

2025 学年第一学期八年级数学质量调研

(考试时间: 100 分钟 满分 100 分)

一、选择题 (每小题 2 分, 共 12 分)

1. 已知 a 的平方根是 ± 8 , 则 a 的立方根是 ()

A. 2

B. 4

C. ± 2

D. ± 4

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据乘方运算, 可得 a 的值, 根据开方运算, 可得立方根.

【详解】 $\because a$ 的平方根是 ± 8 ,

$$\therefore a = 64,$$

$$\therefore \sqrt[3]{64} = 4.$$

故选: B.

【点睛】 本题考查了立方根, 先算乘方, 再算开方.

2. 若 $x^2=16$, 则 $5-x$ 的算术平方根是().

A. ± 1

B. ± 4

C. 1 或 9

D. 1 或 3

【答案】 D

【解析】

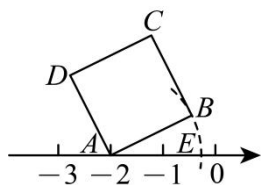
【详解】 试题解析: 若 $x^2=16$, 则 $x=\pm 4$,

那么 $5-x=1$ 或 9 ,

所以 $5-x$ 的算术平方根是 1 或 3.

故选 D.

3. 如图, 面积为 3 的正方形 $ABCD$ 的顶点 A 在数轴上, 点 A 表示的数为 -2 , 若 $AB=AE$, 则数轴上点 E 所表示的数为 ()



A. $1+\sqrt{3}$

B. $\sqrt{3}-1$

C. $-2+\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3}+2$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了算术平方根的意义，实数与数轴，求得 $AB = AE = \sqrt{3}$ 是解题的关键.

根据正方形的面积得出正方形的边长为 $\sqrt{3}$ ，从而可得 $AB = AE = \sqrt{3}$ ，进而得到点 E 所表示的数.

【详解】 解： $\because$ 正方形的面积为 3，

$\therefore$ 正方形的边长为 $\sqrt{3}$ ，

$\therefore AB = AE = \sqrt{3}$ ，

$\therefore E$ 点所表示的数为 $-2 + \sqrt{3}$.

故选： C.

4. 下列说法正确的是 ()

A. 无限小数都是无理数；

B. 正数的平方根是正数；

C. 正实数包括正有理数和正无理数；

D. 0 没有平方根.

【答案】 C

【解析】

【分析】 A.根据无理数的概念判断即可； B.一个正数的平方根有两个，它们互为相反数； C. 正实数包括正有理数和正无理数； D. 0 有平方根.

【详解】 解： A. 无限不循环小数都是无理数，故选项 A 错误；

B.一个正数的平方根有两个，它们互为相反数，故选项 B 错误；

C. 正实数包括正有理数和正无理数，故选项 C 正确；

D. 0 有平方根，故选项 D 错误.

故选 C.

【点睛】 此题主要考查了实数的分类和性质，解答此题应熟知以下概念： (1) 实数包括有理数和无理数；实数可分为正数、负数和 0；正数包括正有理数和正无理数，负数包括负有理数和负无理数； (2) 整数和分数统称为有理数，无限不循环小数叫做无理数.

5. 若 a 、 b 是实数，且 $a < b$ ，则下列关系式成立的是 ()

A. $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

B. $|a| < |b|$

C. $\sqrt[3]{a^3} < \sqrt[3]{b^3}$

D. $\sqrt{a^2} < \sqrt{b^2}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据算术平方根，立方根，不等式的性质，逐项分析判断即可求解.

【详解】 解： $\because a$ 、 b 是实数，且 $a < b$ ，

A. 当 $0 < a < b$ 时, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, 故该选项不正确, 不符合题意;

B. 当 $0 < a < b$ 时, $|a| < |b|$, 故该选项不正确, 不符合题意;

C. $\sqrt[3]{a^3} < \sqrt[3]{b^3}$, 故该选项正确, 符合题意;

D. 当 $0 < a < b$ 时, $\sqrt{a^2} < \sqrt{b^2}$, 故该选项不正确, 不符合题意;

故选: C.

