

2025 学年第一学期八年级数学学科第一次阶段练习

(考试时间 90 分钟 满分 150 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 共 24 分)

1. 下列各选项中, $\sqrt{a^2 - b^2}$ 的有理化因式是 ()

- A. $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$ B. $\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}$ C. $\sqrt{a^2 + b^2}$ D. $\sqrt{a^2 - b^2}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了有理化因式, 根据 $(\sqrt{a^2 - b^2}) \times (\sqrt{a^2 - b^2}) = a^2 - b^2$ 进行分析, 即可作答.

【详解】解: 依题意, $(\sqrt{a^2 - b^2}) \times (\sqrt{a^2 - b^2}) = a^2 - b^2$,

则 $\sqrt{a^2 - b^2}$ 的有理化因式是 $\sqrt{a^2 - b^2}$,

故选: D

2. 下列各组二次根式中, 是同类二次根式的是 ()

- A. $-\sqrt{\frac{1}{8}}$ 和 $\sqrt{72}$ B. $\sqrt{12}$ 和 $b\sqrt{18}$ C. $-\sqrt{8x}$ 和 $\sqrt{x^5}$ D. $\sqrt{xy}$ 和 $\sqrt{x^4y^3}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查同类二次根式的定义, 解题的关键是将二次根式化为最简二次根式后, 判断被开方数是否相同.

将每个选项中的二次根式化为最简二次根式, 再比较被开方数是否相同, 从而确定是否为同类二次根式.

【详解】解: A、 $-\sqrt{\frac{1}{8}} = -\sqrt{\frac{1 \times 2}{8 \times 2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$. 两者最简二次根式的被开方数都是 2,

属于同类二次根式;

B、 $\sqrt{12} : \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$; $b\sqrt{18} = b\sqrt{9 \times 2} = 3b\sqrt{2}$. 被开方数分别为 3 和 2, 不是同类二次根式;

C、 $-\sqrt{8x} = -2\sqrt{2x}$; $\sqrt{x^5} = x^2\sqrt{x}$. 被开方数分别为 $2x$ 和 x , 不是同类二次根式;

D、 $\sqrt{xy}$ (已是最简); $\sqrt{x^4y^3} = x^2y\sqrt{y}$, 被开方数分别为 xy 和 y , 不是同类二次根.

故选: A.

3. 已知 $(n^2 - 4)y^2 + (n - 2)y - 2 = 0$ 是关于 y 的一元二次方程, 则 n 满足的条件是 ()

A. $n = \pm 2$

B. $n \neq \pm 2$

C. $n \neq -2$

D. $n \neq 2$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的定义，根据 $(n^2 - 4)y^2 + (n - 2)y - 2 = 0$ 是关于 y 的一元二次方程，则 $n^2 - 4 \neq 0$ ，解得 $n \neq \pm 2$ ，即可作答.

【详解】解： $\because (n^2 - 4)y^2 + (n - 2)y - 2 = 0$ 是关于 y 的一元二次方程，

$\therefore n^2 - 4 \neq 0$ ，

$\therefore n^2 \neq 4$ ，

则 $n \neq \pm 2$ ，

故选：B.

4. 下列说法中正确的有（ ）个.

①无理数与无理数的积一定是无理数 ②无理数与无理数的和可能是有理数.

③无理数一定带根号 ④ $\sqrt{216}$ 是无理数 ⑤无理数包括正无理数、0 和负无理数

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了实数的运算，有理数与无理数的概念，准确掌握无理数的相关性质是解题的关键. 利用有理数，无理数的意义对每个小题的说法进行判定即可得出结论.

【详解】解：①无理数与无理数的积可能是有理数，例如 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ ，而 2 是有理数，原说法错误，不符合题意；

②无理数与无理数的和可能是有理数，例如 $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ ，说法正确，符合题意；

③无理数可能不带根号，例如 π ，原说法错误，不符合题意；

④ $\sqrt{216} = 6\sqrt{6}$ 是无理数，正确，符合题意；

⑤无理数包括正无理数和负无理数，而 0 是有理数，原说法错误，不符合题意；

综上分析可知，正确的有 2 个.

故选：B.

5. 若 $(\sqrt{2} - 1)a + \sqrt{8}b = -2$ ，则 a 、 b 的值为（ ）

- A. $a=2, b=1$ B. $a=-2, b=-1$ C. $a=2, b=-1$ D. $a=-2, b=1$

【答案】 C

【解析】

【分析】 此题考查了二次根式的加法，将原方程化简，合并同类项后，分离无理数部分和有理数部分，即可求解.

【详解】 解： $(\sqrt{2}-1)a+\sqrt{8}b$

$$=a\sqrt{2}-a+2\sqrt{2}b$$

$$=(a+2b)\sqrt{2}-a$$

$$=-2$$

$$\therefore a+2b=0, -a=-2$$

$$\therefore a=2, b=-1$$

故选： C.

6. 已知数轴上有 A 、 B 两点，分别表示的数为 $-2\sqrt{3}$ 和 -1 ，若点 C 和点 B 关于点 A 对称，则点 C 表示的数为 ()

- A. $1+4\sqrt{3}$ B. $-1-4\sqrt{3}$ C. $1-4\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}-1$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了求数轴上两点之间的距离及实数在数轴上的表示，由题意可知 A 、 B 两点之间的距离是 $2\sqrt{3}-1$ ，点 C 和点 B 关于点 A 对称，进而求出 C 的坐标，熟练掌握数轴上中点的意义是解题关键.

