

2025 学年第一学期八年级数学学科

第二次质量检测

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 下列说法正确的是 ()

A. $\sqrt{16}$ 的平方根是 ± 4

B. 负数没有立方根

C. 64 的立方根是 ± 4 ;

D. $(-5)^2$ 的算术平方根是 5

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查平方根、立方根、算术平方根的概念，解题的关键是准确理解这些概念的定义. 分别对每个选项根据平方根、立方根、算术平方根的定义进行分析判断.

【详解】解：A、先计算 $\sqrt{16} = 4$, 4 的平方根是 ± 2 ，不是 ± 4 ，该选项错误;

B、负数有立方根，例如 -8 的立方根是 -2 ，该选项错误;

C、64 的立方根是 4，不是 ± 4 ，该选项错误;

D、先计算 $(-5)^2 = 25$, 25 的算术平方根是 5，该选项正确.

故选：D.

2. 下列方程中是关于 x 的一元二次方程的是 ()

A. $x^2 = -1$

B. $ax^2 + bx + c = 0$ (其中 a 、 b 、 c 是常数)

C. $x^2 + \frac{1}{x} - 1 = 0$

D. $(x-3)(x-2) = x^2 - 1$

【答案】A

【解析】

【分析】此题考查的是一元二次方程的判断，掌握一元二次方程的定义及一般形式是解题关键. 先将各选项一元二次方程不是一般形式的化为一般形式，然后根据一元二次方程的定义逐一判断即可.

【详解】解：A. $x^2 = -1$ ，是一元二次方程，故符合题意;

B. 当 $a = 0$ 时， $ax^2 + bx + c = 0$ (其中 a 、 b 、 c 是常数) 不是一元二次方程，故不符合题意;

C. $x^2 + \frac{1}{x} - 1 = 0$ 不是整式方程，所以不是一元二次方程，故不符合题意;

D. $(x-3)(x-2) = x^2 - 1$ ，整理，得 $5x - 7 = 0$ ，不是一元二次方程，故不符合题意.

故选：A.

3. 方程 $x-3=x(x-3)$ 的解为 ()

A. $x=0$

B. $x_1=0, x_2=3$

C. $x=3$

D. $x_1=1, x_2=3$

【答案】D

【解析】

【分析】先移项，使方程右边为0，再提公因式 $(x+3)$ ，然后根据“两式相乘值为0，这两式中至少有一式值为0”进行求解.

【详解】解：原方程可化为： $x(x+3)-(x+3)=0$

即 $(x-1)(x+3)=0$,

解得 $x_1=1, x_2=-3$,

故选 D.

【点睛】本题考查了一元二次方程的解法. 解一元二次方程常用的方法有直接开平方法，配方法，公式法，因式分解法，要根据方程的特点灵活选用合适的方法. 本题运用的是因式分解法.

4. 下列方程中，没有实数根的是 ()

A. $x^2+x=0$

B. $5x^2-4x-1=0$

C. $3x^2-4x+1=0$

D. $4x^2-5x+2=0$

【答案】D

【解析】

【分析】对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ ，若 $\Delta=b^2-4ac>0$ ，则方程有两个不相等的实数根，若 $\Delta=b^2-4ac=0$ ，则方程有两个相等的实数根，若 $\Delta=b^2-4ac<0$ ，则方程没有实数根，据此求解即可.

【详解】解：A、 $\Delta=1^2-4 \times 1 \times 0=1>0$ ，故原方程有两个不相等的实数根，不符合题意；

B、 $\Delta=(-4)^2-4 \times 5 \times (-1)=36>0$ ，故原方程有两个不相等的实数根，不符合题意；

C、 $\Delta=(-4)^2-4 \times 3 \times 1=4>0$ ，故原方程有两个不相等的实数根，不符合题意；

D、 $\Delta=(-5)^2-4 \times 4 \times 2=-7<0$ ，故原方程没有实数根，符合题意；

故选：D.

