

2025 学年第一学期八年级数学学科练习二

(完成时间 90 分钟满分 150 分)

注意:

1. 本试卷共 25 题.

2. 请将所有答案做在答卷的指定位置上, 做在试卷上一律不计分.

一、选择题: (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

1. 下列各数中, 为无理数的是 ()

- A. π B. $\frac{22}{7}$ C. 0 D. -2

【答案】A

【解析】

【分析】根据无理数的定义逐项判断即可.

【详解】A、 π 是无理数, 符合题意;

B、 $\frac{22}{7} = 3.142857\ldots$ 小数点后的 142857 是无限循环的, 则 $\frac{22}{7}$ 是有理数, 不符题意;

C、0 是整数, 属于有理数, 不符题意;

D、-2 是有理数, 不符题意,

故选: A.

【点睛】本题考查了无理数的定义, 熟记定义是解题关键.

2. 党的二十大报告中指出, 我国全社会研发经费支出从一万亿元增加到二万八千亿元, 居世界第二位, 研发人员总量居世界首位. 将 28000000000000 用科学记数法表示为 ()

- A. 0.28×10^{13} B. 2.8×10^{11} C. 2.8×10^{12} D. 28×10^{11}

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了科学记数法, 掌握科学记数法的表示方法是解题的关键, 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 对于 28000000000000, 将小数点向左移动 12 位得到 2.8, 因此 $n = 12$.

【详解】解: $\because 28000000000000 = 2.8 \times 10^{12}$,

$\therefore$ 用科学记数法表示为 2.8×10^{12} ,

故选: C.

3. 式子 $\sqrt{x+2}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是 ()

- A. $x > -2$ B. $x \geq -2$ C. $x < -2$ D. $x \leq -2$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查二次根式有意义的条件，熟练掌握二次根式有意义的条件是解题的关键；二次根式在实数范围内有意义的条件是被开方数大于或等于零，然后问题可求解.

【详解】解：∵ $\sqrt{x+2}$ 在实数范围内有意义，

$$\therefore x+2 \geq 0,$$

$$\therefore x \geq -2,$$

故选 B.

4. 一元二次方程 $x^2 - x + 3 = 0$ 的根的情况是 ()

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 无实数根

D. 只有一个实数根

【答案】C

【解析】

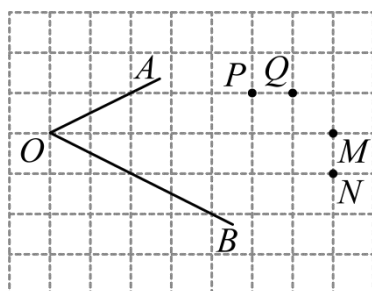
【分析】本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 与根的关系，熟练掌握根的判别式与根的关系式解答本题的关键. 当 $\Delta > 0$ 时，一元二次方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，一元二次方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，一元二次方程没有实数根. 求出根的判别式即可解答.

【详解】解：∵ $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -11$,

∴ 方程无实数根.

故选 C.

5. 在正方形网格中， $\angle AOB$ 的位置如图所示，到 $\angle AOB$ 两边距离相等的点应是 ()



A. M 点

B. N 点

C. P 点

D. Q 点

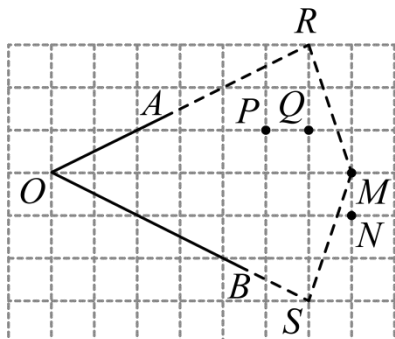
【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了角平分线的性质，网格与勾股定理，全等三角形的性质与判定，证明 OM 平分 $\angle AOB$

是解题的关键. 证明 $\triangle ORM \cong \triangle OSM$ (SSS), 则根据全等三角形的对应角相等得到 $\angle ROM = \angle SOM$, 根据角平分线的性质即可求解.

