接  $BD$ ，



此图也可以看成  $\text{Rt}\triangle BEA$  绕其直角顶点顺时针旋转  $90^\circ$ ，再向下平移得到。一方面，四边形  $ABCD$  的面积等于  $\triangle ABC$  和  $\text{Rt}\triangle ACD$  的面积之和，另一方面，四边形  $ABCD$  的面积等于  $\text{Rt}\triangle ABD$  和  $\triangle BCD$  的面积之和，

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD},$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}a(b-a),$$

$$\text{整理: } b^2 + ab = c^2 + a(b-a),$$

$$b^2 + ab = c^2 + ab - a^2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2,$$

故④可以证明勾股定理;

$\therefore$  能证明勾股定理的是①②③④.

故选: D.

## 二、填空题: (本大题共 10 题, 每题 3 分, 共 30 分)

9. 若关于  $x$  的方程  $(k-4)x^{|k|-2} + (2k-3)x + 4 = 0$  是一元二次方程, 则  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】

-4

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的定义, 能熟记一元一次方程的定义是解此题的关键, 只含有一个未知数, 并且所含未知数的项的最高次数是 2 的整式方程, 叫一元二次方程.

根据一元二次方程的定义得出  $k-4 \neq 0$  且  $|k|-2=2$ , 再求出  $k$  即可.

【详解】 解:  $\because$  关于  $x$  的方程  $(k-4)x^{|k|-2} + (2k-3)x + 4 = 0$  是一元二次方程,

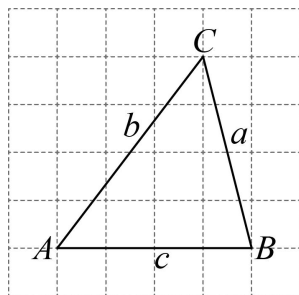
$$\therefore k-4 \neq 0 \text{ 且 } |k|-2=2,$$

$$\therefore k \neq 4, \quad k = \pm 4,$$

因此  $k = -4$ ,

故答案为: -4.

10. 如图, 每个小正方形的边长为 1,  $\triangle ABC$  的三边  $a$ ,  $b$ ,  $c$  中边长是无理数的是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .



【答案】  $a$

【解析】

【分析】 本题考查了无理数的定义，网格与勾股定理. 先根据网格与勾股定理进行列式，求出每条边的长度，再分析每条边长度是不是无理数，即可作答.

【详解】 解：依题意，  $b = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, c = 4, a = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

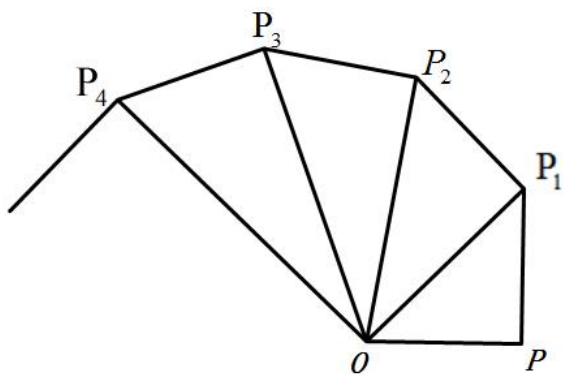
$\therefore 5, 4$  都是有理数，  $\sqrt{17}$  是无理数，

$\therefore \triangle ABC$  的三边  $a, b, c$  中边长是无理数的是  $a$ ,

故答案为：  $a$

11. 如图，  $OP=1$  ,过点  $P$  作  $PP_1 \perp OP$  ,且  $PP_1=1$  , 得  $OP_1 = \sqrt{2}$  ;再过点  $P_1$  作  $P_1P_2 \perp OP_1$  ,且  $P_1P_2=1$  ,得

$OP_2 = \sqrt{3}$  ;又过点  $P_2$  作  $P_2P_3 \perp OP_2$  ,且  $P_2P_3=1$  , 得  $OP_3 = 2$  ;.....如此方法作下去,那么  $OP_{2019} =$  \_\_\_\_\_ .



【答案】  $2\sqrt{505}$  .

【解析】

【分析】 根据勾股定理分别求出每个直角三角形斜边长，根据结果得出规律，即可得出答案.

【详解】  $\because OP = 1, OP_1 = \sqrt{2}, OP_2 = \sqrt{3}, OP_3 = \sqrt{4}$

$\therefore OP_4 = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$

$\dots,$

$OP_{2019} = \sqrt{2020} = 2\sqrt{505}.$

故填：  $2\sqrt{505}$  .

【点睛】 本题考查了勾股定理的应用，注意：在直角三角形中，两直角边的平方和等于斜边的平方，解此题的关键是能根据求出的结果得出规律.