5. 假设每一个参加宴会的人跟其他参会的人都握一次手，在宴会结束时，所有的参会者总共握手 28 次，那么参会人士共有多少人？设参会人士共有 x 人，则可列方程为 ()

- A. $x(x-1)=28$ B. $x(x+1)=28$ C. $\frac{x(x-1)}{2}=28$ D. $\frac{x(x+1)}{2}=28$

【答案】C

【解析】

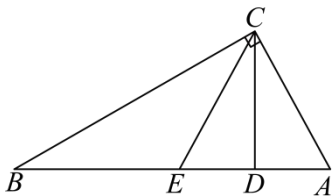
【分析】本题考查一元二次方程的应用，设参会人士共有 x 人，则根据两两握手一次，共握了 28 次手可列出方程，解出即可.

【详解】解：设参会人士共有 x 人，

则根据分析可得： $\frac{x(x-1)}{2}=28$.

故选：C.

6. 如图：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， CD 是斜边 AB 上的高， CE 是斜边上的中线，那么下列结论中错误的是（ ）



- A. $\angle ACD = \angle B$ B. $\angle ECB = \angle A - \angle ECD$
C. $\angle ACD = \angle ECB$ D. $\angle ECB = \angle DCE$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了直角三角形的性质，掌握三角形外角的性质、等腰三角形的性质，特殊三角形中边和角之间的关系是解决本题的关键. 根据特殊三角形中边和角之间的关系，判断三角形中角之间的关系.

【详解】解：A. 因为 $\angle A + \angle B = 90^\circ$, $\angle A + \angle ACD = 90^\circ$ ，根据同角的余角相等，可得 $\angle ACD = \angle B$ ，所以该选项正确；

B. 因为 $\angle ACD = \angle A - \angle ECD$ ，又由选项 A 知 $\angle ACD = \angle B$ ，且 CE 是中线， $AE = CE$ ，

所以 $\angle A = \angle ACE$, $\angle ECB = \angle ACB - \angle ACE = 90^\circ - \angle A$ ，

同时 $\angle ACD = \angle B$ ， $\angle BCD = 90^\circ - \angle ACD$, $\angle ECB = \angle BCD - \angle ECD$ ，

所以 $\angle ECB = \angle A - \angle ECD$ ，

该选项正确；

C. 由选项 A 知 $\angle ACD = \angle B$ ，因为 $CE = BE$ ，

所以 $\angle B = \angle ECB$ ，

所以 $\angle ACD = \angle ECB$ ，

该选项正确；

D. 在一般情况下, 无法得出 $\angle ECB = \angle DCE$,

该选项错误.

故选: D.

二、填空: (本大题共 12 题, 每题 2 分, 共 24 分)

7. 计算: $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $3-\sqrt{5}$ ## $-\sqrt{5}+3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的性质, 掌握二次根式的性质: $\sqrt{a^2} = |a|$ 是解题的关键.

利用二次根式的性质 $\sqrt{a^2} = |a|$, 将原式转化为绝对值表达式, 再根据内部表达式的符号进行化简即可.

【详解】 解: 根据二次根式的性质可得: $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = |\sqrt{5}-3|$,

$$\because \sqrt{5} < 3,$$

$$\therefore \sqrt{5}-3 < 0,$$

$$\therefore |\sqrt{5}-3| = 3-\sqrt{5}, \text{ 即 } \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = 3-\sqrt{5}.$$

故答案为: $3-\sqrt{5}$.

8. 化简: $\sqrt{50mn^2} (n > 0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $5n\sqrt{2m}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的化简, 将 50 分解为 25×2 , 利用 n^2 的算术平方根为 $n (n > 0)$, 提取平方因子后化简.

【详解】 解: $\because n > 0$,

$$\therefore \sqrt{50mn^2} = 5n\sqrt{2m},$$

故答案为: $5n\sqrt{2m}$.

