

2025 学年第一学期八年级数学第二次随堂作业

一、选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 下列说法正确的是 ()

A. 立方根是它本身的数是 0 和 ± 1

B. 平方根是它本身的数是 0 和 1

C. 算术平方根是它本身的数是 1

D. 绝对值是它本身的数是 0

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了立方根、平方根、算术平方根等知识, 根据立方根、平方根、算术平方根和绝对值的定义, 逐一判断各选项的正确性.

【详解】解: A. 立方根等于它本身的数是 0 和 ± 1 , 故原说法正确;

B. 平方根是它本身的数是 0, 故原说法错误;

C. 算术平方根是它本身的数是 0 和 1, 故原说法错误;

D. 绝对值是它本身的数是 0 和正数, 故原说法错误,

故选: A.

2. 下列关于 $\sqrt{5}$ 判断正确的是 ()

A. $\sqrt{5}$ 表示 5 的平方根

B. $\sqrt{5}$ 不可以用数轴上的点来表示

C. $\sqrt{5}$ 是一个比 π 大的数

D. $\sqrt{5}$ 是一个无理数

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查算术平方根、无理数的定义及实数与数轴的关系. 根据实数、无理数的定义和算术平方根的定义进行判断即可.

【详解】解: A: $\sqrt{5}$ 表示 5 的算术平方根, 而非所有平方根. 5 的平方根为 $\pm\sqrt{5}$, 故 A 错误.

B: 实数与数轴上的点一一对应, $\sqrt{5}$ 是实数, 可用数轴上的点表示, 故 B 错误.

C: $\sqrt{5} \approx 2.236$, 而 $\pi \approx 3.1416$, 则 $\sqrt{5} < \pi$, 故 C 错误.

D: $\sqrt{5}$ 无法表示为两个整数之比, 且是无限不循环小数, 属于无理数, 故 D 正确.

故选: D.

3. 下列从左到右的变形不一定正确的是 ()

A. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

B. $\sqrt{a^2} = |a|$

C. $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$

D. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查平方根的性质. 选项 A、B、C 在满足条件时总是成立, 而选项 D 中, 即使左边 $\sqrt{ab}$ 有意义 ($ab \geq 0$), 右边 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ 也可能无意义 (当 $a < 0$ 且 $b < 0$ 时), 因此变形不一定正确.

【详解】解: $\because$ 平方根的被开方数必须非负,

A、左边 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ 要求 $a \geq 0$ 且 $b \geq 0$, 此时右边 $\sqrt{ab}$ 也有意义且等式成立, 故变形正确;

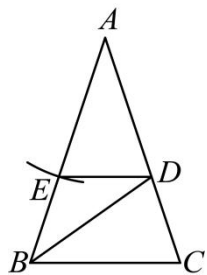
B、 $\sqrt{a^2} = |a|$ 对任意实数 a 成立, 故变形正确;

C、当 $a \geq 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$ 成立, 变形正确;

D、左边 $\sqrt{ab}$ 要求 $ab \geq 0$, 但当 $a < 0$ 且 $b < 0$ 时, $ab > 0$ 左边有意义, 右边 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ 无意义, 等式不成立, 故变形不一定正确.

故选: D.

4. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D 在边 AC 上且到边 AB 和边 BC 的距离相等. 以点 A 为圆心, 线段 AD 的长为半径画弧交边 AB 于点 E , 连接 DE . 下列结论中, 不一定正确的是 ()



A. $BE = DE$

B. $BD = BC$

C. $\angle AED = 2\angle BDE$

D. $\frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{DE}{BC}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查等腰三角形的判定与性质, 角平分线的判定, 平行线的判定与性质, 根据作图得到 $AD = AE$, 等边对等角, 推出 $\angle AED = \angle ABC$, 进而得到 $DE \parallel BC$, 根据点 D 在边 AC 上且到边 AB 和边 BC 的距离相等, 得到 BD 平分 $\angle ABC$, 推出 $\triangle BED$ 为等腰三角形, 逐一进行判断即可.

【详解】解：由作图可知： $AD = AE$ ，

$$\therefore \angle AED = \angle ADE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A),$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A),$$

$$\therefore \angle AED = \angle ABC,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EDB = \angle CBD,$$

$\therefore$ 点 D 在边 AC 上且到边 AB 和边 BC 的距离相等，

$$\therefore BD \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC,$$

$$\therefore \angle EDB = \angle EBD = \frac{1}{2} \angle ABC,$$

$\therefore BE = DE$ ， $\angle AED = \angle ABC = 2\angle BDE$ ；故选项 A，C 正确，不符合题意；

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{DE}{BC} \quad (\text{平行线间的距离处处相等})；\text{故选项 D 正确，不符合题意；}$$

无法得到 $BD = BC$ ；

故选：B.