12. 《九章算术》中的“折竹抵地”问题：今有竹高一丈，末折抵地，去本四尺. 问折者高几何？意思是：一根竹子，原高一丈（一丈=10尺），一阵风将竹子折断，其竹梢恰好抵地，抵地处离竹子底部4尺远，问折断处离地面有多高？设折断处离地面而高  $x$  尺，可列方程得\_\_\_\_\_.

【答案】  $x^2 + 4^2 = (10 - x)^2$

【解析】

【分析】 本题考查列方程解决古代问题，涉及勾股定理，读懂题意，设折断处离地而高  $x$  尺，由勾股定理代值列方程即可得到答案，熟记勾股定理是解决问题的关键.

【详解】 解：设折断处离地而高  $x$  尺，可列方程得  $x^2 + 4^2 = (10 - x)^2$ ,

故答案为：  $x^2 + 4^2 = (10 - x)^2$ .

13. 已知  $m = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ ,  $n$  是  $m$  的小数部分. 则  $m^3 - 2m^2 + n^2 + \frac{1}{n^2} =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $7 + \sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查无理数的估算，分母有理化，先根据分母有理化化简  $m$ ，然后根据无理数的估算求出  $n$ ，再代入代数式计算解答即可.

【详解】 解：  $m = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1$ ,

$\because 1 < \sqrt{2} < 2$ ,

$\therefore 2 < \sqrt{2}+1 < 3$ ,

$\therefore n = \sqrt{2}+1-2 = \sqrt{2}-1$ ,

$\therefore m^3 - 2m^2 + n^2 + \frac{1}{n^2}$

$= m^2(m-2) + (n + \frac{1}{n})^2 - 2$

$= (\sqrt{2}+1)^2(\sqrt{2}+1-2) + (\sqrt{2}-1 + \frac{1}{\sqrt{2}-1})^2 - 2$

$= 3\sqrt{2}-3+4-2\sqrt{2}+8-2$

$= 7 + \sqrt{2}$ ,

故答案为：  $7 + \sqrt{2}$ .

14. 已知  $\text{Rt}\triangle ABC$  两边长为 3 和 4，则其斜边上的中线为\_\_\_\_\_.

【答案】 2.5 或 2

【解析】

【分析】分为两种情况：①当3和4是直角边时，②当3是直角边，4是斜边时，求出斜边后根据直角三角形斜边上中线性质的性质求出即可．

【详解】解：①当3和4是直角边时，斜边为 $\sqrt{3^2+4^2}=5$ ，

斜边的中线为 $\frac{1}{2} \times 5 = 2.5$ ，

②当3是直角边，4是斜边时，

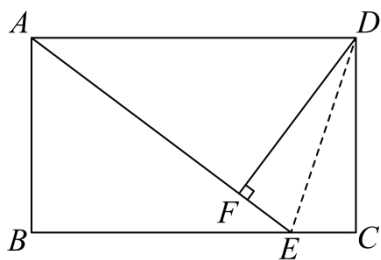
斜边上的中线为 $\frac{1}{2} \times 4 = 2$ ，

所以斜边上的中线为2.5或2，

故答案为：2.5或2．

【点睛】本题考查了直角三角形斜边上中线性质的应用，注意要分类讨论．

15. 如图，长方形ABCD中， $BC=5$ ， $AB=3$ ，点E在边BC上，将 $\triangle DCE$ 沿着DE翻折后，点C落在线段AE上的点F处，那么CE的长度是\_\_\_\_\_．



【答案】1

【解析】

【分析】本题主要考查了三角形的全等和勾股定理的应用，熟练掌握全等三角形的判定方法和勾股定理成为解题的关键．

由翻折易得  $\triangle DFE \cong \triangle DCE$ ，则  $DF = DC$ ， $\angle DFE = \angle C = 90^\circ$ ，再由  $AD \parallel BC$  得  $\angle DAF = \angle AEB$ ，根据 AAS 证出  $\triangle ABE \cong \triangle DFA$  可得  $AE = AD = BC = 5$ ， $DF = CD = AB = 3$ ，在  $\text{Rt}\triangle ADF$  中，由勾股定理可得  $AF = 4$ ，然后由线段的和差即可解答．

【详解】解：由矩形 ABCD，得  $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ， $CD = AB$ ， $AD = BC$ ， $AD \parallel BC$ ．

由  $\triangle DEC$  沿线段 DE 翻折，点 C 恰好落在线段 AE 上的点 F 处，得  $\triangle DFE \cong \triangle DCE$ ，

$\therefore DF = DC$ ， $\angle DFE = \angle C = 90^\circ$ ， $EF = CE$ ，

$\therefore DF = AB$ ， $\angle AFD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AFD = \angle B$ ，

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle AEB,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DFA (\text{AAS}).$$

$$\therefore AE = AD = BC = 5, DF = CD = AB = 3,$$

在  $\text{Rt}\triangle ADF$  中, 由勾股定理可得  $AF = \sqrt{AD^2 - DF^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ , 则  $EF = AE - AF = 5 - 4 = 1$ ,

$$\therefore CE = EF = 1.$$

故答案为: 1.