【详解】解: 如图, 连接 MR, MS, OM ,



根据网格得出 $RO = SO = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$, $RM = SM = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$,

在 $\triangle ORM$ 与 $\triangle OSM$ 中

$$\begin{cases} RO = SO \\ RM = SM \\ OM = OM \end{cases}$$

$\therefore \triangle ORM \cong \triangle OSM$ (SSS),

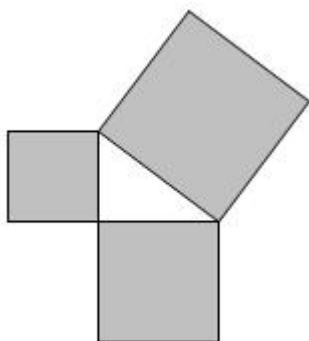
$\therefore \angle ROM = \angle SOM$,

即 OM 平分 $\angle AOB$

$\therefore$ 到 $\angle AOB$ 两边距离相等的格点应是点 M ,

故选 A

6. 如图是用三块正方形纸片以顶点相连的方式设计的“毕达哥拉斯”图案. 现有五种正方形纸片, 面积分别是 1, 2, 3, 4, 5, 选取其中三块 (可重复选取) 按图的方式组成图案, 使所围成的三角形是面积最大的直角三角形, 则选取的三块纸片的面积分别是 ()



A. 1, 4, 5

B. 2, 3, 5

C. 3, 4, 5

D. 2, 2, 4

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据勾股定理， $a^2 + b^2 = c^2$ ， 则小的两个正方形的面积等于大正方形的面积， 再分别进行判断， 即可得到面积最大的三角形.

【详解】 解： 根据题意， 设三个正方形的边长分别为 a 、 b 、 c ，

由勾股定理， 得 $a^2 + b^2 = c^2$ ，

A、 $\because 1+4=5$ ， 则两直角边分别为： 1 和 2， 则面积为： $\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$ ；

B、 $\because 2+3=5$ ， 则两直角边分别为： $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ ， 则面积为： $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ；

C、 $\because 3+4 \neq 5$ ， 则不符合题意；

D、 $\because 2+2=4$ ， 则两直角边分别为： $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{2}$ ， 则面积为： $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1$ ；

$\therefore \frac{\sqrt{6}}{2} > 1$ ，

故选： B.

【点睛】 本题考查了正方形的性质， 勾股定理的应用， 以及三角形的面积公式， 解题的关键是熟练掌握勾股定理， 以及正方形的性质进行解题.

二、 填空题： (本题共 12 小题， 每小题 4 分， 共 48 分)

7. 计算 $\sqrt{3} - 2$ 的绝对值是_____.

【答案】 $2 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据 $\sqrt{3} < 2$ ， 即可得.

【详解】 解： $\because \sqrt{3} < 2$ ，

$\therefore |\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$ ，

故答案为： $2 - \sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了绝对值， 解题的关键是掌握绝对值的意义.

8. 比较大小： $\sqrt{13} - 1$ _____ 3 (选填 “>”， “<” 或 “=”).

【答案】 <

【解析】

【分析】先判断出 $3 < \sqrt{13} < 4$ ，即可判断出 $2 < \sqrt{13} - 1 < 3$ ，问题得解.

【详解】解： $\because 3 < \sqrt{13} < 4$,

$$\therefore 2 < \sqrt{13} - 1 < 3.$$

故答案为： $<$

【点睛】本题考查了实数的大小比较，正确估算出 $\sqrt{13}$ 的取值是解题关键.

9. 已知 a, b 是两个连续整数，若 $a < \sqrt{7} < b$ ，则 $\sqrt{a^b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】本题主要考查无理数的估算及算术平方根，熟练掌握无理数的估算及算术平方根是解题的关键；首先估算 $\sqrt{7}$ 的取值范围，由于 $4 < 7 < 9$ ，因此 $\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$ ，即 $2 < \sqrt{7} < 3$ ，从而确定连续整数 $a = 2$ ， $b = 3$ ；然后计算 $\sqrt{a^b} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$ ，并化简为 $2\sqrt{2}$ ，然后问题可求解.

【详解】解：因为 $4 < 7 < 9$ ，所以 $\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$ ，即 $2 < \sqrt{7} < 3$.

由于 a, b 是两个连续整数，且 $a < \sqrt{7} < b$ ，

因此 $a = 2, b = 3$.

$$\text{则 } \sqrt{a^b} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

故答案为 $2\sqrt{2}$.

10. 若 $x = \sqrt{6} + 1, y = \sqrt{6} - 1$ ，则 $x^2 - y^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $4\sqrt{6}$

【解析】

【分析】先求解 $x + y, x - y$ ，再把 $x^2 - y^2$ 分解因式，再整体代入求值即可.

【详解】解： $\because x = \sqrt{6} + 1, y = \sqrt{6} - 1$,

$$\therefore x + y = 2\sqrt{6}, x - y = 2,$$

$$\therefore x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 2\sqrt{6} \times 2 = 4\sqrt{6}.$$

故答案为: $4\sqrt{6}$

【点睛】 本题考查的是二次根式的混合运算, 熟练的利用平方差公式进行简便运算是解本题的关键.