9. 不等式 $\sqrt{5}x-1 > 2x$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x > \sqrt{5}+2$ ## $x > 2+\sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题主要考查了解一元一次不等式，分母有理化，严格遵循解不等式的基本步骤是解本题的关键，尤其需要注意不等式两边都乘以或除以同一个负数，不等号方向要改变。通过移项、合并同类项、系数化为1，再根据人次根式分母有理化化简即可求出不等式的解集。

【详解】解： $\sqrt{5}x - 1 > 2x$

$$\sqrt{5}x - 2x > 1$$

$$(\sqrt{5} - 2)x > 1$$

$$x > \frac{1}{\sqrt{5} - 2}, \text{ 即 } x > \frac{\sqrt{5} + 2}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \frac{\sqrt{5} + 2}{5 - 4} = \sqrt{5} + 2$$

故答案为： $x > \sqrt{5} + 2$.

10. 在实数范围内因式分解： $2x^2 - 4x - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2 \left(x - \frac{2 + \sqrt{6}}{2}\right) \left(x - \frac{2 - \sqrt{6}}{2}\right)$

【解析】

【分析】令原式为0 求出 x 的值，即可确定出因式分解的结果。

【详解】解：令 $2x^2 - 4x - 1 = 0$,

这里 $a = 2$, $b = -4$, $c = -1$,

$$\therefore \Delta = 16 + 8 = 24,$$

$$\therefore x = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2},$$

$$\text{则原式} = 2 \left(x - \frac{2 + \sqrt{6}}{2}\right) \left(x - \frac{2 - \sqrt{6}}{2}\right) .$$

$$\text{故答案为 } 2 \left(x - \frac{2 + \sqrt{6}}{2}\right) \left(x - \frac{2 - \sqrt{6}}{2}\right) .$$

【点睛】此题考查了实数范围内分解因式，熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键。

11. 方程 $(x - 1)^2 = 49$ 的解是_____.

【答案】 $x_1 = 8$, $x_2 = -6$

【解析】

【分析】本题主要考查了运用平方根解方程，灵活运用平方根解方程是解题的关键。

直接运用平方根解方程即可.

【详解】解: $\because (x-1)^2 = 49$,

$\therefore x-1 = \pm\sqrt{49}$, 即 $x-1 = \pm 7$,

当 $x-1 = 7$ 时, 解得: $x = 8$,

当 $x-1 = -7$ 时, 解得: $x = -6$.

综上, $x_1 = 8$, $x_2 = -6$.

故答案为: $x_1 = 8$, $x_2 = -6$

12. 已知 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 = 2x + 1$ 的两个根, 则 $x_1 + x_2$ 的值为_____.

【答案】2

【解析】

【分析】先把方程化为一般式, 然后根据根与系数的关系求解.

【详解】解: $x^2 - 2x - 1 = 0$,

根据题意得 $x_1 + x_2 = 2$.

故答案为: 2.

【点睛】本题考查了根与系数的关系: 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两根时,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

13. 关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 - 2x + 3 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < \frac{4}{3}$ 且 $k \neq 1$

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程的定义、一元二次方程的根的判别式等知识点, 掌握一元二次方程的二次项系数不能为零是解题的关键.

根据一元二次方程有两个不相等的实数根的条件“二次项系数不为零且判别式大于零”, 据此求解即可.

【详解】解: $\because$ 方程 $(k-1)x^2 - 2x + 3 = 0$ 是一元二次方程,

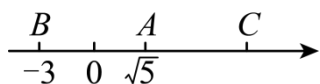
$\therefore$ 二次项系数 $k-1 \neq 0$, 即 $k \neq 1$;

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (k-1) \times 3 = 4 - 12(k-1) = 16 - 12k > 0. \text{ 解得: } k < \frac{4}{3}.$$

综上, k 的取值范围为 $k < \frac{4}{3}$ 且 $k \neq 1$.

故答案为: $k < \frac{4}{3}$ 且 $k \neq 1$.

14. 如图, 在数轴上, 点 B 与点 C 关于点 A 对称, A 、 B 两点对应的实数分别是 $\sqrt{5}$ 和 -3 , 那么点 C 所对应的实数是_____.