5. 某种时装，平均每天销售 20 件，每件可盈利 40 元，若每件降价 1 元，则每天可以多售出 5 件，如果每天要盈利 1600 元，若设每件可降价 x 元，根据题意列出的方程是（ ）

A. $(40 - x)(20 - 5x) = 1600$

B. $(40 - x)(20 + 5x) = 1600$

C. $(40 + x)(20 + 5x) = 1600$

D. $(40 - 5x)(20 + 5x) = 1600$

【答案】B

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的实际应用，设每件可降价 x 元，则每件时装可盈利 $(40 - x)$ 元，销售量为 $(20 + 5x)$ 件，再根据总盈利为 1600 元列出方程即可.

【详解】解：由题意得， $(40 - x)(20 + 5x) = 1600$ ，

故选：B.

6. 一元二次方程 $M: ax^2 + bx + c = 0$; $N: cx^2 + bx + a = 0$, 其中 $ac \neq 0$, $a \neq c$, 给出以下四个结论:

①若方程 M 有两个不相等的实数根, 则方程 N 也有两个不相等的实数根; ②若方程 M 的两根符号相同, 则方程 N 的两根符号也相同; ③若 m 是方程 M 的一个根, 则 $\frac{1}{m}$ 是方程 N 的一个根; ④若方程 M 和方程 N 有一个相同的根, 则这个根必是 $x = 1$, 其中正确的结论是 ()

A. ①③

B. ①②③

C. ①②④

D. ①③④

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据根的判别式, 根的定义, 计算判断即可.

【详解】 $\because M: ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac > 0,$$

$$\because N: cx^2 + bx + a = 0 \text{ 的判别式为 } \Delta = b^2 - 4ca = b^2 - 4ac > 0,$$

$\therefore$ 方程 N 也有两个不相等的实数根,

故①正确;

$\because M: ax^2 + bx + c = 0$ 两根符号相同,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac \geq 0, \frac{c}{a} > 0,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac \geq 0, \frac{a}{c} > 0,$$

$\therefore$ 方程 N 的两根符号也相同,

故②正确;

$\because m$ 是方程 $M: ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根,

$$\therefore am^2 + bm + c = 0,$$

$$\therefore \frac{c}{m^2} + b \times \frac{1}{m} + a = \frac{c + bm + am^2}{m^2} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{m} \text{ 是方程 } N \text{ 的一个根;}$$

故③正确;

设方程 M 和方程 N 相同的根为 x_0 ,

根据题意, 得 $ax_0^2 + bx_0 + c = 0, cx_0^2 + bx_0 + a = 0$,

$$\therefore (a-c)x_0^2 = a-c,$$

$$\because ac \neq 0, \quad a \neq c,$$

$$\therefore x_0^2 = 1,$$

$$\text{解得 } x_0 = \pm 1,$$

$$\text{故这个根是 } x = \pm 1,$$

故④错误;

故选 B.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的根的判别式，公共根，方程根的定义即使方程左右两边相等的未知数的值，熟练掌握根的判别式是解题的关键.

二、填空题 (每题 2 分, 共 24 分)

7. 如果最简根式 $2\sqrt{4m-1}$ 与 $4\sqrt{3m+2}$ 是同类二次根式, 那么 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 3

【解析】

【分析】 此题主要考查了同类二次根式的定义, 即: 化成最简二次根式后, 被开方数相同的二次根式叫做同类二次根式. 根据最简二次根式及同类二次根式的定义列方程求解.

【详解】 解: $\because$ 最简二次根式 $\sqrt{4m-1}$ 与 $\sqrt{3m+2}$ 是同类二次根式,

$$\therefore 4m-1 = 3m+2,$$

$$\text{解得: } m = 3,$$

故答案为: 3.

8. 在实数范围内因式分解: $2x^2 + 5x - 7 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(2x+7)(x-1)$

【解析】

【分析】 本题考查了二次三项式在实数范围内的因式分解, 解题的关键是利用十字相乘法或求根公式分解多项式.

先通过十字相乘法拆分二次项与常数项的系数, 将 $2x^2 + 5x - 7$ 拆分为两个一次式的乘积; 或先求方程

$2x^2 + 5x - 7 = 0$ 的根, 再利用求根公式法分解.

【详解】 解: 用十字相乘法: $2x^2 + 5x - 7 = (2x+7)(x-1)$.

故答案为: $(2x+7)(x-1)$.

9. 已知 $x = \sqrt{2} - 1$, 则代数式 $x^2 + 2x + 2$ 的值为_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的化简求值, 求代数式的值, 先把已知条件变形得到 $x+1 = \sqrt{2}$, 两边平方可得到 $x^2 + 2x = 1$, 然后利用整体代入的方法计算 $x^2 + 2x + 2$ 的值. 掌握相应的运算法则、性质及公式是解题的关键.

【详解】 解: $\because x = \sqrt{2} - 1$,

$$\therefore x+1 = \sqrt{2},$$

$$\therefore (x+1)^2 = (\sqrt{2})^2, \text{ 即 } x^2 + 2x + 1 = 2,$$

$$\therefore x^2 + 2x = 1,$$

$$\therefore x^2 + 2x + 2 = 1 + 2 = 3,$$

$$\therefore \text{代数式 } x^2 + 2x + 2 \text{ 的值为 } 3.$$

故答案为: 3.