11. 一元二次方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程的解法, 熟练掌握一元二次方程的解法是解题的关键; 对于一元二次方程 $x^2 - x - 1 = 0$, 由于无法直接因式分解, 采用求根公式求解, 先计算判别式, 再代入公式求解即可.

【详解】 解: 方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 中, $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5,$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2};$$

故答案为 $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

12. 已知等腰三角形的两边长满足 $\sqrt{a-4} + b^2 - 4b + 4 = 0$, 那么这个等腰三角形的周长为_____.

【答案】 10

【解析】

【分析】 根据算术平方根和平方的非负性求得 a , b , 分情况讨论, 求解即可.

【详解】 解: $\because \sqrt{a-4} + b^2 - 4b + 4 = \sqrt{a-4} + (b-2)^2 = 0$,

$$\therefore a-4=0, b-2=0,$$

解得 $a=4$, $b=2$

当腰长为 2, 底边为 4 时:

$2+2=4$, 不满足三角形三边条件, 不符合题意;

当腰长为 4, 底边为 2 时:

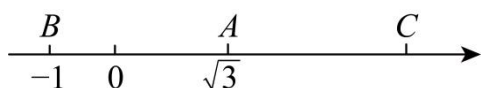
$2+4=6>4$, $4-4=0<2$, 满足三角形三边条件,

此时等腰三角形的周长为 $4+4+2=10$.

故答案为: 10.

【点睛】 本题主要考查的是非负数的性质、等腰三角形的定义，三角形的三边关系，利用三角形的三边关系进行验证是解题的关键.

13. 如图所示的数轴上，点 A 是线段 BC 的中点， A 和 B 两点对应的实数是 $\sqrt{3}$ 和 -1 ，则线段 BC 的长为 _____.



【答案】 $2\sqrt{3}+2$

【解析】

【分析】 证明 $AB = AC = \frac{1}{2}BC$ ，求解 $AB = \sqrt{3} - (-1) = \sqrt{3} + 1$ ，可得 BC .

【详解】 解： $\because$ 点 A 是线段 BC 的中点，

$$\therefore AB = AC = \frac{1}{2}BC,$$

$\therefore$ ， A 和 B 两点对应的实数是 $\sqrt{3}$ 和 -1 ，

$$\therefore AB = \sqrt{3} - (-1) = \sqrt{3} + 1,$$

$$\therefore BC = 2(\sqrt{3} + 1) = 2\sqrt{3} + 2;$$

故答案为： $2\sqrt{3}+2$

【点睛】 本题考查的是数轴上两点之间的距离，线段的中点的含义，实数与数轴，熟记数轴上两点之间的距离公式是解本题的关键.

14. 如图，在长方形 $ABCD$ 内，两个小正方形的面积分别为 2，18，则图中阴影部分的面积等于_____.



【答案】 4

【解析】

【分析】 由两个小正方形的面积分别为 2，18，得出其边长，进而即可求出阴影部分的面积.

【详解】 $\because$ 两个小正方形的面积分别为 2，18，

∴ 小正方形的边长为 $\sqrt{2}$ ，大正方形边长为 $3\sqrt{2}$ ，

∴ 阴影部分的长为 $3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ ，宽为 $\sqrt{2}$ ，

∴ 阴影部分的面积 $= 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$ ，

故答案是 4

【点睛】 本题主要考查二次根式的运算及其应用，熟练掌握二次根式的四则运算，是解题的关键.

15. 某市准备加大对雾霾的治理力度，2015 年第一季度投入资金 100 万元，第二季度和第三季度共投入资金 260 万元，求这两个季度投入资金的平均增长率. 设这两个季度投入资金的平均增长率为 x ，根据题意可列方程为_____.

【答案】 $100(1+x)+100(1+x)^2=260$

【解析】

【详解】 解： 设两个季度投入资金的平均增长率为 x ，则第二季度投入资金为 $100(1+x)$ 万元，第三季度投入的资金为 $100(1+x)^2$ 万元，

根据第二季度和第三季度共投入资金 260 万元可列方程为 $100(1+x)+100(1+x)^2=260$.

故答案是： $100(1+x)+100(1+x)^2=260$.

16. 若 m 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的根，则 $m^2 + \frac{1}{m^2} =$ _____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 由 m 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的根，可得 $m^2 = 2m + 1$ ，把 $m^2 + \frac{1}{m^2}$ 化为 $2m + 1 + \frac{1}{2m + 1}$ ，再通分变形即可.