【详解】 解： $\because A, B$ 两点表示的数为 $-2\sqrt{3}$ 和 -1 ,

$$\therefore A, B \text{ 两点之间的距离是 } -1 - (-2\sqrt{3}),$$

$$\therefore C \text{ 点表示 } -2\sqrt{3} - (2\sqrt{3} - 1) = 1 - 4\sqrt{3},$$

故选： C.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 4 分，共 48 分)

7. -125 的立方根是 ____.

【答案】 -5

【解析】

【分析】根据立方根的定义计算即可

【详解】因为 $(-5)^3 = -125$,

所以-125 的立方根是-5

故答案为: -5

【点睛】本题考查了求一个数的立方根, 熟知立方根的定义是解决本题的关键

8. $\sqrt{196}$ 的算术平方根为_____.

【答案】 $\sqrt{14}$

【解析】

【分析】本题考查了平方根, 求出 $\sqrt{196} = 14$, 即可得出结论.

【详解】解: $\because \sqrt{196} = 14$,

又 $\because 14$ 的算术平方根是 $\sqrt{14}$,

$\therefore \sqrt{196}$ 的算术平方根为 $\sqrt{14}$.

故答案为: $\sqrt{14}$.

9. 用科学记数法表示的数 3.724×10^{-8} , 其小数点与左起第一个非零数字之间有_____个 0.

【答案】 7

【解析】

【分析】本题考查科学记数法表示较小的数, 将科学记数法表示的较小的数还原, 即可得出答案.

【详解】解:

$$3.724 \times 10^{-8} = 0.00000003724,$$

故小数点与左起第一个非零数字之间有 7 个 0,

故答案为: 7.

10. $\sqrt{\frac{3}{x-3}}$ 有意义的条件是_____.

【答案】 $x > 3$

【解析】

【分析】本题主要考查二次根式、分式有意义的条件, 根据被开方数大于等于 0, 分母不为 0, 列式计算即可得解.

【详解】解：由题意得，
$$\begin{cases} x-3 \neq 0 \\ \frac{3}{x-3} \geq 0 \end{cases},$$

解得 $x > 3$.

故答案为： $x > 3$.

11. 比较大小： $\frac{\sqrt{3}}{3}$ _____ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (请填 $>$ 、 $<$ 或 $=$).

【答案】 $>$

【解析】

【分析】 本题考查了实数的大小比较，熟练掌握平方运算比较大小是解题的关键.

将两数分别平方后，再比较大小即可.

【详解】解： $\because \frac{\sqrt{3}}{3} > 0, \frac{\sqrt{5}}{5} > 0,$

$$\therefore \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}, \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{5},$$

$$\therefore \frac{1}{3} > \frac{1}{5},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

故答案为： $>$.

12. 不等式 $\sqrt{2}x+1 > \sqrt{3}x$ 的解集是_____.

【答案】 $x < \sqrt{3} + \sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解不等式，熟练掌握解不等式的一般步骤，是解题的关键. 先移项，合并同类项，然后将系数化为 1 即可.

【详解】解： $\sqrt{2}x+1 > \sqrt{3}x,$

移项，合并同类项得： $(\sqrt{2}-\sqrt{3})x > -1,$

系数化为 1 得： $x < \sqrt{3} + \sqrt{2}.$

故答案为： $x < \sqrt{3} + \sqrt{2}.$

13. 已知 $\sqrt[3]{13} \approx 2.35$, 那么 $\sqrt[3]{-0.013} \approx$ _____.

【答案】 -0.235

【解析】

【分析】 本题考查了立方根, 解决本题的关键是熟记立方根的性质. 根据立方根的性质, 即可解答.

【详解】 解: $\because \sqrt[3]{13} \approx 2.35$,

$$\therefore \sqrt[3]{-0.013} = \sqrt[3]{-13 \times 10^{-3}} = -\sqrt[3]{13} \times \sqrt[3]{10^{-3}} \approx -2.35 \times 0.1 = -0.235.$$

故答案为: -0.235 .

14. 化简: $\sqrt{\frac{xy}{x^2}} (x < 0) =$ _____.

【答案】 $-\frac{\sqrt{xy}}{x}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的定义和化简, 熟练掌握二次根式的化简是解题关键.

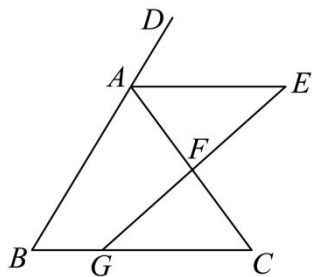
直接根据二次根式的化简方法即可得.

【详解】 解: $\because x < 0$,

$$\therefore \sqrt{\frac{xy}{x^2}} = -\frac{\sqrt{xy}}{x}$$

故答案为: $-\frac{\sqrt{xy}}{x}$.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知点 D 在线段 AB 的反向延长线上, 过 AC 的中点 F 作线段 OE 交 $\angle DAC$ 的平分线于 E 、交 BC 于 G , 且 $AE \parallel BC$, 如果 $AE = 8$, $AB = 10$, $GC = 2BG$, 那么 $\triangle ABC$ 的周长是 _____.



【答案】 32

【解析】

【分析】 本题主要考查了全等三角形的判定与性质、平行线的性质, 角平分线的定义, 等角对等边, 对顶

角的性质等，熟练掌握全等三角形的判定与性质是解题的关键.

首先根据平行线的性质证明 $\angle B = \angle DAE$ ， $\angle C = \angle CAE$ ，然后结合角平分线的定义可推得 $\angle B = \angle C$ ，根据等角对等边得出 $AB = AC$ ，结合对顶角相等和全等三角形的判定证明 $\triangle AEF \cong \triangle CFG$ ，根据全等三角形的性质得出 CG 的长，然后可求得 BC 的长，于是可求得 ABC 的周长.