16. 已知,  $\triangle ABC$  的周长为 16,  $\angle A$ ,  $\angle B$  的角平分线交点到  $AB$  的距离为 2, 则  $\triangle ABC$  的面积为\_\_\_\_\_

【答案】 16

【解析】

【分析】根据角平分线上的点到角的两边距离相等可得点  $P$  到  $\triangle ABC$  三边的距离相等, 再根据三角形的面积公式列式计算即可得解.

【详解】解: 设  $\angle A$  和  $\angle B$  的平分线相交于  $P$ ,  $P$  到边  $AB$  的距离为 2,

$\therefore$  点  $P$  到  $AC$ 、 $BC$  的距离为 2,

$\therefore \triangle ABC$  的周长为 16,

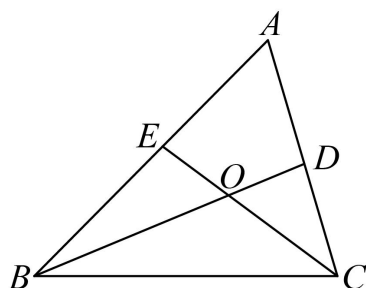
$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \times AB \times 2 + \frac{1}{2} \times BC \times 2 + \frac{1}{2} \times AC \times 2 = \frac{1}{2} \times (AB + BC + AC) \times 2 = \frac{1}{2} \times 16 \times 2 = 16.$$

故答案为 16.

【点睛】本题考查了角平分线上的点到角的两边距离相等的性质, 三角形的面积, 熟记性质并判断出点  $P$  到三角形三边的距离相等是解题的关键.

17. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $BD$  平分  $\angle ABC$  交  $AC$  于点  $D$ ,  $CE$  平分  $\angle ACB$  交  $AB$  于点  $E$ ,  $BD$ ,

$CE$  相交于点  $O$ , 若  $S_{\triangle BOE} : S_{\triangle BOC} = 3 : 5$ , 则  $\frac{OB}{OC}$  的值为\_\_\_\_\_.



【答案】  $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了角平分线基本性质以及全等三角形的证明及性质，能够正确做出辅助线是解题关键；  
在  $BC$  上取点  $H$ ，使  $BH = BE$ ，连接  $OH$ ， $DH$ ，过  $H$  作  $HI \perp BO$  于  $I$ ，过  $H$  作  $HJ \perp OC$  于  $J$ ，利用角平分线和三角形内角和求出  $\angle BOE = \angle DOC = 60^\circ$ ，证明  $\triangle HOI \cong \triangle HOJ$ ，得到  $HI = HJ$ ，则

$\frac{OB}{OC} = \frac{S_{\triangle BOH}}{S_{\triangle COH}}$ ，由  $\triangle EBO \cong \triangle HBO$  得到  $S_{\triangle BOE} = S_{\triangle BOH}$ ，再利用面积的和差关系和比例的性质即可得到答案.

【详解】解：如图，在  $BC$  上取点  $H$ ，使  $BH = BE$ ，连接  $OH$ ， $DH$ ，过  $H$  作  $HI \perp BO$  于  $I$ ，过  $H$  作  $HJ \perp OC$  于  $J$ ，

$$\therefore \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

$\therefore BD$  平分  $\angle ABC$  交  $AC$  于点  $D$ ， $CE$  平分  $\angle ACB$  交  $AB$  于点  $E$ ，

$$\therefore \angle OBC = \frac{1}{2} \angle ABC, \quad \angle OCB = \frac{1}{2} \angle ACB$$

$$\therefore \angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle ACB) = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BOE = \angle DOC = 60^\circ,$$

$\therefore BD$  平分  $\angle ABC$  交  $AC$  于点  $D$ ， $CE$  平分  $\angle ACB$  交  $AB$  于点  $E$ ，

$$\therefore \angle OBC = \angle OBE, \quad \angle OCB = \angle OCA,$$

在  $\triangle EBO$  和  $\triangle HBO$  中，

$$\begin{cases} BE = BH \\ \angle OBE = \angle OBH, \\ BO = BO \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EBO \cong \triangle HBO,$$

$$\therefore \angle BOH = \angle BOE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle COH = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ = \angle BOH,$$