【详解】 解： ∵ m 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的根，

∴ $m^2 - 2m - 1 = 0$ ，即 $m^2 = 2m + 1$ ，

∴ $m^2 + \frac{1}{m^2} = 2m + 1 + \frac{1}{2m + 1}$

$= \frac{(2m + 1)^2 + 1}{2m + 1}$

$= \frac{4m^2 + 4m + 2}{2m + 1}$

$= \frac{8m + 4 + 4m + 2}{2m + 1}$

$$= \frac{6(2m+1)}{2m+1}$$

$= 6$;

【点睛】 本题考查的是一元二次方程的解的含义，分式的化简求值，准确的把原分式变形，再求值是解本题的关键.

17. 在实数范围内定义一种运算 “ $*$ ”，其运算法则为 $a*b = a^2 - ab$. 根据这个法则，下列结论中正确的是_____. (把所有正确结论的序号都填在横线上)

① $\sqrt{2} * \sqrt{3} = 2 - \sqrt{6}$; ② 若 $a+b=0$, 则 $a*b = b*a$; ③ $(x+2)*(x+1) = 0$ 是一元二次方程; ④ 方程 $(x+3)*1 = 1$

的根是 $x_1 = \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$.

【答案】 ①②④

【解析】

【分析】 根据运算法则为 $a*b = a^2 - ab$, 一一判断即可.

【详解】 解: 根据已知条件: $a*b = a^2 - ab$,

① $\because \sqrt{2} * \sqrt{3} = (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2 - \sqrt{6}$, ①正确;

② 若 $a+b=0$, 则 $a=-b$, $\therefore a*b = a^2 - ab = b^2 - ba = b*a$, ②正确;

③ $(x+2)*(x+1) = (x+2)^2 - (x+2)(x+1) = x^2 + 5x + 6$, ③错误;

④ $(x+3)*1 = (x+3)^2 - (x+3) = x^2 + 5x + 6$,

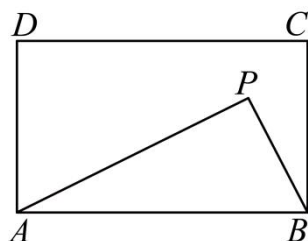
$\therefore (x+3)*1 = 1$ 即为方程 $x^2 + 5x + 6 = 1$, 化简得 $x^2 + 5x + 5 = 0$,

计算得出 $x_1 = \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$, ④正确.

因此, 本题正确答案是: ①②④

【点睛】 本题主要考查一元二次方程新定义问题及多项式乘法的运算.

18. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 5$, $AD = 3$, 动点 P 满足 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{3} S_{\text{矩形}ABCD}$, 则点 P 到 A 、 B 两点距离之和 $PA + PB$ 的最小值为_____.



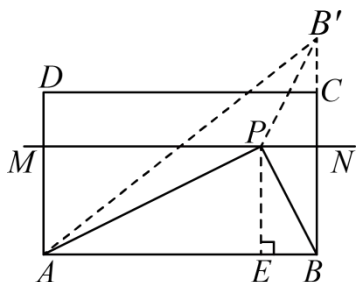
【答案】 $\sqrt{41}$

【解析】

【分析】 本题考查了矩形的性质，轴对称的性质，勾股定理. 明确线段和最小的情况是解题的关键.

如图，作 $PE \perp AB$ 于 E ，则 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} AB \times PE$ ， $S_{\text{矩形}ABCD} = AB \times AD$ ，由 $\frac{1}{2} AB \times PE = \frac{1}{3} AB \times AD$ ，可得 $PE = 2$ ，即 P 在距离 AB 为 2 的直线 MN 上运动，如图，作 B 关于直线 MN 的对称点 B' ，连接 PB' ， AB' ，由轴对称的性质可得， $PB' = PB$ ， $BB' = 4$ ，由 $PA + PB = PA + PB'$ ，可知当 A 、 P 、 B' 三点共线时， $PA + PB$ 最小，为 AB' ，根据勾股定理求 AB' 即可.

【详解】 解：如图，作 $PE \perp AB$ 于 E ，



$$\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} AB \times PE, S_{\text{矩形}ABCD} = AB \times AD,$$

$$\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{3} S_{\text{矩形}ABCD},$$

$$\therefore \frac{1}{2} AB \times PE = \frac{1}{3} AB \times AD,$$

解得， $PE = 2$ ，

$\therefore P$ 在距离 AB 为 2 的直线 MN 上运动，

如图，作 B 关于直线 MN 的对称点 B' ，连接 PB' ， AB' ，

由轴对称的性质可得， $PB' = PB$ ， $BB' = 4$ ，

$$\therefore PA + PB = PA + PB',$$

$\therefore$ 当 A 、 P 、 B' 三点共线时， $PA + PB$ 最小，为 AB' ，

$$\text{由勾股定理得， } AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = \sqrt{41},$$

故答案为： $\sqrt{41}$.