【详解】解： $\because AE \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle B = \angle DAE, \quad \angle C = \angle CAE.$$

$$\because AE \text{ 平分 } \angle DAC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle CAE.$$

$$\therefore \angle B = \angle C.$$

$$\therefore AB = AC = 10,$$

$$\because F \text{ 是 } AC \text{ 的中点},$$

$$\therefore AF = CF.$$

$$\because AE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle C = \angle CAE.$$

由对顶角相等可知： $\angle AFE = \angle GFC$.

在 $\triangle AFE$ 和 $\triangle CFG$ 中，

$$\begin{cases} \angle CAE = \angle C \\ AF = CF \\ \angle AFE = \angle GFC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AFE \cong \triangle CFG (\text{ASA}),$$

$$\therefore AE = GC = 8.$$

$$\because GC = 2BG,$$

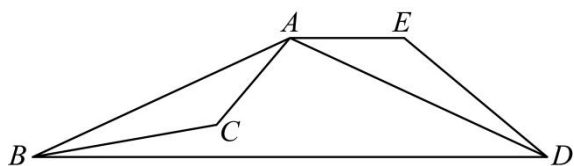
$$\therefore BG = 4.$$

$$\therefore BC = BG + GC = 8 + 4 = 12,$$

$$\therefore ABC \text{ 的周长} = AB + AC + BC = 10 + 10 + 12 = 32.$$

故答案为：32.

16. 如图， $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ ，且 $AE \parallel BD$ ， $\angle BAD = 130^\circ$ ，则 $\angle BAC$ 的度数是_____°.



【答案】 25

【解析】

【分析】 本题主要考查了全等三角形的性质，等腰三角形的性质，平行线的性质，熟知全等三角形对应角相等是解题的关键. 先根据全等三角形的性质得出 $AB = AD$ ， $\angle BAC = \angle DAE$ ，再根据等腰三角形的性质得出 $\angle ABD = \angle ADB = \frac{1}{2}(180^\circ - 130^\circ) = 25^\circ$ ，根据平行线的性质得到 $\angle DAE = \angle ADB = 25^\circ$ ，即可得出答案.

【详解】 解： $\because \triangle ABC \cong \triangle ADE$ ，

$\therefore AB = AD$ ， $\angle BAC = \angle DAE$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle ADB$ ，

$\because \angle BAD = 130^\circ$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle ADB = \frac{1}{2}(180^\circ - 130^\circ) = 25^\circ$ ，

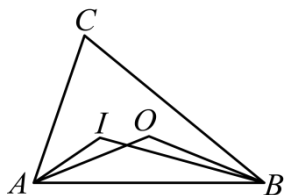
$\because AE \parallel BD$ ，

$\therefore \angle DAE = \angle ADB = 25^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle DAE = 25^\circ$ ，

故答案为： 25 .

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， I 是三角形三条角平分线的交点， O 是三边垂直平分线的交点，连接 AI ， BI ， AO ， BO ，若 $\angle AOB = 140^\circ$ ，则 $\angle AIB$ 的度数是_____°.

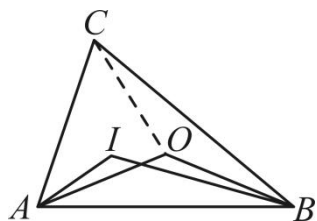


【答案】 125

【解析】

【分析】 连接 CO ，根据三角形内角和定理求出 $\angle OAB + \angle OBA$ ，根据周角的定义求出 $\angle AOC + \angle BOC$ ，根据线段垂直平分线的性质得到 $OA = OC$ ， $OB = OC$ ，进而得到 $\angle OCA = \angle OAC$ ， $\angle OCB = \angle OBC$ ，求出 $\angle CAB + \angle CBA$ ，根据角平分线的定义、三角形内角和定理计算，得到答案.

【详解】 解： 如图所示，连接 CO ，



$$\therefore \angle AOB = 140^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB + \angle OBA = 180^\circ - \angle AOB = 40^\circ,$$

$$\angle AOC + \angle BOC = 360^\circ - \angle AOB = 220^\circ,$$

$\therefore O$ 是三边垂直平分线的交点,

$$\therefore OA = OC, OB = OC,$$

$$\therefore \angle OCA = \angle OAC, \angle OCB = \angle OBC,$$

$$\therefore \angle OAC + \angle OCA = 180^\circ - \angle AOC, \angle OCB + \angle OBC = 180^\circ - \angle BOC,$$

$$\therefore \angle OAC + \angle OCA + \angle OCB + \angle OBC = 180^\circ - \angle BOC + 180^\circ - \angle AOC = 140^\circ$$

$$\therefore \angle OCA + \angle OCB = 70^\circ, \text{ 即 } \angle ACB = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB + \angle CBA = 180^\circ - \angle ACB = 110^\circ,$$

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中, I 是三角形三条角平分线的交点

$$\therefore AI \text{ 平分 } \angle BAC, BI \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle IAB = \frac{1}{2} \angle CAB, \angle IBA = \frac{1}{2} \angle CBA,$$

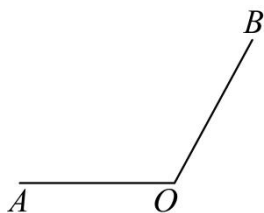
$$\therefore \angle IAB + \angle IBA = \frac{1}{2} (\angle CAB + \angle CBA) = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle AIB = 180^\circ - \angle IAB - \angle IBA = 125^\circ,$$

故答案为: 125.

【点睛】本题主要考查的是线段的垂直平分线的性质、三角形内角和定理, 等边对等角等, 掌握线段的垂直平分线上的点到线段的两个端点的距离相等是解题的关键.