$$\therefore OH = OH,$$

$$\therefore \triangle HOI \cong \triangle HOJ,$$

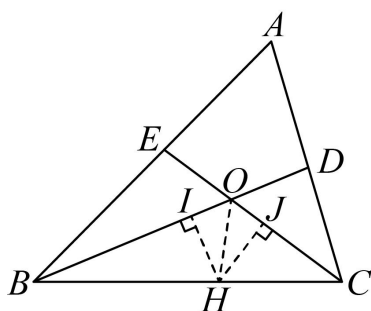
$$\therefore HI = HJ,$$

$$\therefore \frac{OB}{OC} = \frac{S_{\triangle BOH}}{S_{\triangle COH}},$$

$$\therefore \triangle EBO \cong \triangle HBO,$$

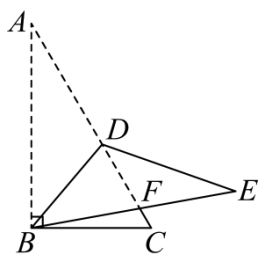
$$\therefore S_{\triangle BOE} = S_{\triangle BOH},$$

$$\therefore \frac{OB}{OC} = \frac{S_{\triangle BOH}}{S_{\triangle COH}} = \frac{S_{\triangle BOH}}{S_{\triangle BOC} - S_{\triangle BOH}} = \frac{S_{\triangle BOE}}{S_{\triangle BOC} - S_{\triangle BOE}} = \frac{3}{2}.$$



故答案为:  $\frac{3}{2}$ .

18. 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $\angle C = 60^\circ$ ,  $AB = 4\sqrt{3}$ ,  $BC = 4$ , 点  $D$  是  $AC$  上一动点, 连接  $BD$ , 将  $\triangle ABD$  沿  $BD$  折叠, 得到  $\triangle EBD$ , 其中, 点  $A$  落在点  $E$  处,  $BE$  交  $AC$  于点  $F$ , 当  $\triangle EFD$  为直角三角形时,  $EF$  的长度是\_\_\_\_\_.



【答案】  $4\sqrt{3} - 4$  或  $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了直角三角形性质, 等边三角形的判定和性质, 折叠变换的性质, 含  $30^\circ$  的直角三角形性质. 分两种情况: 当  $\angle EDF = 90^\circ$  时, 可证得  $\triangle BCF$  是等边三角形, 得出  $BF = BC = 4$ , 再由  $EF = BE - BF$ , 即可求得; 当  $\angle DFE = 90^\circ$  时, 利用直角三角形性质可得  $\therefore BF = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{3}$ , 再由  $EF = BE - BF$ , 即可求得  $EF$  长.

【详解】 解:  $\because \angle ABC = 90^\circ$ ,  $\angle C = 60^\circ$ ,  $AB = 4\sqrt{3}$ ,  $BC = 4$ ,

$\therefore \angle A = 30^\circ$ ,

由折叠知,  $\angle E = \angle A = 30^\circ$ ,  $EB = AB = 4\sqrt{3}$ ,

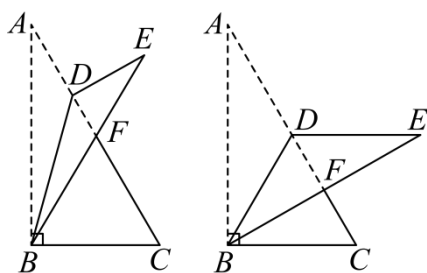
当  $\angle EDF = 90^\circ$  时,  $\angle DFE = 90^\circ - \angle E = 60^\circ$ ,

$\therefore \angle BFC = \angle DFE = 60^\circ = \angle C$ ,

$\therefore \triangle BCF$  是等边三角形,

$$\therefore BF = BC = 4,$$

$$\therefore EF = BE - BF = 4\sqrt{3} - 4;$$



当  $\angle DFE = 90^\circ$  时,  $\angle BFA = 180^\circ - \angle DFE = 90^\circ$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ABF$  中,

$$\because \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore BF = \frac{1}{2} AB = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore EF = EB - BF = 2\sqrt{3};$$

综上所述,  $EF$  的长度为  $4\sqrt{3} - 4$  或  $2\sqrt{3}$ .

故答案为:  $4\sqrt{3} - 4$  或  $2\sqrt{3}$ .

### 三、解答题: (本大题共 7 题, 共 46 分)

19. 计算:  $(1 - \sqrt{3})^2 - \frac{1}{\sqrt{3} + 2} + \left(\frac{2}{\sqrt{3} - 1}\right)^0$ .

**【答案】**  $-\sqrt{3} + 3$

**【解析】**

**【分析】** 本题考查了二次根式的混合运算、零指数幂, 熟练计算是解题的关键.

先按照完全平方公式, 分母有理化, 零指数幂计算, 再计算加减即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & (1 - \sqrt{3})^2 - \frac{1}{\sqrt{3} + 2} + \left(\frac{2}{\sqrt{3} - 1}\right)^0 \\ &= 1 - 2\sqrt{3} + 3 - \frac{\sqrt{3} - 2}{(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2)} + 1, \\ &= 1 - 2\sqrt{3} + 3 - (-\sqrt{3} + 2) + 1 \\ &= 1 - 2\sqrt{3} + 3 + \sqrt{3} - 2 + 1 \\ &= -\sqrt{3} + 3. \end{aligned}$$

20. 解方程:  $\frac{4x}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} = 1 - \frac{1}{x+2}$ .