三、简答题：（本大题共 2 小题，共 20 分）

19. 解方程：

(1) $x^2 - 4x - 3 = 0$ （用配方法解）；

(2) $3x(x-2) - (x-2) = 0$.

【答案】 (1) $x_1 = 2 + \sqrt{7}, x_2 = 2 - \sqrt{7}$

(2) $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程的解法，熟练掌握一元二次方程的解法是解题的关键；

(1) 根据配方法可进行求解；

(2) 根据因式分解法可进行求解.

【小问 1 详解】

解: $x^2 - 4x - 3 = 0$

$$x^2 - 4x = 3$$

$$x^2 - 4x + 4 = 7$$

$$(x-2)^2 = 7$$

$$x-2 = \pm\sqrt{7}$$

$$\therefore x_1 = 2 + \sqrt{7}, x_2 = 2 - \sqrt{7};$$

【小问 2 详解】

解: $3x(x-2) - (x-2) = 0$

$$(x-2)(3x-1) = 0$$

$$x-2=0 \text{ 或 } 3x-1=0,$$

$$\therefore x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{3}.$$

20. 计算:

(1) $3\sqrt{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{6} \div \sqrt{8};$

(2) $\sqrt{32} - 6\sqrt{\frac{1}{2}} + (2\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-1)$

【答案】 (1) $\frac{3}{4}\sqrt{6}$

(2) $11 + \sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的运算，熟练掌握二次根式的运算是解题的关键；

- (1) 根据二次根式的乘除法可进行求解；
(2) 根据二次根式的混合运算可进行求解.

【小问 1 详解】

$$\text{解: 原式} = 3 \times \frac{1}{2} \sqrt{2 \times 6 \div 8} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{4};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: 原式} = 4\sqrt{2} - 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + (2\sqrt{3})^2 - 1 = \sqrt{2} + 12 - 1 = 11 + \sqrt{2}.$$

四、解答题: (本题共 5 小题, 21-22 题 10 分, 23-24 题 12 分, 25 题 14 分, 共 58 分)

21. 已知: $3a+1$ 的立方根是 -2 , $2b-1$ 的算术平方根是 3 , c 是 $\sqrt{43}$ 的整数部分.

- (1) 求 a , b , c 的值;
(2) 求 $2a-b+\frac{9}{2}c$ 的平方根.

【答案】(1) $a=-3$, $b=5$, $c=6$

(2) ± 4

【解析】

【分析】本题考查了平方根、算术平方根、立方根的定义, 无理数的估算.

- (1) 由立方根的定义可求得 a 的值, 由算术平方根的定义可求得 b 的值, 根据无理数的估算可确定 c 的值;
(2) 把 a 、 b 、 c 的值代入代数式中求得代数式的值, 即可求得其平方根;

【小问 1 详解】

解: $\because 3a+1$ 的立方根是 -2 ,

$$\therefore 3a+1=-8,$$

解得, $a=-3$,

$\because 2b-1$ 的算术平方根是 3 ,

$$\therefore 2b-1=9,$$

解得, $b=5$,

$$\because \sqrt{36} < \sqrt{43} < \sqrt{49},$$

$$\therefore 6 < \sqrt{43} < 7,$$

$\therefore \sqrt{43}$ 的整数部分为 6 ,

即 $c=6$,

因此, $a=-3$, $b=5$, $c=6$;

【小问 2 详解】

解: 当 $a=-3$, $b=5$, $c=6$ 时,

$$2a-b+\frac{9}{2}c=2\times(-3)-5+\frac{9}{2}\times 6=16,$$

$$\therefore \pm\sqrt{16}=\pm 4.$$

22. 国家实施高效节能电器的财政补贴政策, 某款空调在政策实施后, 客户每购买一台可获得补贴 500 元, 若同样用 6 万元购买此款空调, 补贴后可购买的台数比补贴前多 20%. 该款空调补贴前的售价为每台多少元?