10. 下列说法正确的有_____.

①实数不是有理数就是无理数; ② $\sqrt{2}$ 是有理数; ③不带根号的数都是有理数; ④ π 是有理数; ⑤数轴上任一点都对应一个有理数; ⑥ $-\sqrt{3}$ 的相反数是 $\sqrt{3}$.

【答案】 ①⑥##⑥①

【解析】

【分析】 本题考查的是实数的概念, 实数与数轴, 实数的分类, 无理数的含义, 相反数的含义, 熟记基本概念是解本题的关键.

根据实数的概念与分类, 无理数, 有理数的概念, 相反数的含义逐一分析即可得到答案.

【详解】 解: 实数不是有理数就是无理数, 描述正确, 故①符合题意;

$\sqrt{2}$ 是无理数, 故②不符合题意;

不带根号的数都是有理数, 描述错误, 如 π , 故③不符合题意;

π 是无理数; 故④不符合题意;

数轴上任一点都对应一个实数，故⑤不符合题意；

$-\sqrt{3}$ 的相反数是 $\sqrt{3}$ ，故⑥符合题意；

故答案为：①⑥.

11. 比较大小： $\sqrt{5} + \sqrt{11}$ _____ $\sqrt{6} + \sqrt{10}$ (填 “>” “<” 或 “=”).

【答案】 <

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的大小比较，熟练掌握“通过平方转化为有理数（或含根式的整式）比较大小”是解题的关键.

通过平方两个根式表达式，比较平方值的大小，进而判断原式的大小关系.

【详解】 解： 设 $A = \sqrt{5} + \sqrt{11}$ ， $B = \sqrt{6} + \sqrt{10}$.

$$\because A^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{11})^2 = 5 + 2\sqrt{55} + 11 = 16 + 2\sqrt{55},$$

$$B^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{10})^2 = 6 + 2\sqrt{60} + 10 = 16 + 2\sqrt{60},$$

$$\text{又} \because \sqrt{60} > \sqrt{55},$$

$$\therefore 2\sqrt{60} > 2\sqrt{55},$$

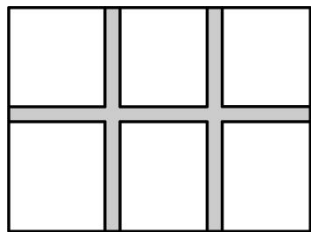
$$\therefore B^2 > A^2,$$

$\because A, B$ 均为正数,

$$\therefore B > A, \text{ 即 } \sqrt{5} + \sqrt{11} < \sqrt{6} + \sqrt{10},$$

故答案为： < .

12. 如图，在长为 20 米、宽为 15 米的长方形绿地内，修筑三条相同宽且分别平行于长方形相邻两边的道路，把绿地分成 6 块，这 6 块绿地的总面积为 252 平方米. 如果设道路宽为 x 米，由题意所列出关于 x 的方程是 _____.



【答案】 $(20 - 2x)(15 - x) = 252$

【解析】

【分析】此题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，设道路宽为 x 米，则绿地的长为 $(20-2x)$ 米，宽为 $(15-x)$ 米，解题的关键是正确理解题意，列出方程.

【详解】设道路宽为 x 米，则绿地的长为 $(20-2x)$ 米，宽为 $(15-x)$ 米，由题意得：

$$(20-2x)(15-x)=252,$$

故答案为： $(20-2x)(15-x)=252$.

13. 若关于 x 的方程 $3x^2-4x+c=0$ 的一个根是2，则另一个根是_____.

【答案】 $-\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程根与系数的关系. 根据韦达定理，已知一个根，可直接求另一个根.

【详解】解：设方程的另一个根为 r ，已知一个根为2.

对于方程 $3x^2-4x+c=0$ ，有 $a=3$ ， $b=-4$.

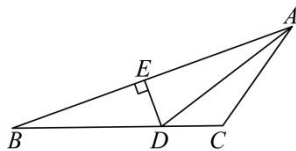
根据根与系数的关系，两根之和为 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,

$$\text{即 } 2+r=-\frac{-4}{3}=\frac{4}{3},$$

$$\text{解得 } r=\frac{4}{3}-2=-\frac{2}{3}.$$

故答案为： $-\frac{2}{3}$.

14. 如图， AD 是 $\triangle BAC$ 的角平分线， $DE \perp AB$ 于点 E ， $S_{\triangle ABC}=16$ ， $DE=2$ ， $AB=12$ ，则边 AC 的长是_____.



【答案】4

【解析】

【分析】本题考查角平分线的性质，解题关键是明确角平分线上的点到角两边的距离相等，做出辅助线，利用面积求解即可.