【答案】  $x=1$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程，熟练掌握该知识点是关键. 方程两边同时乘  $x^2-4$  去分母化为一元二次方程再求解，最后检验即可得出结果.

【详解】 解:  $\frac{4x}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} = 1 - \frac{1}{x+2}$

去分母得:  $4x - 2(x+2) = x^2 - 4 - (x-2)$

去括号，移项得:  $x^2 - 3x + 2 = 0$

$\therefore (x-1)(x-2) = 0$

$\therefore x-1=0$  或  $x-2=0$ ,

$\therefore x_1=1, x_2=2$ ;

检验: 当  $x=1$  时,  $x^2-4 \neq 0$ ;

当  $x=2$  时,  $x^2-4=0$ ,

$\therefore$  分式方程的解为  $x=1$ .

21. 关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + mx - 1 = 0$  的一个根为  $\sqrt{5} - 2$ , 求  $m$  的值和另一根.

【答案】 另一个根为  $-\sqrt{5} - 2$ ,  $m$  的值为 4

【解析】

【分析】 本题考查了根与系数的关系: 若  $x_1, x_2$  是一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的两根时,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

设方程的另一个根为  $t$ , 根据根与系数的关系得到  $\sqrt{5} - 2 + t = -m$ ,  $(\sqrt{5} - 2)t = -1$ , 先求出  $t$  的值, 然后计算  $m$  的值.

【详解】 解: 设方程的另一个根为  $t$ ,

根据题意得  $\sqrt{5} - 2 + t = -m$ ,  $(\sqrt{5} - 2)t = -1$ ,

解得  $t = -\sqrt{5} - 2$ ,

所以  $\sqrt{5} - 2 + (-\sqrt{5} - 2) = -m$ ,

可得  $m = 4$ ,

即另一个根为  $-\sqrt{5} - 2$ ,  $m$  的值为 4.

22. 小杰和小丽分别从相距 24km 的  $A$ 、 $B$  两地同时同向出发, 小杰经过  $B$  地后再走 2 小时追上小丽, 小杰走的总路程相当于小丽走 8 小时的路程, 求小杰和小丽的速度分别是多少?

【答案】小杰和小丽的速度分别是 12km/h, 6km/h

【解析】

【分析】此题考查了分式方程的应用, 解一元二次方程, 解题的关键是根据题意列出方程组.

设小杰和小丽的速度分别是  $x\text{km/h}$ ,  $y\text{km/h}$ , 根据题意列出方程组求解即可.

【详解】解: 设小杰和小丽的速度分别是  $x\text{km/h}$ ,  $y\text{km/h}$

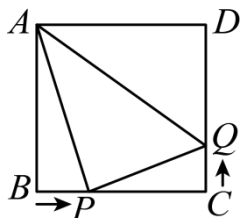
根据题意得, 
$$\begin{cases} 2x + 24 = 8y \\ \frac{8y}{x} = \frac{8y - 24}{y} \end{cases}$$

解得  $\begin{cases} x_1 = -4 \\ y_1 = 2 \end{cases}$  (舍去),  $\begin{cases} x_2 = 12 \\ y_2 = 6 \end{cases}$

经检验,  $\begin{cases} x_2 = 12 \\ y_2 = 6 \end{cases}$  是原方程的解

$\therefore$  小杰和小丽的速度分别是 12km/h, 6km/h.

23. 如图, 在正方形  $ABCD$  中,  $AB = 4\text{cm}$ , 点  $P$  从点  $B$  出发沿  $BC$  以  $2\text{cm/s}$  的速度向点  $C$  运动, 同时点  $Q$  从点  $C$  出发, 以  $1\text{cm/s}$  的速度沿  $CD$  向点  $D$  运动, 当点  $P$  到达终点后,  $P$ ,  $Q$  两点同时停止运动. 设点  $P$  运动的时间为  $t\text{s}$ .



(1) 问当  $t$  为多少时,  $AP = 2PQ$ ?

(2) 连接  $AQ$ , 是否存在时间  $t$ , 使得  $S_{\triangle APQ} = 4$ ? 若存在, 求出  $t$  的值; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1)  $t$  的值为 1

(2) 存在,  $t$  的值为 2

【解析】

【分析】本题考查了勾股定理, 一元二次方程, 正方形的性质, 三角形的面积, 掌握以上知识点是解本题的关键.

(1) 根据题意得  $BP = 2t$ ,  $CQ = t$ , 根据勾股定理可得  $16 + 4t^2 = 4 \times (16 - 16t + 5t^2)$ , 整理得  $t^2 - 4t + 3 = 0$ , 解出方程即可.