18. 如图, 已知 $\angle AOB = 120^\circ$, 在平面内取一点 C , 满足 $\angle AOC = \alpha^\circ$ ($120 < \alpha < 180$), 以 OC 为边作等边 $\triangle COD$ (OD 在 OC 的逆时针 60° 方向上), 作 OM 平分 $\angle BOC$, $\angle DOM$ 的度数是_____°. (用含 α 的代数式表示)

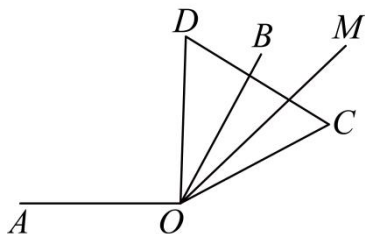


【答案】 $120 - \frac{1}{2}a$ 或 $\frac{1}{2}a - 60$

【解析】

【分析】 本题主要考查了角平分线定义，等边三角形的性质，解题的关键是熟练掌握等边三角形的性质．分两种情况讨论：当 OD 在 $\angle AOB$ 的内部时，当 OD 在 $\angle AOB$ 的外部时，分别画出图形，求出结果即可．

【详解】 解：当 OD 在 $\angle AOB$ 的内部时，如图所示：



$\because \triangle COD$ 为等边三角形，

$\therefore \angle COD = 60^\circ$ ，

$\because \angle AOC = \alpha^\circ$ ($120 < \alpha < 180$)， $\angle AOB = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle BOC = \angle AOC - \angle AOB = \alpha^\circ - 120^\circ$ ，

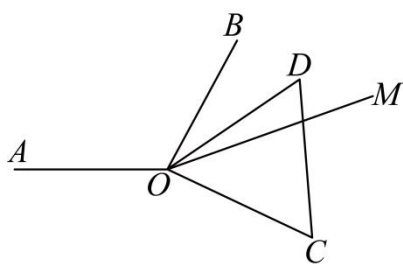
$\therefore \angle BOD = \angle COD - \angle BOC = 60^\circ - (\alpha^\circ - 120^\circ) = 180^\circ - \alpha^\circ$ ，

$\because OM$ 平分 $\angle BOC$ ，

$\therefore \angle BOM = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \alpha^\circ - 60^\circ$ ，

$\therefore \angle DOM = \angle BOD + \angle BOM = 180^\circ - \alpha^\circ + \frac{1}{2} \alpha^\circ - 60^\circ = 120^\circ - \frac{1}{2} \alpha^\circ$ ；

当 OD 在 $\angle AOB$ 的外部时，如图所示：



$\because \triangle COD$ 为等边三角形，

$\therefore \angle COD = 60^\circ$ ，

$\because \angle AOC = \alpha^\circ$ ($120 < \alpha < 180$)， $\angle AOB = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle BOC = 360^\circ - \angle AOC - \angle AOB = 360^\circ - \alpha^\circ - 120^\circ = 240^\circ - \alpha^\circ$ ，

$\therefore \angle BOD = \angle BOC - \angle DOC = 240^\circ - \alpha^\circ - 60^\circ = 180^\circ - \alpha^\circ$ ，

$\because OM$ 平分 $\angle BOC$ ，

$$\therefore \angle BOM = \frac{1}{2} \angle BOC = 120^\circ - \frac{1}{2} a^\circ,$$

$$\therefore \angle DOM = \angle BOM - \angle BOD = 120^\circ - \frac{1}{2} a^\circ - (180^\circ - a^\circ) = \frac{1}{2} a^\circ - 60^\circ;$$

综上所述可知: $\angle DOM$ 的度数是 $120 - \frac{1}{2}a$ 或 $\frac{1}{2}a - 60$.

故答案为: $120 - \frac{1}{2}a$ 或 $\frac{1}{2}a - 60$.

三、解答题: (19-22 题各 10 分, 23-24 题各 12 分, 25 题 14 分, 共 78 分)

19. 计算:

$$(1) (\sqrt{24} + \sqrt{0.5}) - \left(\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{6} \right)$$

$$(2) \frac{2}{b} \sqrt{ab^2} \times \left(-\frac{3}{2} \sqrt{a^3b} \right) \div 3 \sqrt{\frac{b}{a}} \quad (a > 0, b > 0)$$

【答案】 (1) $3\sqrt{6} + \frac{\sqrt{2}}{4}$

(2) $-a^2\sqrt{a}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式混合运算, 二次根式性质, 熟练掌握二次根式性质, 是解题的关键.

(1) 先根据二次根式性质进行化简, 然后根据二次根式加减混合运算法则, 进行计算即可;

(2) 先根据二次根式性质进行化简, 然后根据二次根式乘除混合运算法则, 进行计算即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } (\sqrt{24} + \sqrt{0.5}) - \left(\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{6} \right)$$

$$= 2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{6}$$

$$= 3\sqrt{6} + \frac{\sqrt{2}}{4};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \frac{2}{b} \sqrt{ab^2} \times \left(-\frac{3}{2} \sqrt{a^3b} \right) \div 3 \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$= \frac{2}{b} \times b\sqrt{a} \times \left(-\frac{3}{2} a\sqrt{ab} \right) \div \frac{3\sqrt{ab}}{a}$$

$$= 2\sqrt{a} \times \left(-\frac{3}{2}a\sqrt{ab}\right) \times \frac{a}{3\sqrt{ab}}$$

$$= -a^2\sqrt{a}.$$

20. 解方程:

$$(1) \quad 2x^2 - 18 = 0;$$

$$(2) \quad (x+2)^2 = 2x+4.$$

【答案】 (1) $x = \pm 3$

$$(2) \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -2$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程，熟练掌握解一元二次方程的一般方法，是解题的关键.