【答案】3000 元

【解析】

【分析】设该款空调补贴前的售价为每台 x 元, 由补贴后可购买的台数比补贴前多 20%, 可列方程

$$\frac{60000}{x}\times(1+20\%)=\frac{60000}{x-500}, \text{再解方程并检验可得答案.}$$

【详解】解: 设该款空调补贴前的售价为每台 x 元,

$$\text{由题意, 得: } \frac{60000}{x}\times(1+20\%)=\frac{60000}{x-500},$$

$$\therefore \frac{1.2}{x}=\frac{1}{x-500},$$

$$\therefore 0.2x=600,$$

解得: $x=3000$,

经检验得: $x=3000$ 是原方程的根,

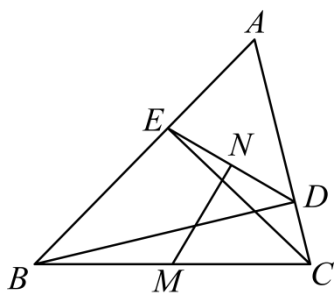
答: 该款空调补贴前的售价为每台 3000 元.

【点睛】本题考查的是分式方程的应用, 掌握利用分式方程解决商品的销售问题是解题的关键.

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BD\perp AC$ 于 D , $CE\perp AB$ 于 E , M , N 分别是 BC , DE 的中点.

(1) 求证: $MN\perp DE$;

(2) 若 $BC=20$, $DE=12$, 求 $\triangle MDE$ 的面积.



【答案】(1) 证明见解析； (2) 48.

【解析】

【分析】(1) 连接 MD、ME，根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得 $MD = \frac{1}{2} BC = ME$ ，再根据等腰三角形三线合一的性质即可证得结论；

(2) 根据 $BC=20$ ， $ED=12$ ，求出 DM、DN 的长，再根据勾股定理求出 MN 的长，利用三角形的面积公式进行求解即可得.

【详解】解：(1) 连接 ME、MD，

$\because BD \perp AC$ ， $\therefore \angle BDC = 90^\circ$ ，

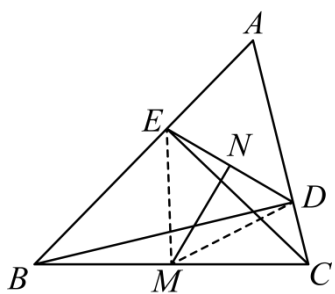
$\because M$ 是 BC 的中点， $\therefore DM = \frac{1}{2} BC$ ，同理可得 $EM = \frac{1}{2} BC$ ，

$\therefore DM = EM$ ， $\because N$ 是 DE 的中点， $\therefore MN \perp DE$ ；

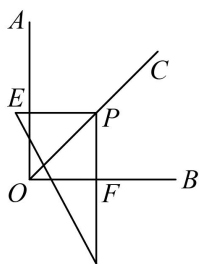
(2) $\because BC=20$ ， $ED=12$ ， $\therefore DM = \frac{1}{2} BC = 10$ ， $DN = \frac{1}{2} DE = 6$ ，

由 (1) 可知 $\angle MND = 90^\circ$ ， $\therefore MN = \sqrt{MD^2 - ND^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ ，

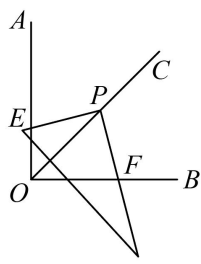
$\therefore S_{\triangle MDE} = \frac{1}{2} DE \times MN = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48$.



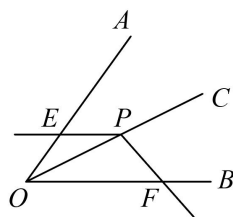
24. 在学习了角的平分线的性质之后，小明同学做了如下的实验：画 $\angle AOB = 90^\circ$ ，并画 $\angle AOB$ 的平分线 OC ．把三角尺的直角顶点落在 OC 的任意一点 P 上，使三角尺的两条直角边分别与 OA ， OB 相交于点 E ， F ．



图①



图②



图③

- (1) 若 $PE \perp OA$, $PF \perp OB$ (如图①), 小明发现 $PE = PF$, 请帮小明证明;
- (2) 把三角尺绕点 P 旋转至如图②所示的位置, 小明发现 PE 与 PF 仍然相等, 请帮小明证明;
- (3) 聪明好学的小明接着进行了如下探究: 画 $\angle AOB = 50^\circ$, 并画 $\angle AOB$ 的平分线 OC , 在 OC 上任取一点 P , 作 $\angle EPF = 130^\circ$. $\angle EPF$ 的两边分别与 OA , OB 相交于 E , F 两点 (如图③), 小明发现 PE 与 PF 仍然相等, 请帮小明证明.

【答案】(1) 见详解 (2) 见详解

(3) 见详解

【解析】

【分析】(1) 由角平分线的性质可证明 $PE = PF$;

(2) 作 $PM \perp OA$ 于点 M , $PN \perp OB$ 于点 N , 根据角平分线的性质定理得 $PM = PN$, 再证明 $\triangle PME \cong \triangle PNF$, 可得 $PE = PF$;

(3) 在 OF 上取一点 G , 使 $OG = OE$, 连接 PG , 先证明 $\triangle POG \cong \triangle POE$, 可得 $\angle OGP = \angle OEP$, $PG = PE$, 再由同角的补角相等证明 $\angle PGF = \angle PFG$, 则 $PG = PF$, 得 $PE = PF$.