(2) 根据正方形的性质, 可得  $\angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ ,  $AB = BC = CD = AD = 4\text{cm}$ , 再利用三角形面积得出  $S_{\triangle APQ} = S_{\text{正方形}ABCD} - S_{\triangle ABP} - S_{\triangle CPQ} - S_{\triangle ADQ}$ , 代入数值列出方程求解即可.

【小问 1 详解】

解: 根据题意得  $BP = 2t$ ,  $CQ = t$ ,

$$\therefore AP^2 = AB^2 + BP^2 = 4^2 + (2t)^2 = 16 + 4t^2$$

$$PQ^2 = CP^2 + CQ^2 = (4 - 2t)^2 + t^2 = 16 - 16t + 5t^2,$$

$$\because AP = 2PQ.$$

$$\therefore AP^2 = 4PQ^2$$

$$16 + 4t^2 = 4 \times (16 - 16t + 5t^2), \text{ 即 } t^2 - 4t + 3 = 0,$$

$$\because \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4,$$

$$\therefore t = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2},$$

$$\therefore t_1 = 3, t_2 = 1.$$

当  $t_1 = 3$  时,  $BP = 2t = 6 > 4$ , 舍去,

$\therefore t$  的值为 1.

【小问 2 详解】

存在.

理由:  $\because$  四边形  $ABCD$  是正方形,

$$\therefore \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ, \quad AB = BC = CD = AD = 4\text{cm},$$

$$\therefore S_{\triangle APQ} = S_{\text{正方形}ABCD} - S_{\triangle ABP} - S_{\triangle CPQ} - S_{\triangle ADQ},$$

$$\therefore 4^2 - \frac{1}{2} \times 4 \times 2t - \frac{1}{2} \times (4-2t) \times t - \frac{1}{2} \times 4 \times (4-t) = 4,$$

$$\text{即 } 16 - 4t - (2-t)t - 2(4-t) = 4,$$

$$\therefore t^2 - 4t + 4 = 0, \quad \text{解得 } t = 2.$$

$$\therefore \text{当 } t \text{ 的值为 } 2 \text{ 时, } S_{\triangle APQ} = 4.$$

24. 已知,  $C$  为射线  $AD$  上一点,  $\angle DAP = \angle PBC$ ,  $PA = PB$ .

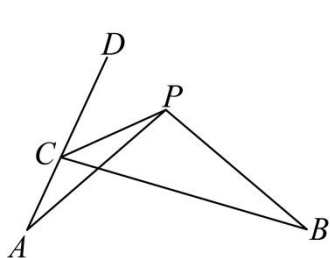


图1

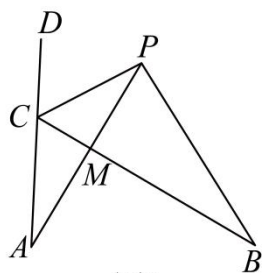


图2

(1) 证明:  $CP$  平分  $\angle DCB$ ;

(2) 若  $AP$  与  $BC$  交  $M$ ,  $\angle APB = 2\angle CPA$ , 证明:  $BM = AC + CM$ .

【答案】(1) 见解析;

(2) 见解析.

【解析】

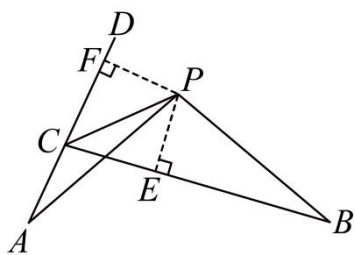
【分析】本题考查了全等三角形的判定和性质, 角平分线的判定和性质.

(1) 过点  $P$  作  $PF \perp AD$  于点  $F$ ,  $PE \perp BC$  于点  $E$ , 证明  $\triangle PAF \cong \triangle PBE$  (AAS) 推出  $PF = PE$ , 利用角平分线的判定定理即可证明  $CP$  平分  $\angle DCB$ ;

(2) 在  $CD$  上截取  $CE = CM$ , 连接  $PE$ . 证明  $\triangle PCE \cong \triangle PCM$  (SAS) 推出  $\angle EPC = \angle MPC$ , 再证明  $\triangle PBM \cong \triangle PAE$  (ASA), 即可证明  $BM = AC + CM$ .