(1) 先移项，然后方程两边同除以 2，再开平方即可；

(2) 用因式分解法解一元二次方程即可；

【小问 1 详解】

$$\text{解: } 2x^2 - 18 = 0,$$

$$\text{移项得: } 2x^2 = 18,$$

$$\text{系数化为 1 得: } x^2 = 9,$$

$$\text{开平方得: } x = \pm 3;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } (x+2)^2 = 2x+4,$$

$$\text{移项得: } (x+2)^2 - 2(x+2) = 0,$$

$$\text{因式分解得: } x(x+2) = 0,$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x+2 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = 0, \quad x_2 = -2.$$

$$21. \text{ 已知若 } a = \frac{1}{2+\sqrt{3}}, \quad b = \frac{1}{2-\sqrt{3}}, \text{ 求 } a^2 - 5ab + b^2 \text{ 的值.}$$

【答案】 9

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的混合运算, 熟练掌握运算法则是解答本题的关键. 先化简 a 和 b , 再求出 $a+b$ 和 ab 的值, 然后根据完全平方公式把 $a^2 - 5ab + b^2$ 变形后代入计算.

【详解】解: $\because a = \frac{1}{2+\sqrt{3}}, b = \frac{1}{2-\sqrt{3}},$

$$\therefore a = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}, b = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 2+\sqrt{3},$$

$$\therefore a+b = 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3} = 4, ab = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1,$$

$$\therefore a^2 - 5ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 7ab = (a+b)^2 - 7ab = 4^2 - 7 = 9.$$

22. 小明回家完成王老师布置的数学作业, 如下: 用计算器计算

① $\sqrt{9^2+19}$; ② $\sqrt{99^2+199}$; ③ $\sqrt{999^2+1999}$; ④ $\sqrt{9999^2+19999}$.

小明身边没有计算器, 而直接计算很复杂, 通过思考后, 他发现可以按如下解法去完成:

$$\sqrt{9^2+19} = \sqrt{9^2+2 \times 9+1} = \sqrt{(9+1)^2} = \sqrt{10^2} = 10,$$

$$\sqrt{99^2+199} = \sqrt{99^2+2 \times 99+1} = \sqrt{(99+1)^2} = \sqrt{100^2} = 100,$$

$$\sqrt{999^2+1999} = \sqrt{999^2+2 \times 999+1} = \sqrt{(999+1)^2} = \sqrt{1000^2} = 1000,$$

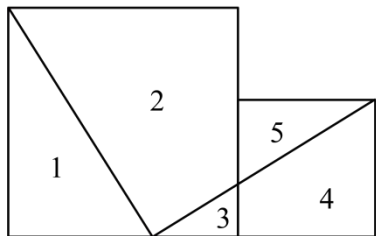


图1

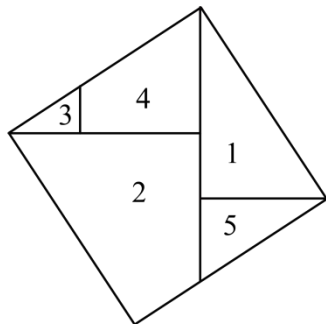


图2

(1) 观察上述解法, 直接写出结果: $\sqrt{9999^2+19999} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 试用小明的方法求解出 $\sqrt{49^2+99}$ 的结果;

(3) 根据上面解题方法解决下面的数学问题: 如图, 已知图 1 是边长为 756 和 $\sqrt{1513}$ 的两个正方形, 图 2 是由图 1 通过切割后拼成的一个大正方形, 请求出大正方形的边长.

【答案】(1) 10000

(2) 50 (3) 757

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式的应用，二次根式的性质，灵活运用完全平方公式对被开方数变形是解题的关键.

(1) 根据题干提供的方法将 $9999^2 + 19999$ 变形为 $9999^2 + 2 \times 9999 + 1$ ，根据完全平方公式得出 $(9999 + 1)^2$ ，然后再进行求解即可；

(2) 利用完全平方公式对 $49^2 + 99$ 变形，然后根据二次根式的性质求解；

(3) 根据图 1 和图 2 的面积相等可得 $756^2 + 1513 = a^2$ ，然后利用 (1) 中方法求出 a 即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: } \sqrt{9999^2 + 19999} &= \sqrt{9999^2 + 2 \times 9999 + 1} \\&= \sqrt{(9999 + 1)^2} \\&= \sqrt{10000^2} \\&= 10000;\end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \sqrt{49^2 + 99} = \sqrt{49^2 + 2 \times 49 \times 1 + 1^2} = \sqrt{(49 + 1)^2} = 50;$$

【小问 3 详解】

解: 设大正方形的边长为 a ,

$$\text{由图 1 和图 2 的面积相等可得: } 756^2 + (\sqrt{1513})^2 = a^2,$$

$$\text{即 } 756^2 + 1513 = a^2,$$

$$\therefore a = \sqrt{756^2 + 1513} = \sqrt{756^2 + 2 \times 756 \times 1 + 1^2} = \sqrt{(756 + 1)^2} = 757,$$

即大正方形的边长为 757.

23. (1) 如图 1, ABC 和 ADE 是等腰直角三角形, $AB < AD$, $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$, 连接 BD , CE , 构建“手拉手”模型, 可证明 $BD =$ _____; 在此基础上, 我们把如图 2 的画斜线部分称为“蝴蝶型”, 可通过证明得到 $BD \perp$ _____;

(2) 如图 3, ABC 和 ADE 是等边三角形, $AD < AB$, 连接 BD , CE , BD 的延长线与 CE 相交于点 F . 求 $\angle BFC$ 的度数;

(3) 如图 4, 在 ABC 和 ADE 中, $AB = AC$, $AD = AE$, $AD < AB$, $\angle BAC = \angle DAE = 40^\circ$, 连接 BD , CE . 则直线 BD 与直线 CE 的夹角为 _____ 度.