【小问 1 详解】

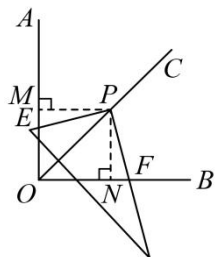
证明: $\because OC$ 平分 $\angle AOB$, $PE \perp OA$, $PF \perp OB$,

$\therefore PE = PF$.

【小问 2 详解】

证明: 如图②, 作 $PM \perp OA$ 于点 M , $PN \perp OB$ 于点 N ,

$\because OC$ 平分 $\angle AOB$,



图②

$\therefore PM = PN$.

$$\because \angle OMP = \angle ONP = \angle MON = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MPN = 90^\circ.$$

$$\because \angle EPF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MPE = \angle NPF = 90^\circ - \angle EPN.$$

在 $\triangle PME$ 与 $\triangle PNF$ 中,

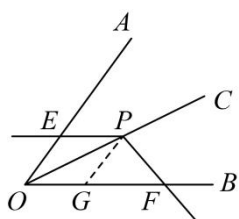
$$\begin{cases} \angle PME = \angle PNF \\ PM = PN \\ \angle MPE = \angle NPF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle PME \cong \triangle PNF (\text{ASA}),$$

$$\therefore PE = PF.$$

【小问 3 详解】

证明: 在 OF 上取一点 G , 使 $OG = OE$, 连接 PG ,



图③

$$\because OC \text{ 平分 } \angle AOB,$$

$$\therefore \angle POG = \angle POE.$$

$$\text{又} \because OP = OP,$$

$$\therefore \triangle POG \cong \triangle POE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle OGP = \angle OEP, \quad PG = PE,$$

$$\therefore \angle PGF + \angle OEP = \angle PGF + \angle OGP = 180^\circ.$$

$$\because \angle AOB = 50^\circ, \quad \angle EPF = 130^\circ, \quad \text{且 } \angle AOB + \angle EPF + \angle PFG + \angle OEP = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle PFG + \angle OEP = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle PGF = \angle PFG,$$

$$\therefore PG = PF,$$

$$\therefore PE = PF.$$

【点睛】此题是几何变换综合题, 考查了角平分线的性质、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质、四边形的内角和、线段相等的证明等知识与方法, 解题的关键是正确地作出所需要的辅助线, 构

造全等三角形.

25. 阅读材料:

已知 a 、 b 为非负实数, $\therefore a+b-2\sqrt{ab} = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0, \therefore a+b \geq 2\sqrt{ab}$,

当且仅当 “ $a=b$ ” 时, 等号成立.

这个结论就是著名的 “均值不等式”, “均值不等式” 在一类最值问题中有着广泛的应用. 例: 已知 $x > 0$,

求代数式 $x + \frac{4}{x}$ 的最小值.

解: 令 $a=x$, $b=\frac{4}{x}$, 则由 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 得 $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$.

当且仅当 $x = \frac{4}{x}$, 即 $x=2$ 时, 代数式取到最小值, 最小值为 4.

根据以上材料解答下列问题:

(1) 已知 $x > 0$, 则当 $x =$ _____ 时, 代数式 $x + \frac{3}{x}$ 取到最小值, 最小值为 _____.

(2) 用篱笆围一个面积为 100m^2 的矩形花园, 则当这个矩形花园的长、宽各为多少时, 所用的篱笆最短?
最短的篱笆的长度是多少米?

(3) 已知 $x > 0$, 则自变量 x 取何值时, 函数 $y = \frac{x}{x^2 - 2x + 9}$ 取到最大值? 最大值为多少?

(4) 若 x 为任意实数, 代数式 $\frac{x}{x^2 + 4x + 5}$ 的值为 m , 则 m 的取值范围为 _____.