【小问 1 详解】

证明: 过点  $P$  作  $PF \perp AD$  于点  $F$ ,  $PE \perp BC$  于点  $E$ ,



$$\therefore \angle PFA = \angle PEB = 90^\circ.$$

$$\because \angle DAP = \angle PBC, \quad PA = PB,$$

$$\therefore \triangle PAF \cong \triangle PBE \text{ (AAS)},$$

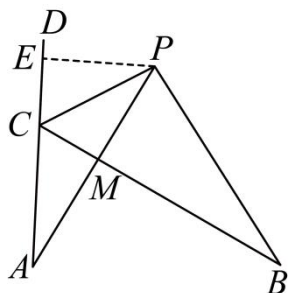
$$\therefore PF = PE.$$

$$\because PF \perp AD, \quad PE \perp BC,$$

$$\therefore CP \text{ 平分 } \angle DCB;$$

【小问 2 详解】

证明：在  $CD$  上截取  $CE = CM$ ，连接  $PE$ 。



由 (1) 得  $CP$  平分  $\angle DCB$ ,

$$\therefore \angle PCE = \angle PCM.$$

$$\because PC = PC,$$

$$\therefore \triangle PCE \cong \triangle PCM \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle EPC = \angle MPC.$$

$$\because \angle APB = 2\angle CPA,$$

$$\therefore \angle APB = \angle APE.$$

$$\because \angle DAP = \angle PBC, \quad PA = PB,$$

$$\therefore \triangle PBM \cong \triangle PAE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore BM = AE = AC + CE = AC + CM.$$

25. 已知  $ABC$  和  $\triangle CDE$  均为等腰直角三角形， $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ，点  $D$  是等腰直角三角形  $ABC$  斜

边  $AB$  所在直线上一点 (不与点  $B$  重合).

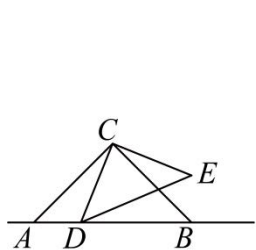


图1

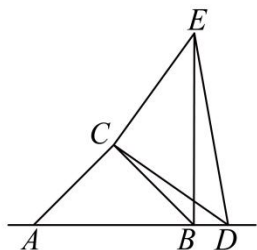
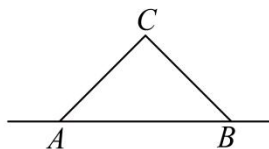


图2



(备用图)

- (1) 如图1, 当点  $D$  在线段  $AB$  上时, 直接写出  $DA^2$ ,  $DB^2$ ,  $DE^2$  三者之间的数量关系: \_\_\_\_\_;
- (2) 如图2, 当点  $D$  在线段  $AB$  的延长线上时, (1) 中的结论仍然成立吗? 若成立, 请你利用图2给出证明过程. 若不成立, 请说明理由.
- (3) 若  $AB = 3AD$ , 点  $M$  是  $DE$  中点, 请直接写出  $\frac{CM}{BC}$  的值.

**【答案】** (1)  $DA^2 + DB^2 = DE^2$

(2) 仍然成立, 证明见解析

(3)  $\frac{\sqrt{10}}{6}$  或  $\frac{\sqrt{34}}{6}$

**【解析】**

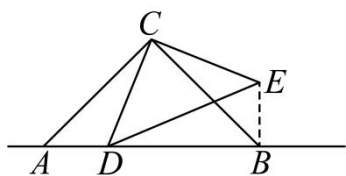
**【分析】** (1) 如图, 连接  $DE$ , 证明  $\triangle CAD \cong \triangle CBE$  (SAS) 得  $45^\circ = \angle CAD = \angle CBE$ ,  $DA = EB$ , 推出  $BDE$  为直角三角形, 利用勾股定理可得结论;

(2) (1) 中的结论仍然成立. 证明  $\triangle CAD \cong \triangle CBE$  (SAS) 得  $45^\circ = \angle CAD = \angle CBE$ ,  $DA = EB$ , 推出  $BDE$  为直角三角形, 利用勾股定理可得结论;

(3) 设  $AD = a$ , 则  $AB = 3a$ , 分三种情况: 当点  $D$  在线段  $AB$  上时; 当点  $D$  在线段  $BA$  的延长线上, 当点  $D$  在线段  $AB$  的延长线上时, 分别求解即可.

**【小问1详解】**

解: 如图, 连接  $DE$ ,



$\because \triangle ABC$  和  $\triangle CDE$  均为等腰直角三角形,  $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ,

$\therefore CA = CB$ ,  $CD = CE$ ,  $\angle CBA = \angle CAB = 45^\circ$ ,

$\angle ACD = \angle ACB - \angle BCD = \angle DCE - \angle BCD = \angle BCE$ ,

在  $\triangle CAD$  和  $\triangle CBE$  中,

$$\begin{cases} CA = CB \\ \angle ACD = \angle BCE, \\ CD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CAD \cong \triangle CBE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle CAD = 45^\circ = \angle CBE, \quad DA = EB,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle CBD + \angle CBE = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ, \text{ 即 } BDE \text{ 为直角三角形},$$

$$\therefore EB^2 + DB^2 = DE^2, \text{ 即 } DA^2 + DB^2 = DE^2,$$

$$\therefore DA^2, DB^2, DE^2 \text{ 三者之间的数量关系: } DA^2 + DB^2 = DE^2,$$

故答案为:  $DA^2 + DB^2 = DE^2$ ;

【小问 2 详解】

解: (1) 中的结论仍然成立.