【详解】解：作 $DF \perp AC$ 于点 F ,

$\because AD$ 是 $\triangle BAC$ 的角平分线， $DE \perp AB$ 于点 E ,

$$\therefore DF = DE = 2,$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times AB \times DE = \frac{1}{2} \times 12 \times 2 = 12,$$

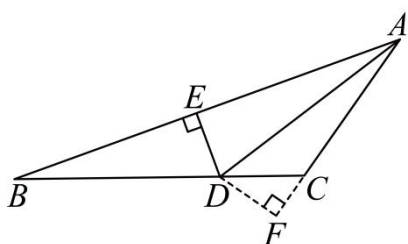
$$\therefore S_{\triangle ABC} = 16,$$

$$\therefore S_{\triangle ADC} = 4, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times AC \times DF = 4,$$

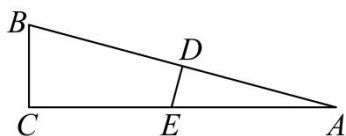
$$\therefore DF = DE = 2,$$

$$\therefore AC = 4,$$

故答案为：4.



15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 15^\circ$ ， D 是边 AB 的中点， $DE \perp AB$ 交 AC 于点 E 。那么 $CE : EA = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了线段垂直平分线的性质，勾股定理，等边对等角，三角形外角的性质，含 30° 度角的直角三角形的性质，根据题意可得 DE 垂直平分 AB ，则 $BE = AE$ ，根据等边对等角和三角形外角的性质得到 $\angle BEC = 30^\circ$ ，再用 BC 分别表示出 BE ， CE ，据此可得答案。

【详解】 解：如图所示，连接 BE ，

$\because D$ 是边 AB 的中点， $DE \perp AB$ ，

$\therefore DE$ 垂直平分 AB ，

$\therefore BE = AE$ ，

$\therefore \angle EBA = \angle A = 15^\circ$ ，

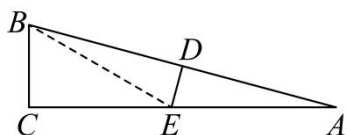
$\therefore \angle BEC = \angle EBA + \angle A = 30^\circ$ ，

$\therefore BE = 2BC$ ，

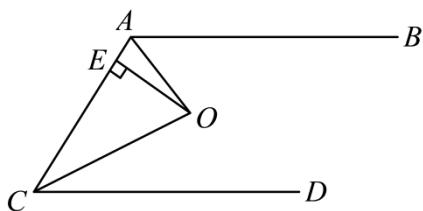
$$\therefore CE = \sqrt{BE^2 - BC^2} = \sqrt{3}BC,$$

$$\therefore CE : EA = \sqrt{3}BC : 2BC = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



16. 如图, 已知 $AB \parallel CD$, 点 O 为 $\angle CAB$ 、 $\angle ACD$ 的平分线的交点. $OE \perp AC$, 且 $OE = \frac{2}{3}$, 则两平行线 AB 、 CD 间的距离等于_____.

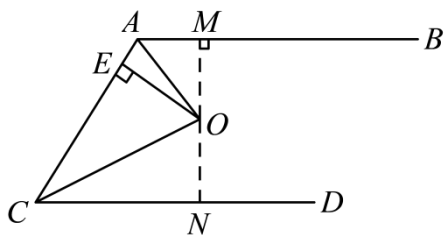


【答案】 $\frac{4}{3}$ 1 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了角平分线的性质, 平行线的性质. 过点 O 作 $MN \perp AB$ 于点 M , 交 CD 于点 N , 根据 $AB \parallel CD$, 得出 $\angle CNM = 180^\circ - \angle AMN = 90^\circ$, 求出 $MN \perp CD$, 根据角平分线的性质得出 $OM = OE = \frac{2}{3}$, $ON = OE = \frac{2}{3}$, 即可得出结论.

【详解】 解: 过点 O 作 $MN \perp AB$ 于点 M , 交 CD 于点 N , 如图所示:



则 $\angle AMN = 90^\circ$,

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle CNM = 180^\circ - \angle AMN = 90^\circ$,

$\therefore MN \perp CD$,

$\therefore AO$ 、 CO 分别平分 $\angle CAB$, $\angle ACD$,

$$\therefore OE \perp AC,$$

$$\therefore OM = OE = \frac{2}{3}, \quad ON = OE = \frac{2}{3},$$

$$\therefore MN = OM + ON = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \text{两平行线 } AB、CD \text{ 之间的距离为 } \frac{4}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{4}{3}.$$

17. 已知等腰 ABC 的一条边为 7, 其余两边的边长恰好是方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 的两个根, 则 m 的值是_____.

【答案】4

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程, 一元二次方程根与系数的关系, 等腰三角形的定义, 构成三角形的条件, 当腰长为 7 时, $x = 7$ 是方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 的一个根, 当底边长为 7 时, 则方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 有两个相等的实数根, 据此分别求出两种情况下 m 的值, 再求出方程对应的根, 最后根据构成三角形的条件求解即可.