【点睛】 本题考查了算术平方根, 立方根, 不等式的性质, 实数的大小比较, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

6. 如下表, 被开方数 a 和它的算术平方根 $\sqrt{a}$ 的小数点位置移动符合一定的规律, 根据规律可得 m, n 的值分别为 ()

a	0.0625	0.625	6.25	62.5	625	6250	62500	625000
$\sqrt{a}$	0.25	0.791	m	n	25	79.1	250	791

A. $m=0.025$, $n \approx 7.91$ B. $m=2.5$, $n \approx 7.91$ C. $m \approx 7.91$, $n=2.5$ D. $m=2.5$, $n \approx 0.791$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据算术平方根的定义解决此题.

【详解】 解: 由题意得: 从 0.0625 开始, 小数点每向右移动两位, 对应算术平方根扩大 10 倍,
从 0.625 开始, 小数点每向右移动两位, 对应算术平方根扩大 10 倍,

$\therefore$ 可得: 6.25 的算术平方根为 2.5, 62.5 的算术平方根约为 7.91,

故选 B.

【点睛】 本题主要考查数字类规律探索, 算术平方根, 熟练掌握原数和平方根的变化规律是解决本题的关键.

二、填空题 (每小题 2 分, 共 24 分)

7. 在 0、-2、 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt[3]{4}$ 、3.1416、0.23、 $\frac{22}{7}$ 、 π 、 $8\frac{1}{3}$ 、0.3737737773... (它的位数无限且相邻两个“3”之间“7”的个数依次加 1 个), 这十个数中, 无理数有_____个.

【答案】 4

【解析】

【分析】本题主要考查无理数的识别，算术平方根、立方根的化简．无理数是无限不循环小数，常见的无理数有：开不尽方的数，含 π 的最简式子，特殊结构的数（如：0.121121112……），根据算术平方根、立方根的性质化简等知识即可求解．

【详解】解：无理数有 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt[3]{4}$ 、 π ，0.3737737773…（它的位数无限且相邻两个“3”之间“7”的个数依次加1个），共4个，
故答案为：4．

8. 立方根等于它本身的数是_____

【答案】0，1，-1

【解析】

【分析】本题考查了立方根，利用立方根的意义是解题关键．根据立方根的意义，可得答案．

【详解】解：立方根等于它本身的数是0，1，-1，
故答案为：0，1，-1．

9. $\sqrt{25}$ 的平方根是_____．

【答案】 $\pm\sqrt{5}$

【解析】

【详解】分析：根据平方运算，可得平方根、算术平方根．

详解： $\sqrt{25}$ 的平方根是 $\pm\sqrt{5}$ ．

故答案为 $\pm\sqrt{5}$ ．

点睛：本题考查了算术平方根．平方运算是求平方根的关键．

10. 实数27的立方根的相反数是_____．

【答案】-3

【解析】

【分析】如果一个数x的立方等于a，那么x是a的立方根，再根据相反数的定义求解即可．

【详解】 $\because 3$ 的立方等于27，
 $\therefore 27$ 的立方根等于3．
 $\therefore 3$ 的相反数-3
故答案为-3．

【点睛】此题考查立方根，相反数，解题关键在于掌握其定义性质．

11. 芯片内部有数以亿计的晶体管．某品牌手机自主研发了新型号芯片，其晶体管栅极的宽度为0.000000014

米，将数据 0.000000014 用科学记数法表示为_____.

【答案】 1.4×10^{-8}

【解析】

【分析】 本题主要考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq a < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同.

【详解】 解： $0.000000014 = 1.4 \times 10^{-8}$ ，

故答案为： 1.4×10^{-8} .