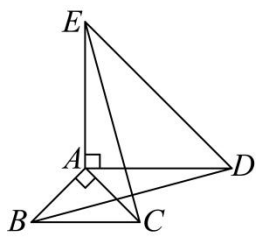


图1

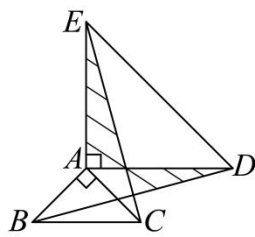


图2

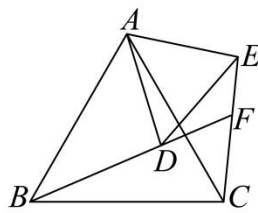


图3

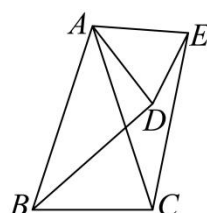


图4

【答案】 (1) CE , CE ; (2) 60° ; (3) 40

【解析】

【分析】 本题主要考查全等三角形的判定与性质等知识，能够在图中找到全等三角形并证明是解题关键；

(1) 先通过 SAS 证得 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$ ，进而通过全等三角形性质可得到 $BD = CE, BD \perp CE$ ；

(2) 先证明 $\angle BAD = \angle CAE$ ，再证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ 可得 $BD = CE$ ，再根据三角形内角和定理可得；

(3) 方法同 (2)，需要先证 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，然后再根据全等三角形性质即可求解.

【详解】 解：(1) $\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAC + \angle CAD = \angle EAD + \angle CAD$ ，即 $\angle BAD = \angle CAE$ ，

$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AB = AC, EA = DA$ ，

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE (SAS)$ ，

$\therefore BD = CE, \angle BDA = \angle CEA$ ，

如图， AD 与 EC 交点为 H ， BD 与 EC 交点为 M ，

$\therefore \angle AHE = \angle CHD$ ，

$\therefore \angle AHE + \angle CEA = \angle CHD + \angle BDA$ ，

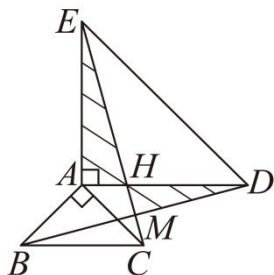
$\because \angle EAD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AHE + \angle CEA = \angle CHD + \angle BDA = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BMC = \angle DMH = 90^\circ$ ，

$\therefore BD \perp CE$ ，

故答案为： CE, CE 。



(2) $\because ABC$ 和 ADE 是等边三角形,

$$\therefore AB = AC, AD = AE, \angle BAC = \angle DAE = 60^\circ,$$

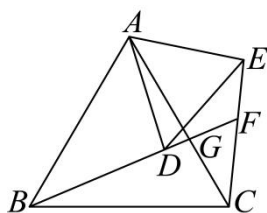
$$\therefore \angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC, \text{ 即 } \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (SAS),$$

$$\therefore BD = CE, \angle ABD = \angle ACE,$$

设 BF 与 AC 相交于点 G , 则 $\angle AGB = \angle FGC$,

$$\therefore \angle BFC = \angle BAC = 60^\circ;$$



(3) 延长 BD 交 CE 于点 F , 设 BD, AC 交于点 G ,

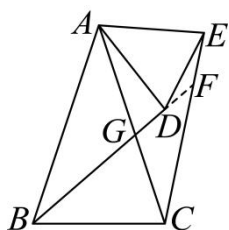


图4

$$\because \angle BAC = \angle DAE = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle DAC = \angle DAC + \angle DAE,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\text{又 } AB = AC, AD = AE,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (SAS),$$

$$\therefore BD = CE, \angle ABD = \angle ACE,$$

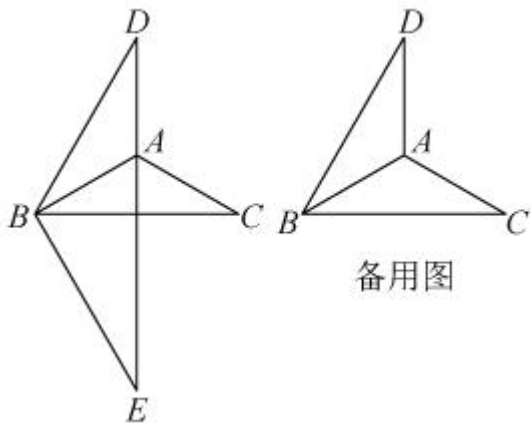
$$\because \angle AGB = \angle CGF,$$

$$\therefore \angle CFB = \angle BAC = 40^\circ,$$

即直线 BD 与直线 CE 的夹角为 40° ;

故答案为: 40.

24. 定义: 一个内角等于另一个内角两倍的三角形, 叫做“倍角三角形”.



(1) 下列三角形一定是“倍角三角形”的有_____ (只填写序号).

- ①顶角是 30° 的等腰三角形;
- ②等腰直角三角形;
- ③有一个角是 30° 的直角三角形.

(2) 如图1, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC \geq 90^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 沿边 AB 所在的直线翻折 180° 得到 $\triangle ABD$, 延长 DA 到点 E , 连接 BE .

- ①若 $BC = BE$, 求证: $\triangle ABE$ 是“倍角三角形”;
- ②点 P 在线段 AE 上, 连接 BP . 若 $\angle C = 30^\circ$, BP 分 $\triangle ABE$ 所得的两三角形中, 一个是等腰三角形, 一个是“倍角三角形”, 请直接写出 $\angle E$ 的度数.