【答案】 (1) $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$

(2) 长和宽均为 10 米时, 所用的篱笆最短, 最短的篱笆的长度是 40 米

(3) 当 $x=3$ 时, 函数取到最大值, 最大值为 $\frac{1}{4}$

(4) $-\frac{\sqrt{5}}{2} - 1 \leq m \leq \frac{\sqrt{5}}{2} - 1$

【解析】

【分析】 本题主要考查不等式的性质, 函数, 分式的性质, 分母有理化及完全平方公式, 解题的关键是理解题意;

(1) 根据题中所给方法进行求解即可;

(2) 设这个矩形的长为 x 米, 则宽为 $\frac{100}{x}$ 米, ($x > 0$), 由题意得: 所用篱笆的长度为 $2\left(x + \frac{100}{x}\right)$ 米, 然

后根据题中所给方法进行求解即可;

(3) 由题意易得 $y = \frac{x}{x^2 - 2x + 9} = \frac{1}{x + \frac{9}{x} - 2}$, 然后根据题中所给方法可知代数式 $x + \frac{9}{x} - 2$ 的最小值为

$6 - 2 = 4$, 然后问题可求解;

(4) 由题意可分: 当 $x = 0$ 时, 当 $x > 0$ 时, 当 $x < 0$ 时, 然后根据题中所给方法可分类进行求解.

【小问 1 详解】

解: 由 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 得 $x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{3}{x}} = 2\sqrt{3}$,

当且仅当 $x = \frac{3}{x}$, 即 $x = \sqrt{3}$ 时, 代数式取到最小值, 最小值为 $2\sqrt{3}$;

故答案为: $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$.

【小问 2 详解】

解: 设这个矩形的长为 x 米, 则宽为 $\frac{100}{x}$ 米, ($x > 0$), 由题意得:

所用篱笆的长度为 $2\left(x + \frac{100}{x}\right)$ 米,

由 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 得 $x + \frac{100}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{100}{x}} = 20$,

当且仅当 $x = \frac{100}{x}$, 即 $x = 10$ 时, 代数式取到最小值, 最小值为 20;

$\therefore$ 宽为 $\frac{100}{x} = \frac{100}{10} = 10$ 米, 所用篱笆的长度为 $2 \times 20 = 40$ 米,

答: 长和宽均为 10 米时, 所用的篱笆最短, 最短的篱笆的长度是 40 米

【小问 3 详解】

解: $\because y = \frac{x}{x^2 - 2x + 9} = \frac{1}{x + \frac{9}{x} - 2}$,

$\therefore$ 由 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 得 $x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = 6$,

当且仅当 $x = \frac{9}{x}$, 即 $x = 3$ 时, 代数式取到最小值, 最小值为 6,

$\therefore$ 代数式 $x + \frac{9}{x} - 2$ 的最小值为 $6 - 2 = 4$,

$\therefore$ 函数 $y = \frac{1}{x + \frac{9}{x} - 2}$ 的最大值为 $y = \frac{1}{4}$;

∴ 当 $x=3$ 时, 函数取到最大值, 最大值为 $\frac{1}{4}$;

【小问 4 详解】

解: 由题意可分: 当 $x=0$ 时, 则 $\frac{x}{x^2+4x+5}=0$;

当 $x>0$ 时, 则 $\frac{x}{x^2+4x+5}=\frac{1}{x+\frac{5}{x}+4}$,

由 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 得 $x+\frac{5}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{5}{x}}=2\sqrt{5}$,

当且仅当 $x=\frac{5}{x}$, 即 $x=\sqrt{5}$ 时, 代数式取到最小值, 最小值为 $2\sqrt{5}$,

∴ $\frac{x}{x^2+4x+5}$ 的最大值为 $\frac{1}{2\sqrt{5}+4}=\frac{2\sqrt{5}-4}{(2\sqrt{5}+4)(2\sqrt{5}-4)}=\frac{\sqrt{5}}{2}-1$,

当 $x<0$ 时, 则 $\frac{x}{x^2+4x+5}=\frac{1}{x+\frac{5}{x}+4}$,

∵ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$,

∴ $-(a+b) \leq -2\sqrt{ab}$,

∵ $-x>0, \frac{5}{-x}>0$,

∴ $(-x)+\left(\frac{5}{-x}\right) \geq 2\sqrt{(-x)\left(\frac{5}{-x}\right)}=2\sqrt{5}$,

∴ $x+\frac{5}{x} \leq -2\sqrt{5}$,

当且仅当 $x=\frac{5}{x}$, 即 $x=-\sqrt{5}$ 时, 代数式取到最大值, 最大值为 $-2\sqrt{5}$,

∴ $\frac{x}{x^2+4x+5}$ 的最小值为 $\frac{1}{-2\sqrt{5}+4}=\frac{-2\sqrt{5}-4}{(-2\sqrt{5}+4)(-2\sqrt{5}-4)}=-\frac{\sqrt{5}}{2}-1$,

综上所述: m 的取值范围为 $-\frac{\sqrt{5}}{2}-1 \leq m \leq \frac{\sqrt{5}}{2}-1$.