证明:  $\because \triangle ABC$  和  $\triangle CDE$  均为等腰直角三角形,  $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ,

$$\therefore CA = CB, \quad CD = CE, \quad \angle CBA = \angle CAB = 45^\circ,$$

$$\angle ACD = \angle ACB + \angle BCD = \angle DCE + \angle BCD = \angle BCE,$$

在  $\triangle CAD$  和  $\triangle CBE$  中,

$$\begin{cases} CA = CB \\ \angle ACD = \angle BCE, \\ CD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CAD \cong \triangle CBE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle CAD = 45^\circ = \angle CBE, \quad DA = EB,$$

$$\therefore \angle DBE = 180^\circ - (\angle CBD + \angle CBE) = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ, \text{ 即 } BDE \text{ 为直角三角形},$$

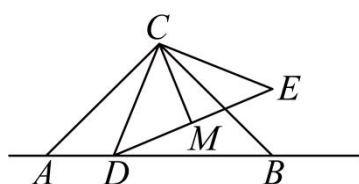
$$\therefore EB^2 + DB^2 = DE^2,$$

$$\text{即 } DA^2 + DB^2 = DE^2;$$

【小问 3 详解】

设  $AD = a$ , 则  $AB = 3a$ ,

当点  $D$  在线段  $AB$  上时, 如图,



$$\therefore BD = AB - AD = 3a - a = 2a,$$

$$\text{由 (1) 知: } DA^2 + DB^2 = DE^2,$$

$$\therefore DE = \sqrt{DA^2 + DB^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a,$$

$\therefore \triangle ABC$  和  $\triangle CDE$  均为等腰直角三角形,  $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ , 点  $M$  是  $DE$  中点,

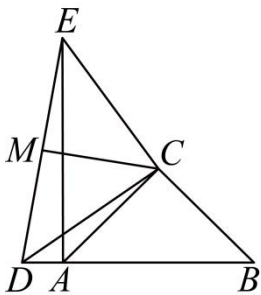
$$\therefore CA = CB, \quad CD = CE,$$

$$\therefore 3a = AB = \sqrt{CA^2 + CB^2} = \sqrt{CB^2 + CB^2} = \sqrt{2}CB, \quad DM = EM,$$

$$\therefore CB = \frac{3\sqrt{2}}{2}a, \quad CM = \frac{1}{2}DE = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

$$\therefore \frac{CM}{BC} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}a}{\frac{3\sqrt{2}}{2}a} = \frac{\sqrt{10}}{6};$$

当点  $D$  在线段  $BA$  的延长线上, 如图,



$$\therefore BD = AD + AB = a + 3a = 4a,$$

$\therefore \triangle ABC$  和  $\triangle CDE$  均为等腰直角三角形,  $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ,

$$\therefore CA = CB, \quad CD = CE, \quad \angle CBA = \angle CAB = 45^\circ,$$

$$\angle ACE = \angle DCE + \angle ACD = \angle ACB + \angle ACD = \angle BCD,$$

在  $\triangle CAE$  和  $\triangle CBD$  中,

$$\begin{cases} CA = CB \\ \angle ACE = \angle BCD, \\ CE = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CAE \cong \triangle CBD (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle CAE = 45^\circ = \angle CBD, \quad EA = DB = 4a,$$

$$\therefore \angle DAE = 180^\circ - (\angle CAB + \angle CAE) = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ, \text{ 即 } \triangle ADE \text{ 为直角三角形,}$$

$$\therefore DE = \sqrt{DA^2 + EA^2} = \sqrt{DA^2 + DB^2} = \sqrt{a^2 + (4a)^2} = \sqrt{17}a,$$

$\therefore \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ,  $CA = CB$ ,  $CD = CE$ , 点  $M$  是  $DE$  中点,

$$\therefore 3a = AB = \sqrt{CA^2 + CB^2} = \sqrt{CB^2 + CB^2} = \sqrt{2}CB, \quad DM = EM,$$

$$\therefore CB = \frac{3\sqrt{2}}{2}a, \quad CM = \frac{1}{2}DE = \frac{\sqrt{17}}{2}a,$$

$$\therefore \frac{CM}{BC} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{2}a}{\frac{3\sqrt{2}}{2}a} = \frac{\sqrt{34}}{6},$$

当点  $D$  在线段  $AB$  的延长线上时,  $AD > AB$ , 不符合题意;

综上所述,  $\frac{CM}{BC}$  的值为  $\frac{\sqrt{10}}{6}$  或  $\frac{\sqrt{34}}{6}$ .

**【点睛】** 本题考查等腰直角三角形的性质, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理, 等腰三角形的性质等知识点, 利用分类讨论的思想解决问题是解题的关键.