【答案】 (1) ②③ (2) ①见解析; ② $\angle E$ 的度数为 45° 或 15° 或 20° 或 40°

【解析】

【分析】 (1) 利用“倍角三角形”的定义依次判断即可求解;

(2) ①由折叠的性质和等腰三角形的性质可求 $\angle BAE = 2\angle ADB$, 由等腰三角形的性质可得

$\angle BDE = \angle E$, 可得结论; ②分两种情况讨论, 由三角形内角和定理和“倍角三角形”的定义可求解.

【小问1详解】

解: 若一个三角形是顶角为 30° 的等腰三角形,

则两个底角均为 $\frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$,

$\therefore 75^\circ \neq 2 \times 30^\circ$,

$\therefore$ 顶角是 30° 的等腰三角形不是“倍角三角形”;

若一个三角形是等腰直角三角形,

则三个角分别为 45° , 45° , 90° ,

$$\because 90^\circ = 2 \times 45^\circ,$$

$\therefore$ 等腰直角三角形是“倍角三角形”；

若一个三角形是有一个角为 30° 的直角三角形，

则另两个角分别为 60° ， 90° ，

$$\because 60^\circ = 2 \times 30^\circ,$$

$\therefore$ 有一个 30° 的直角三角形是“倍角三角形”，

故答案为：②③；

【小问 2 详解】

① 证明： $\because AB = AC$ ，

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

$\because$ 将 $\triangle ABC$ 沿边 AB 所在的直线翻折 180° 得到 $\triangle ABD$ ，

$$\therefore \angle ABC = \angle ABD, \angle ACB = \angle ADB, BC = BD,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle ADB + \angle ABD = 2\angle ADB,$$

$$\because BE = BC,$$

$$\therefore BD = BE,$$

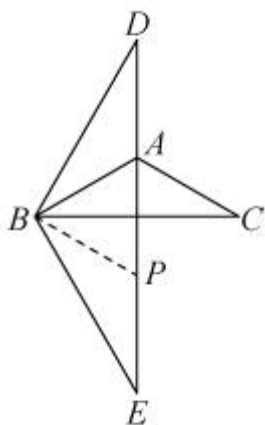
$$\therefore \angle E = \angle ADB,$$

$$\therefore \angle BAE = 2\angle E,$$

$\therefore \triangle ABE$ 是“倍角三角形”；

② 解：由 ① 可得 $\angle BAE = 2\angle BDA = 2\angle C = 60^\circ$ ，

如图，



若 $\triangle ABP$ 是等腰三角形, 则 $\triangle BPE$ 是“倍角三角形”,

$\therefore \triangle ABP$ 是等边三角形,

$\therefore \angle APB = 60^\circ$,

$\therefore \angle BPE = 120^\circ$,

$\therefore \angle E + \angle EBP = 60^\circ$,

$\because \triangle BPE$ 是“倍角三角形”,

$\therefore \angle EBP = 2\angle E$ 或 $\angle E = 2\angle EBP$,

$\therefore \angle E = 20^\circ$ 或 40° ;

若 $\triangle BPE$ 是等腰三角形, 则 $\triangle ABP$ 是“倍角三角形”,

$\therefore \angle ABP = \frac{1}{2}\angle BAP = 30^\circ$ 或 $\angle APB = \frac{1}{2}\angle BAE = 30^\circ$ 或 $\angle ABP = 2\angle APB$ 或 $\angle APB = 2\angle ABP$,

当 $\angle ABP = \frac{1}{2}\angle BAP = 30^\circ$ 时, $\angle BPE = \angle BAP + \angle ABP = 90^\circ$,

$\therefore \angle E = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BPE) = 45^\circ$;

当 $\angle APB = \frac{1}{2}\angle BAE = 30^\circ$ 时, $\angle BPE = 180^\circ - \angle APB = 150^\circ$,

$\therefore \angle E = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BPE) = 15^\circ$;

当 $\angle ABP = 2\angle APB$ 时, $\angle APB = \frac{1}{3}(180^\circ - \angle BAP) = 40^\circ$,

$\therefore \angle BPE = 180^\circ - \angle APB = 140^\circ$,

$\therefore \angle E = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BPE) = 20^\circ$;

当 $\angle APB = 2\angle ABP$ 时, $\angle APB = \frac{2}{3}(180^\circ - \angle BAP) = 80^\circ$,

$\therefore \angle BPE = 180^\circ - \angle APB = 100^\circ$,

$\therefore \angle E = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BPE) = 40^\circ$;

综上所述: $\angle E$ 的度数为 45° 或 15° 或 20° 或 40° .

【点睛】 本题是几何变换综合题, 考查折叠的性质、等腰三角形的性质、三角形内角和定理、三角形外角的定义和性质等, 理解“倍角三角形”的定义是解题的关键.

25. 【初步探索】

(1) 如图 1: 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B = \angle ADC = 90^\circ$, E, F 分别是 BC, CD 上的点, 且 $EF = BE + FD$, 探究图中 $\angle BAE$ 、 $\angle FAD$ 、 $\angle EAF$ 之间的数量关系. 小王同学探究此问题的方法是: 延长 FD 到点 G , 使 $DG = BE$, 连接 AG , 先证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$, 再证明 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$, 可得出结

论, 他的结论应是_____;

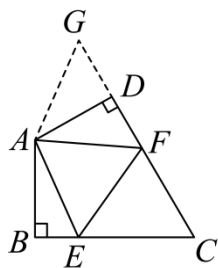


图1

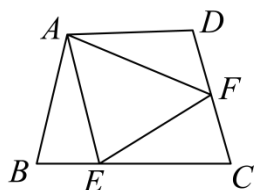


图2

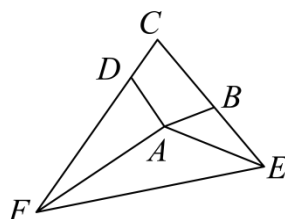


图3

【灵活运用】

(2) 如图 2, 若在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$, E 、 F 分别是 BC 、 CD 上的点, 且 $EF = BE + FD$, 上述结论是否仍然成立, 并说明理由;

【拓展延伸】

(3) 如图 3, 已知在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, $AB = AD$, 点 E 在 CB 的延长线上, 点 F 在 CD 的延长线上, 如图 3 所示, 仍然满足 $EF = BE + FD$, 请写出 $\angle EAF$ 与 $\angle DAB$ 的数量关系, 并给出证明过程.