【答案】 $2\sqrt{5} + 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了数轴上两点间的距离, 对称的性质, 熟练掌握两点间的距离公式是解题的关键. 设点 C 表示的数为 x , 根据两点间的距离公式可得到 $x - \sqrt{5} = \sqrt{5} - (-3)$, 求解即可得到答案.

【详解】 解: 设点 C 表示的数为 x ,

根据题意, 得 $x - \sqrt{5} = \sqrt{5} - (-3)$,

解得 $x = 2\sqrt{5} + 3$,

$\therefore$ 点 C 所对应的实数为 $2\sqrt{5} + 3$,

故答案为: $2\sqrt{5} + 3$.

15. 随着网络购物的兴起, 增加了快递公司的业务量, 一家今年刚成立的小型快递公司业务量逐月攀升, 今年 9 月份和 11 月份完成投送的快递件数分别是 20 万件和 24.2 万件, 若该公司每月投送的快递件数的平均增长是 x , 由题意列出关于 x 的方程: _____.

【答案】 $20(1+x)^2 = 24.2$

【解析】

【分析】 根据题意, 该公司每月投送的快递件数的平均增长是 x , 则 10 月份完成投送的快递件数为 $20(1+x)$ 万件, 则 11 月份完成投送的快递件数为 $20(1+x)^2$ 万件, 根据 11 月份完成投送的快递件数为 24.2 万件, 列出一元二次方程即可

【详解】 解: 设该公司每月投送的快递件数的平均增长是 x , 根据题意得

$20(1+x)^2 = 24.2$

故答案为: $20(1+x)^2 = 24.2$

【点睛】 本题考查了一元二次方程的应用，根据等量关系列出一元二次方程是解题的关键.

16. 直角三角形斜边上的高和中线分别为 4 厘米和 6 厘米，则此三角形面积为_____平方厘米.

【答案】 24

【解析】

【分析】 本题主要考查了直角三角形的性质、三角形的面积等知识点，掌握直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半是解题的关键.

利用直角三角形斜边上的中线性质的求斜边长，再根据面积公式计算即可

【详解】 解： $\because$ 直角三角形斜边上的中线为 6 厘米，

$\therefore$ 斜边长为 $2 \times 6 = 12$ 厘米.

又 $\because$ 斜边上的高为 4 厘米，

$\therefore$ 三角形面积为 $\frac{1}{2} \times 12 \times 4 = 24$ 平方厘米.

故答案为 24.

17. 如果一元二次方程的两根相差 1, 那么该方程称为“差 1 方程”. 例如 $x^2 + x = 0$ 是“差 1 方程”. 已知关于 x 的方程 $x^2 - (m-1)x - m = 0$ (m 是常数) 是“差 1 方程”，则 m 的值为_____

【答案】 -2 或 0 或 -2

【解析】

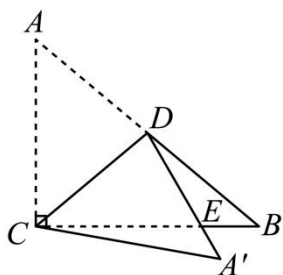
【分析】 本题考查根与系数的关系. 设方程的两个根为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 由题意, 得:
 $x_1 + x_2 = m-1, x_1 x_2 = -m$, $x_2 - x_1 = 1$, 利用完全平方公式的变形式进行计算即可.

【详解】 解: 设方程的两个根为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 由题意, 得: $x_1 + x_2 = m-1, x_1 x_2 = -m$, $x_2 - x_1 = 1$,
 $\therefore (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = (m-1)^2 + 4m = 1$,

解得: $m = -2$ 或 $m = 0$,

故答案为: -2 或 0.

18. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle B = 40^\circ$, 点 D 是 AB 的中点, 将 $\triangle ACD$ 沿 CD 对折, 点 A 落在点 A' 处, $A'D$ 与 BC 相交于点 E , 则 $\angle BED$ 的度数为_____.



【答案】 120° ##120 度

【解析】

【分析】 本题考查直角三角形中的折叠问题，涉及三角形的内角和定理的应用，解题的关键是掌握折叠的性质.