【详解】 解: 当腰长为 7 时, 则 $x = 7$ 是方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 的一个根,

$$\therefore 7^2 - 2 \times 7(m+1) + m^2 + 5 = 0,$$

解得 $m = 4$ 或 $m = 10$,

当 $m = 4$ 时, 由根与系数的关系可得方程的另一根为 $2(m+1) - 7 = 2 \times (4+1) - 7 = 3$,

$\therefore$ 此时该等腰三角形的三边长分别为 7, 7, 3,

$$\therefore 3 + 7 > 7,$$

$\therefore$ 此时能构成三角形, 符合题意;

当 $m = 10$ 时, 由根与系数的关系可得方程的另一根为 $2(m+1) - 7 = 2 \times (10+1) - 7 = 15$,

$\therefore$ 此时该等腰三角形的三边长分别为 7, 7, 15,

$$\therefore 7 + 7 < 15,$$

$\therefore$ 此时不能构成三角形, 不符合题意;

当底边长为 7 时, 则方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = [-2(m+1)]^2 - 4(m^2 + 5) = 0,$$

解得 $m = 2$,

$\therefore$ 由根与系数的关系可得方程的根为 $x_1 = x_2 = \frac{-2(m+1)}{2} = 3$,

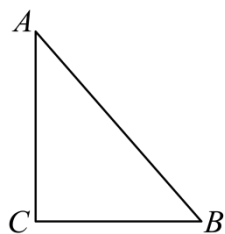
$\therefore 3+3 < 7$,

$\therefore$ 此时不能构成三角形, 不符合题意;

综上所述, $m = 4$;

故答案为: 4.

18. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 40^\circ$, $AC = 2\sqrt{3}$, $BC = 3$, 点 D 在边 BC 上, 将 $\triangle ABC$ 沿直线 AD 翻折, 使点 C 落在点 C' 处, 连接 AC' , 直线 AC' 与边 CB 的延长线相交于点 F , 如果 $\angle DAB = \frac{1}{2}\angle BAF$, 那么线段 BF 的长为 ____.



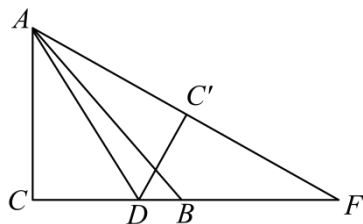
【答案】 3

【解析】

【分析】设 $\angle DAB = \alpha$, 则 $\angle BAF = 2\alpha$, $\angle DAF = \angle DAB + \angle BAF = 3\alpha$, 由折叠可得 $\angle CAD = \angle DAF = 3\alpha$, 进而可得 $\angle CAB = \angle CAD + \angle DAB = 4\alpha = 40^\circ$, 则 $\alpha = 10^\circ$, $\angle CAD = \angle DAF = 3\alpha = 30^\circ$, 由直角三角形的两个锐角互余可得 $\angle ADC = 90^\circ - \angle CAD = 60^\circ$, 由三角形外角的性质可得

$\angle F = \angle ADC - \angle DAF = 30^\circ$, 进而可得 $\angle DAF = \angle F$, 由等角对等边可得 $AD = DF$, 由含 30° 度角的直角三角形可得 $AD = 2CD$, 由勾股定理可得 $AC^2 + CD^2 = AD^2$, 即 $(2\sqrt{3})^2 + CD^2 = (2CD)^2$, 解得 $CD = 2$ 或 $CD = -2$ (不符合题意, 故舍去), 则 $AD = 2CD = 4$, $DF = AD = 4$, 由线段的和差关系可得 $BD = BC - CD = 1$, $BF = DF - BD$, 由此即可求出 BF 的长.

【详解】解: 如图,



设 $\angle DAB = \alpha$, 则 $\angle BAF = 2\alpha$, $\angle DAF = \angle DAB + \angle BAF = 3\alpha$,

由折叠可得: $\angle CAD = \angle DAF = 3\alpha$,

$$\therefore \angle CAB = \angle CAD + \angle DAB = 4\alpha = 40^\circ,$$

$$\therefore \alpha = 10^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle DAF = 3\alpha = 30^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ - \angle CAD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle F = \angle ADC - \angle DAF = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle F,$$

$$\therefore AD = DF,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $AC = 2\sqrt{3}$, $\angle CAD = 30^\circ$,

$$\therefore AD = 2CD,$$

由勾股定理可得: $AC^2 + CD^2 = AD^2$,

$$\text{即: } (2\sqrt{3})^2 + CD^2 = (2CD)^2,$$

解得: $CD = 2$ 或 $CD = -2$ (不符合题意, 故舍去),

$$\therefore AD = 2CD = 4,$$

$$\therefore DF = AD = 4,$$

$$\text{又} \because BC = 3,$$

$$\therefore BD = BC - CD = 3 - 2 = 1,$$

$$\therefore BF = DF - BD = 4 - 1 = 3,$$

故答案为: 3.

【点睛】 本题主要考查了折叠问题, 含 30° 度角的直角三角形, 勾股定理, 直角三角形的两个锐角互余, 三角形外角的性质, 等角对等边, 直接开平方法解一元二次方程, 线段的和与差等知识点, 由折叠及角的和差关系得出 $\alpha = 10^\circ$ 、由含 30° 度角的直角三角形的性质及勾股定理得出 $CD = 2$ 是解题的关键.