【答案】 (1) $\angle BAE + \angle FAD = \angle EAF$ (2) 仍成立, 理由见解析; (3) $\angle EAF = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle DAB$, 证明见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了全等三角形的判定以及性质的综合应用, 解决问题的关键是作辅助线构造全等三角形, 根据全等三角形的对应角相等进行推导变形. 解题时注意: 同角的补角相等.

(1) 延长 FD 到点 G , 使 $DG = BE$, 连接 AG , 可判定 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$, 进而得出 $\angle BAE = \angle DAG$, $AE = AG$, 再判定 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$, 可得出 $\angle EAF = \angle GAF = \angle DAG + \angle DAF = \angle BAE + \angle DAF$, 据此得出结论;

(2) 延长 FD 到点 G , 使 $DG = BE$, 连接 AG , 先判定 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$, 进而得出 $\angle BAE = \angle DAG$, $AE = AG$, 再判定 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$, 可得出 $\angle EAF = \angle GAF = \angle DAG + \angle DAF = \angle BAE + \angle DAF$;

(3) 在 DC 延长线上取一点 G , 使得 $DG = BE$, 连接 AG , 先判定 $\triangle ADG \cong \triangle ABE$, 再判定 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$, 得出 $\angle FAE = \angle FAG$, 最后根据 $\angle FAE + \angle FAG + \angle GAE = 360^\circ$, 推导得到 $2\angle FAE + \angle DAB = 360^\circ$, 即可得出结论.

【详解】 解: (1) 如图 1, 延长 FD 到点 G , 使 $DG = BE$, 连接 AG ,

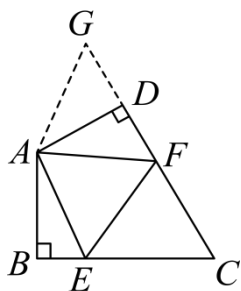


图1

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADG$ 中,

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle B = \angle ADG = 90^\circ, \\ BE = DG \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG$ (SAS),

$\therefore \angle BAE = \angle DAG, AE = AG,$

$\therefore EF = BE + DF,$

$\therefore EF = DF + DG = FG,$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AGF$ 中,

$$\begin{cases} AE = AG \\ AF = AF, \\ EF = GF \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AGF$ (SSS),

$\therefore \angle EAF = \angle GAF = \angle DAG + \angle DAF = \angle BAE + \angle DAF.$

故答案为: $\angle BAE + \angle FAD = \angle EAF$;

(2) 仍成立, 理由如下:

如图 2, 延长 FD 到点 G , 使 $DG = BE$, 连接 AG ,

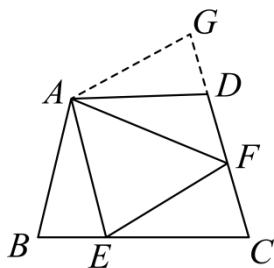


图2

$\therefore \angle B + \angle ADF = 180^\circ, \angle ADG + \angle ADF = 180^\circ,$

$\therefore \angle B = \angle ADG,$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADG$ 中,

$$\begin{cases} AD = AD \\ \angle B = \angle AGD, \\ BE = DG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DAG, \quad AE = AG,$$

$$\because EF = BE + DF,$$

$$\therefore EF = DG + DF = GF,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AGF$ 中,

$$\begin{cases} AE = AG \\ AF = AF, \\ EF = GF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AGF (\text{SSS}),$$

$$\therefore \angle EAF = \angle GAF = \angle DAG + \angle DAF = \angle BAE + \angle DAF;$$

$$(3) \quad \angle EAF = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle DAB, \text{ 证明如下:}$$

如图3, 在 DC 延长线上取一点 G , 使得 $DG = BE$, 连接 AG ,

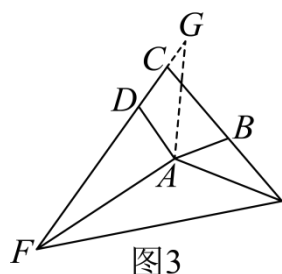


图3

$$\because \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ, \quad \angle ABC + \angle ABE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ABE,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADG$ 中,

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABE = \angle ADG, \\ BE = DG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG (\text{SAS}),$$

$$\therefore AG = AE, \quad \angle DAG = \angle BAE,$$

$$\because EF = BE + DF,$$

$$\therefore EF = DG + DF = FG,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AGF$ 中,

$$\begin{cases} AE = AG \\ AF = AF, \\ EF = GF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AGF \text{ (SSS)},$$

$$\therefore \angle FAE = \angle FAG,$$

$$\because \angle FAE + \angle FAG + \angle GAE = 360^\circ,$$

$$\therefore 2\angle FAE + (\angle GAB + \angle BAE) = 360^\circ,$$

$$\therefore 2\angle FAE + (\angle GAB + \angle DAG) = 360^\circ,$$

$$\text{即 } 2\angle FAE + \angle DAB = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle DAB.$$