由 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle B = 40^\circ$ ，得 $\angle A = 50^\circ$ ，根据 D 是斜边 AB 的中点，得 $\angle ACD = \angle A = 50^\circ$ ，可得 $\angle ADC = 180^\circ - \angle ACD - \angle A = 80^\circ$ ，而将 $\triangle ACD$ 沿 CD 对折，使点 A 落在点 A' 处，有 $\angle CDA' = \angle ADC = 80^\circ$ ，即知 $\angle BDE = 180^\circ - \angle CDA' - \angle ADC = 20^\circ$ ，从而可得答案.

【详解】 解： $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle B = 40^\circ$ ，

$$\therefore \angle A = 50^\circ,$$

$\because D$ 是斜边 AB 的中点，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = AD,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle A = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle ACD - \angle A = 80^\circ,$$

$\because$ 将 $\triangle ACD$ 沿 CD 对折，使点 A 落在点 A' 处，

$$\therefore \angle CDA' = \angle ADC = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE = 180^\circ - \angle CDA' - \angle ADC = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle BED = 180^\circ - \angle BDE - \angle B = 180^\circ - 20^\circ - 40^\circ = 120^\circ,$$

故答案为： 120° .

三、简答题：（本大题共 8 题，19~24 每题 6 分，22、25 题 8 分，26 题 12 分，共 58 分）

19. 计算： $\frac{\sqrt{2}}{2} \left(2\sqrt{12} + 4\sqrt{\frac{1}{8}} - 2\sqrt{48} \right)$

【答案】 $1 - 2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算：先把二次根式化为最简二次根式，然后去括号，合并同类二次根式即可.

$$\begin{aligned}
& \text{【详解】解: } \frac{\sqrt{2}}{2} \left(2\sqrt{12} + 4\sqrt{\frac{1}{8}} - 2\sqrt{48} \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} (4\sqrt{3} + \sqrt{2} - 8\sqrt{3}) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2} - 4\sqrt{3}) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4\sqrt{3} \\
&= 1 - 2\sqrt{6}
\end{aligned}$$

20. 配方法解方程: $2x^2 - x - 1 = 0$

$$\text{【答案】 } x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

【解析】

【分析】本题主要考查了配方法解一元二次方程，灵活运用完全平方公式进行配方是解题的关键.

先把二次项系数化为 1，然后把常数项 -1 移到方程右边，再给两边同时加上一次项系数一半的平方，最后利用开平方法求解即可.

$$\text{【详解】解: } 2x^2 - x - 1 = 0,$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0,$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2},$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{16},$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16},$$

$$x - \frac{1}{4} = \pm \frac{3}{4},$$

$$x = \pm \frac{3}{4} + \frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$21. \text{ 解方程: } \frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = 1.$$

$$\text{【答案】 } x = -4$$

【解析】

【分析】先去分母，将分式方程化为整式方程，再用因式分解法求解，最后进行检验即可.

【详解】解: $\frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x(x-2)} = 1,$

$$2x^2 - 8 = x^2 - 2x,$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0,$$

$$(x-2)(x+4) = 0,$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -4,$$

检验: 当 $x = 2$ 时, $x(x-2) = 0$; 当 $x = -4$ 时, $x(x-2) \neq 0$;

$\therefore x = -4$ 是原分式方程的解.

【点睛】本题主要考查了解分式方程和解一元二次方程, 解题的关键是熟练掌握解分式方程和解一元二次方程的方法和步骤.

22. 已知 $x^2 - 2mx - m - 1 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程.

(1) 证明: 不论 m 取何值, 该方程总有两个不相等的实数根;

(2) 设该方程的两个根为 x_1, x_2 , 当 $m = 2$ 时, 求 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值.

【答案】(1) 见解析 (2) $-\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根的判别式和根与系数的关系, 以及方程的解;

(1) 直接计算原方程根的判别式, 结合非负性证明即可;

(2) 运用根与系数的关系求得 $x_1 + x_2 = 4$, $x_1 x_2 = -3$, 再整体代入求解即可.