三、简答题 (19、20 题各 12 分, 21 题 8 分, 共 32 分)

19. (1) 计算: $\sqrt{\frac{1}{x}} \div 3\sqrt{4x^3} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{9x^4}$

(2) 因式分解: $4(1-x) - x(x-1)$

【答案】 (1) $\frac{1}{8}$

(2) $(1-x)(4+x)$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算以及因式分解，熟练掌握运算法则和因式分解方法是解题关键.

(1) 先将二次根式化为最简形式，再按照乘除运算法则逐步计算，注意运算顺序和符号；

(2) 先将第二个括号内的式子进行变形，然后利用提公因式法完成因式分解.

【详解】 解：(1) 原式 = $\frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{3} \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \frac{3\sqrt{x^4}}{4}$

$$= \frac{1}{6\sqrt{x^4}} \frac{3\sqrt{x^4}}{4}$$
$$= \frac{3}{24}$$
$$= \frac{1}{8};$$

(2) 原式 = $4(1-x) + x(1-x)$

$$= (1-x)(4+x).$$

20. 解方程:

(1) $\frac{1}{2}x^2 - 3x - 5 = 0$. (配方法)

(2) $2x^2 + 2\sqrt{7}x + 1 = 0$

【答案】 (1) $x_1 = 3 + \sqrt{19}, x_2 = 3 - \sqrt{19}$;

(2) $x_1 = \frac{-\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}$.

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解法（配方法、公式法），熟练掌握不同解法的步骤和公式是解题的关键.

(1) 利用配方法的步骤：先将二次项系数化为1，再通过移项、配方将方程转化为完全平方式，进而求解；

(2) 通过判断判别式的符号确定方程有实数根，再代入一元二次方程的求根公式计算求解.

【小问1详解】

解： $\frac{1}{2}x^2 - 3x - 5 = 0$

$$x^2 - 6x - 10 = 0$$

$$(x-3)^2 - 19 = 0$$

$$(x-3)^2 = 19$$

$$x-3 = \pm\sqrt{19}$$

$$x_1 = 3 + \sqrt{19}, x_2 = 3 - \sqrt{19};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } 2x^2 + 2\sqrt{7}x + 1 = 0$$

$$a = 2, b = 2\sqrt{7}, c = 1,$$

$$\Delta = (2\sqrt{7})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 20 > 0,$$

$$x = \frac{-2\sqrt{7} \pm \sqrt{20}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{-2\sqrt{7} \pm 2\sqrt{5}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{-\sqrt{7} \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}.$$

21. 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - (2m+1)x + 2 = 0$.

(1) 判断此方程根的情况，并说明理由.

(2) 若此方程的两个实数根都是整数，求符合条件的整数 m 的值的和.

(3) 若此方程的两个实数根分别为 x_1, x_2 ，求代数式 $m(x_1^5 + x_2^5) - (2m+1)(x_1^4 + x_2^4) + 2(x_1^3 + x_2^3)$ 的值.

【答案】(1) 此方程总有两个实数根，见解析

(2) 0 (3) 0

【解析】

【分析】本题考查了根的判别式、方程的解得定义、根与系数的关系：若 x_1, x_2 是一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0) \text{ 的两根时, } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

(1) 由根的判别式 $\Delta = [-(2m+1)]^2 - 4m \times 2 = (2m-1)^2$ 即可知;

(2) 根据韦达定理知 $x_1 + x_2 = \frac{2m+1}{m} = 2 + \frac{1}{m}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{m}$, 由方程的两个实数根都是整数可得答案;

(3) 根据方程的解得定义得 $mx_1^2 - (2m+1)x_1 + 2 = 0$ 、 $mx_2^2 - (2m+1)x_2 + 2 = 0$, 继而知 $mx_1^5 - (2m+1)x_1^4 + 2x_1^3 = 0$, $mx_2^5 - (2m+1)x_2^4 + 2x_2^3 = 0$, 两式相加可得.

【小问 1 详解】

解: 此方程总有两个实数根.

理由: $\because \Delta = [-(2m+1)]^2 - 4m \cdot 2 = (2m-1)^2$,

$\therefore$ 不论 m 为何值, $(2m-1)^2 \geq 0$,

$\therefore$ 此方程总有两个实数根.

【小问 2 详解】

解: 设方程的两个根为 x_1, x_2 ,

则 $x_1 + x_2 = \frac{2m+1}{m} = 2 + \frac{1}{m}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{m}$.

$\because$ 此方程的两个实数根都是整数,

$\therefore m$ 的值为 ± 1 ,

$\therefore$ 符合条件的整数 m 的值的和为 0.