【小问 1 详解】

证明: 依题意, $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= (-2m)^2 - 4 \times 1 \times (-m-1)$$

$$= 4m^2 + 4m + 4$$

$$= 4\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + 3 > 0,$$

∴ 无论 m 取何值，此方程总有两个不相等的实数根；

【小问 2 详解】

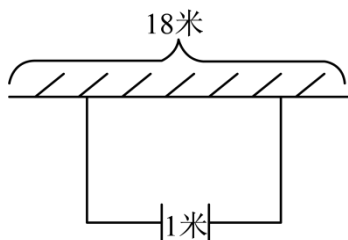
解：当 $m = 2$ 时，方程化为 $x^2 - 4x - 3 = 0$ ，

∴ 该方程的两根为 x_1, x_2 ，

$$\therefore x_1 + x_2 = 4, \quad x_1 x_2 = -3,$$

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}.$$

23. 如图，现有一个面积为 160 平方米的长方形养鸡场，鸡场的一边靠墙（墙长 18 米），另三边用竹篱笆围成，在与墙平行的一边，开一扇 1 米宽的门。如果竹篱笆的长为 35 米，求这个长方形养鸡场与墙垂直的边长是多少？与墙平行的边长是多少？（列方程解答）



【答案】这个长方形养鸡场与墙垂直的边长是 10 米，则与墙平行的边长是 16 米

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程的实际应用，设这个长方形养鸡场与墙垂直的边长是 x 米，则与墙平行的边长是 $(36 - 2x)$ 米，再根据长方形面积计算公式建立方程求解即可。

【详解】解：设这个长方形养鸡场与墙垂直的边长是 x 米，则与墙平行的边长是 $35 - 2x + 1 = (36 - 2x)$ 米，由题意得， $x(36 - 2x) = 160$ ，

$$\text{整理得 } x^2 - 18x + 80 = 0,$$

$$\text{解得 } x = 8 \text{ 或 } x = 10,$$

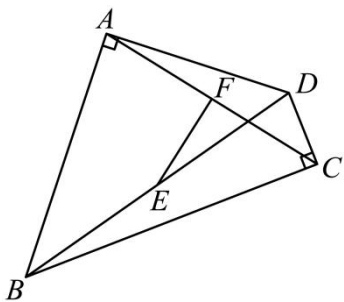
当 $x = 10$ 时， $36 - 2x = 16 < 18$ ，符合题意；

当 $x = 8$ 时， $36 - 2x = 20 > 18$ ，不符合题意；

$$\therefore x = 10, \quad 36 - 2x = 16,$$

答：这个长方形养鸡场与墙垂直的边长是 10 米，则与墙平行的边长是 16 米。

24. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle DCB = 90^\circ$ ， E, F 分别是 BD, AC 的中点。求证： $EF \perp AC$ 。

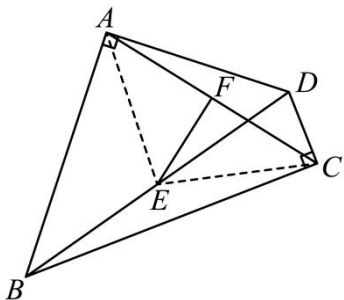


【答案】 详见解析

【解析】

【分析】 本题考查了直角三角形斜边中线定理和全等三角形的判定与性质，先证明 $AE = \frac{1}{2}BD$ ， $CE = \frac{1}{2}BD$ ，可得到 $AE = CE$ ，再根据全等三角形即可证明.

【详解】 证明：连接 AE, CE ，如图所示，



$\because \angle BAD = 90^\circ, \angle DCB = 90^\circ$ ， E, F 分别是 BD, AC 的中点，

$$\therefore AE = \frac{1}{2}DB, CE = \frac{1}{2}DB, \quad AF = CF$$

$$\therefore AE = CE,$$

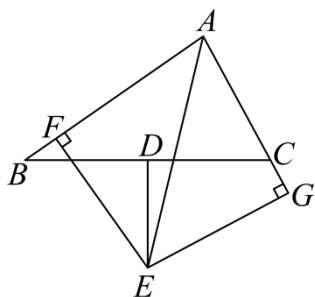
$$\therefore \begin{cases} AF = CF \\ AE = CE \\ EF = EF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle CEF \text{ (SSS)},$$

$$\therefore \angle AFE = \angle CFE = \frac{1}{2}\angle AFC = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore EF \perp AC.$$

25. 已知 ABC 中， D 为 BC 的中点， E 为 $\angle BAC$ 的平分线上的点， $EF \perp AB$ 于 F ， $EG \perp AC$ 交 AC 的延长线于 G ， $BF = CG$ ，求证： $DE \perp BC$.



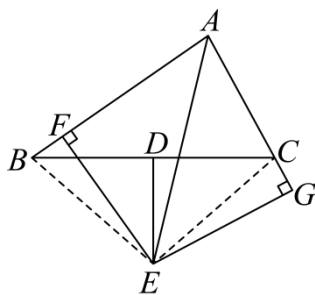
【答案】证明见解析

【解析】

【分析】本题考查了角平分线的性质、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的三线合一，通过全等得到等腰三角形是解题的关键.

由角平分线性质可得 $EF = EG$ ，可证 $\triangle BFE \cong \triangle CGE$ (SAS)，得 $BE = CE$ ，由 D 为 BC 的中点，三线合一即可得出 $DE \perp BC$.

【详解】证明：如图，连接 BE 、 CE ，



$\because E$ 为 $\angle BAC$ 的平分线上的点， $EF \perp AB$ ， $EG \perp AC$ ，

$\therefore EF = EG$ ， $\angle BFE = \angle CGE = 90^\circ$ ，

在 $\triangle BFE$ 和 $\triangle CGE$ 中，

$$\begin{cases} EF = EG \\ \angle BFE = \angle CGE, \\ BF = CG \end{cases}$$

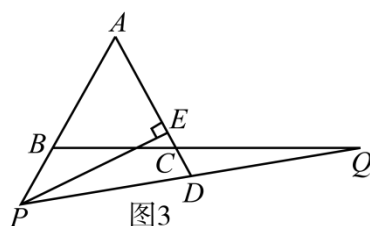
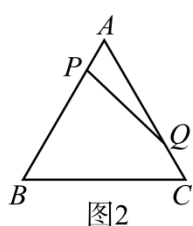
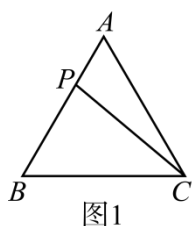
$\therefore \triangle BFE \cong \triangle CGE$ (SAS)，

$\therefore BE = CE$ ，

又 $\because D$ 为 BC 的中点，

$\therefore DE \perp BC$.

26. 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = BC = 20$ cm，动点 P 以每秒 1cm 的速度从点 A 出发，沿射线 AB 运动. 设点 P 的运动时间为 t ($t > 0$) 秒.



(1) 当 $t = 10$ 时, 求证: $\triangle PAC$ 是直角三角形.

(2) 如图 2, 若另一动点 Q 在线段 CA 上以每秒 2cm 的速度由点 C 向点 A 运动, 且与点 P 同时出发, 点 Q 到达终点 A 时点 P 也随之停止运动. 当 $\triangle PAQ$ 是直角三角形时, 直接写出 t 的值.

(3) 如图 3, 若另一动点 Q 从点 C 出发, 以每秒 1cm 的速度沿射线 BC 方向运动, 且与点 P 同时出发. 当点 P 运动到在 AB 的延长线上, 连接 PQ 交 AC 延长线于点 D , 过点 P 作 $PE \perp AC$ 于 E . 在运动过程中, 线段 DE 的长度是否发生变化? 为什么?

【答案】 (1) 见解析 (2) $t = 5$ 或 $t = 8$

(3) DE 的长度不变化, $DE = 10$, 理由见解析

【解析】

【分析】 (1) 利用等腰三角形三线合一性质, 证明 $PC \perp AB$ 即可.