【小问 3 详解】

解: $\because x_1, x_2$ 是方程 $mx^2 - (2m+1)x + 2 = 0$ 的两个实数根,

$\therefore mx_1^2 - (2m+1)x_1 + 2 = 0$, $mx_2^2 - (2m+1)x_2 + 2 = 0$,

$\therefore mx_1^5 - (2m+1)x_1^4 + 2x_1^3 = 0$, $mx_2^5 - (2m+1)x_2^4 + 2x_2^3 = 0$,

以上两式相加, 可得 $m(x_1^5 + x_2^5) - (2m+1)(x_1^4 + x_2^4) + 2(x_1^3 + x_2^3) = 0$,

即 $m(x_1^5 + x_2^5) - (2m+1)(x_1^4 + x_2^4) + 2(x_1^3 + x_2^3) = 0$.

四、解答题 (22、23 题 8 分, 24 题 10 分, 共 26 分)

22. 某工厂为了提高生产效率, 正对生产线进行技术改革, 在第一试验阶段实现了日产量 1500 件的目标, 第三试验阶段实现了日产量 2160 件的目标.

(1) 如果第二阶段、第三阶段日产量的增长率相同, 求该生产线日产量的增长率;

(2) 按照 (1) 中的日产量增长率, 该工厂期望第四试验阶段日产量能达到 2500 件, 请通过计算说明他们

的目标能否实现.

【答案】(1) 20%

(2) 能, 理由见解析

【解析】

【分析】(1) 该生产线日产量的增长率 x , 根据题意得出关于 x 的一元二次方程, 解之取其正值即可得出结论;

(2) 根据题意求出第四试验阶段日产量, 将其与 2500 件比较后即可得出结论.

本题考查了一元二次方程的应用, 有理数的运算, 找准等量关系, 正确列出一元二次方程是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: 该生产线日产量的增长率 x ,

依题意得: $1500(1+x)^2 = 2160$,

解得: $x_1 = 0.2 = 20\%$, $x_2 = -2.2 < 0$ (不合题意, 舍去).

答: 该生产线日产量的增长率为 20%;

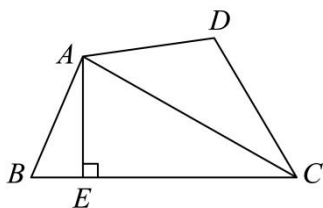
【小问 2 详解】

解: 能, 理由如下:

依题意, $2160 \times (1+20\%) = 2592 > 2500$ (件).

$\therefore$ 他们的目标能实现.

23. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $BC > CD$, AC 平分 $\angle BCD$, $\angle B + \angle ADC = 180^\circ$. 过点 A 作 $AE \perp BC$, 垂足为点 E .



(1) 求证: $AB = AD$;

(2) 探究: 线段 CE 、 CD 和 BE 的数量关系并证明你的结论.

【答案】(1) 见解析 (2) $CE = CD + BE$

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定与性质, 角平分线的性质定理, 掌握这两部分知识、构造全等三角形是解题的关键;

(1) 过点 A 作 $AF \perp CD$ 交 CD 延长线于点 F ，由角平分线的性质定理得 $AF = AE$ ，再证明 $\triangle ADF \cong \triangle ABE$ 即可得 $AB = AD$ ；

(2) 证明 $\triangle ACE \cong \triangle ACF$ ，得 $CE = CF$ ，则 $CE = CD + DF = CD + BE$ 。

【小问 1 详解】

证明：如图，过点 A 作 $AF \perp CD$ 交 CD 延长线于点 F ，

$\because AC$ 平分 $\angle BCD$ ， $AE \perp BC$ ，

$\therefore AF = AE$ ；

$\because \angle B + \angle ADC = 180^\circ$ ， $\angle ADF + \angle ADC = 180^\circ$ ，

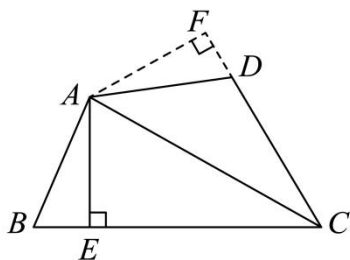
$\therefore \angle ADF = \angle B$ ；

$\because AE \perp BC$ ， $AF \perp CD$ ，

$\therefore \angle F = \angle AEB = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ABE$ (AAS)，

$\therefore AB = AD$ ；



【小问 2 详解】

解： $CE = CD + BE$ ；

理由如下：

由 (1) 知： $AE = AF$ ，

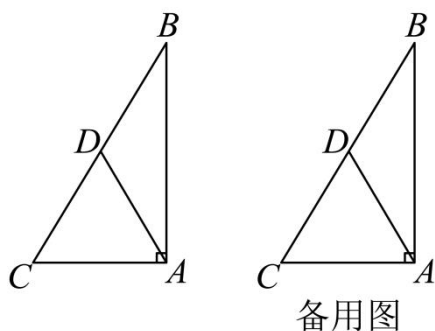
$\because AC = AC$ ，

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle ACF$ (HL)，

$\therefore CE = CF$ ，

$\therefore CE = CF = CD + DF = CD + BE$ 。

24. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $\angle C = 60^\circ$ ， AD 是 BC 边上的中线，动点 P 从点 A 出发以每秒 $\sqrt{3}$ 个单位的速度沿线段 AD 向终点 D 运动，动点 M 从点 D 出发以每秒 $2\sqrt{3}$ 个单位的速度在线段 DB 上运动，点 M 与点 P 同时出发，设动点运动时间为 x 。



(1) 求 AD 的长;

(2) 若动点 M 在线段 DB 上运动, 设 $\frac{S_{\triangle PMB}}{S_{\triangle ABC}} = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;

(3) 若动点 M 在射线 DB 上运动, 当点 P 运动到终点 D 时, 点 M 也停止运动, 直接写出当 $\frac{S_{\triangle PMB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{16}$ 时, x 的值.