(2) 分 $\angle APQ = 90^\circ$ 和 $\angle AQP = 90^\circ$, 两种情况, 利用直角三角形中, 30° 角所对的直角边是斜边的一半, 列式计算即可.

(3) 过点 Q 作 $QF \perp AD$, 交 AD 的延长线于点 F , 证明 $\triangle AEP \cong \triangle CFQ$, 得到 $EP = FQ$, 再证明 $\triangle EPD \cong \triangle FQD$ 即可得证.

【小问 1 详解】

$\because$ 动点 P 以每秒 1cm 的速度从点 A 出发, $t = 10$

$\therefore t = 10$ 时, $PA = 10\text{ cm}$,

$\because AB = AC = BC = 20\text{ cm}$

$\therefore PA = PB$,

$\therefore PC \perp AB$,

$\therefore \triangle PAC$ 是直角三角形.

【小问 2 详解】

$\because$ 动点 P 以每秒 1cm 的速度从点 A 出发, 另一动点 Q 在线段 CA 上以每秒 2cm 的速度由点 C 向点 A 运动, 且与点 P 同时出发,

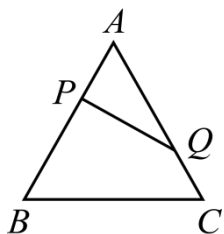
$\therefore PA = t\text{ cm}$, $QC = 2t\text{ cm}$,

$$\therefore AB = AC = BC = 20 \text{ cm}$$

$$\therefore AQ = AC - CQ = (20 - 2t) \text{ cm}, \quad \angle PAQ = 60^\circ,$$

当 $\angle APQ = 90^\circ$ 时, $\angle AQP = 30^\circ$,

$$\therefore AQ = 2PA,$$

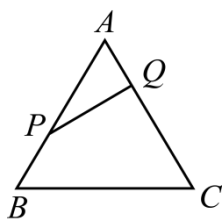


$$\therefore 20 - 2t = 2t,$$

解得 $t = 5(\text{s})$

如图, $\angle AQP = 90^\circ$ 时, $\angle APQ = 30^\circ$,

$$\therefore 2AQ = PA,$$



$$\therefore 2(20 - 2t) = t,$$

解得 $t = 8(\text{s})$

故当 $\triangle PAQ$ 是直角三角形时, $t = 5$ 或 $t = 8$.

【小问 3 详解】

DE 的长度不变化, $DE = 10$. 理由如下:

过点 Q 作 $QF \perp AD$, 交 AD 的延长线于点 F ,

$$\therefore AB = AC = BC = 20 \text{ cm}$$

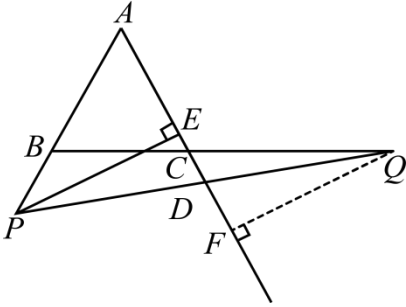
$$\therefore \angle PAE = \angle ACB = \angle QCF = 60^\circ,$$

根据题意, $AP = CQ$,

$$\therefore \begin{cases} \angle PAE = \angle QCF \\ \angle PEA = \angle QFC, \\ PA = QC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEP \cong \triangle CFQ (\text{AAS}),$$

$$\therefore EP = FQ, \quad AE = CF,$$



$$\therefore AE + EC = CF + EC,$$

$$\therefore AC = EF = 20(\text{cm}),$$

$$\therefore \begin{cases} \angle PDE = \angle QDF \\ \angle PED = \angle QFD, \\ PE = QF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EPD \cong \triangle FQD (\text{AAS}),$$

$$\therefore DE = DF.$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}AC = 10(\text{cm}).$$

故 DE 的长度不变化, $DE = 10$.

【点睛】 本题考查了等边三角形的性质, 等腰三角形的三线合一性质, 三角形全等的判定和性质, 含特殊角的直角三角形, 分类思想, 熟练掌握分类思想, 三角形全等的判定和性质, 直角三角形的特征是解题的关键.