【答案】(1) $AD = 2\sqrt{3}$;

(2) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} (0 < x < 1)$;

(3) $x = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$ 或 $x = \frac{3}{2}$.

【解析】

【分析】(1) 设 $AC = a$, 则 $BC = 2a$, 利用勾股定理求出 BC , 再根据直角三角形的性质即可求出 AD 的长;

(2) 利用勾股定理求出 $PN = 3 - \frac{3}{2}x$, 再根据三角形面积公式得到 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = 6\sqrt{3}$, 代入

$\frac{S_{\triangle PMB}}{S_{\triangle ABC}} = y$ 即可求解, 由 $x < \frac{BD}{2\sqrt{3}}$ 即可确定 x 的取值范围;

(3) 分两种情况, 当动点 M 在线段 DB 上运动, 可由 (2) 直接列方程即可, 注意 x 的取值范围进行取舍; 当 M 在射线 DB 上但不在线段 DB 上运动时, 得到 $BM = DM - BD = 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$, 同 (2) 方法求出

$S_{\triangle PMB}$, 进而得到 $\frac{S_{\triangle PMB}}{S_{\triangle ABC}} = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$, 解方程即可求解;

本题考查了直角三角形的性质, 勾股定理, 求函数解析式, 三角形的面积, 利用勾股定理得到 $PN = 3 - \frac{3}{2}x$ 是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: $\because \angle BAC = 90^\circ, \angle C = 60^\circ,$

$$\therefore \angle B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

设 $AC = a$, 则 $BC = 2a$,

$$\because AC^2 + AB^2 = BC^2,$$

$$\therefore a^2 + 6^2 = (2a)^2,$$

解得 $a = 2\sqrt{3}$,

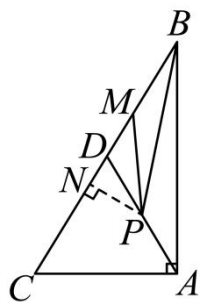
$$\therefore AC = 2\sqrt{3}, \quad BC = 4\sqrt{3},$$

$\because$ 点 D 为 BC 的中线,

$$\therefore AD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3};$$

【小问 2 详解】

解: 如图, 过点 P 作 $PN \perp BC$ 于 N , 则 $\angle BNP = 90^\circ$,



$$\because \angle C = 60^\circ, \quad AD = AC = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \angle ADC = \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DPN = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore DN = \frac{1}{2}PD,$$

$$\because AP = \sqrt{3}x,$$

$$\therefore PD = AD - AP = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}x,$$

$$\therefore DN = \frac{1}{2}PD = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3} - \sqrt{3}x) = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\therefore PN = \sqrt{PD^2 - DN^2} = \sqrt{(2\sqrt{3} - \sqrt{3}x)^2 - \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2} = 3 - \frac{3}{2}x,$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC = 2\sqrt{3}, \quad DM = 2\sqrt{3}x,$$

$$\therefore BM = BD - DM = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x,$$

$$\therefore S_{\triangle PMB} = \frac{1}{2}BM \cdot AN = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x) \times \left(3 - \frac{3}{2}x\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{9\sqrt{3}}{2}x + 3\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6 = 6\sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle PMB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{9\sqrt{3}}{2}x + 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = y,$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 动点 M 在线段 DB 上运动,

$$\therefore x < \frac{BD}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1,$$

$\therefore x$ 的取值范围为 $0 < x < 1$,

$$\text{故 } y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \quad (0 < x < 1);$$

【小问 3 详解】

解: 当动点 M 在线段 DB 上运动时, 由 (2) 可知, $\frac{S_{\triangle PMB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$,

由 $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ 整理得: $4x^2 - 12x + 7 = 0$,

$$\text{解得: } x = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore 0 < x < 1,$$

$$\therefore x = \frac{3 - \sqrt{2}}{2},$$

当动点 M 在射线 DB 上但不在 线段 DB 上运动时, $BM = DM - BD = 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$,

$$\therefore S_{\triangle PMB} = \frac{1}{2}BM \cdot AN = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}) \times \left(3 - \frac{3}{2}x\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{9\sqrt{3}}{2}x - 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle PMB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{9\sqrt{3}}{2}x - 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{16},$$

由 $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ 整理得, $4x^2 - 12x + 9 = 0$,

即 $(2x-3)^2 = 0$,

解得 $x = \frac{3}{2}$.

综上所述, $x = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$ 或 $x = \frac{3}{2}$.