12. 如果 $\sqrt{x^2} = -x$ ，那么 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \leq 0$

【解析】

【分析】 由于二次根式的值是非负数，被开方数也是非负数，于是有 $x^2 \geq 0$ ， $-x \geq 0$ ，对上述两个关于 x 的不等式求解，再取它们的公共部分，即为 x 的取值范围.

【详解】 $\because \sqrt{x^2} = -x$ 成立，

$\therefore x^2 \geq 0$ ， $-x \geq 0$ ，

$\therefore x \leq 0$.

故答案为： $x \leq 0$.

【点睛】 这是一道关于二次根式的题目，需要掌握二次根式的定义和性质.

13. 比较大小： $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ _____ $\frac{1}{5}$ (用 “>”、“<” 或 “=” 填空)

【答案】 <

【解析】

【分析】 通过作差与 0 比较大小即可得出结论.

【详解】 解： $\because \frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{1}{5}$
 $= \frac{5\sqrt{3}-5}{20} - \frac{4}{20}$

$$= \frac{5\sqrt{3}-5-4}{20}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}-9}{20}$$

$$= \frac{\sqrt{75}-\sqrt{81}}{20},$$

$$\text{又} \because \sqrt{75} < \sqrt{81},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{75}-\sqrt{81}}{20} < 0, \text{ 即 } \frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{1}{5} < 0,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}-1}{4} < \frac{1}{5},$$

故答案为：<.

【点睛】 本题考查比较两个实数的大小，涉及到作差法比较实数大小、二次根式比较大小的方法等知识点，熟练掌握作差法比较大小的恒等变形判定符号是解决问题的关键.

14. $\sqrt{14}$ 的小数部分为 a ，则 $a(6+a) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 5

【解析】

【分析】 此题考查了估算无理数的大小和平方差公式的运用，熟练掌握无理数估算的方法是解本题的关键. 根据题意表示出 a ，代入原式计算即可求出值.

【详解】 解：由题意得： $9 < 14 < 16$ ，即 $3 < \sqrt{14} < 4$ ，

$$\therefore a = \sqrt{14} - 3,$$

$$\text{则 } a(6+a) = (6 + \sqrt{14} - 3) \times (\sqrt{14} - 3) = 14 - 9 = 5,$$

故答案为：5

15. 在实数轴上有 A 、 B 两点，点 A 对应实数 $3\sqrt{5}$ ，已知 A 和 B 距离为 $5\sqrt{5}$ ，则点 B 对应的实数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $8\sqrt{5}$ 或 $-2\sqrt{5}$ ## $-2\sqrt{5}$ 或 $8\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查数轴上的点表示数及数轴上两点间的距离，根据点 A 对应的实数及 A 、 B 之间的距离，结合数轴上两点间距离的求法即可求出 B 对应的实数.

【详解】解：∵点 A 对应实数 $3\sqrt{5}$ ， A 和 B 距离为 $5\sqrt{5}$ ，

∴点 B 对应的实数为 $3\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$ 或 $3\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$ ，即 $8\sqrt{5}$ 或 $-2\sqrt{5}$ ，

故答案为： $8\sqrt{5}$ 或 $-2\sqrt{5}$ 。

16. 一个正数的两个不同的平方根是 $a+3$ 和 $2a-6$ ，则这个正数是_____。

【答案】16

【解析】

【分析】根据一个正数的平方根互为相反数可得出 a 的值，代入后即可得出这个正数。

【详解】由题意得 $a+3+2a-6=0$ ，

解得： $a=1$ ，

则这个正数为： $(a+3)^2=16$ ，

故答案为：16。

【点睛】本题考查了平方根及解一元一次方程的知识，解题关键是掌握一个正数的平方根有两个，且互为相反数。

17. 将 $0.4\dot{1}\dot{3}$ 化成分数： $0.4\dot{1}\dot{3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{409}{990}$

【解析】

【分析】本题考查了循环小数化分数的方法。

根据混循环小数化分数的方法化为分数即可。

【详解】解： $0.4\dot{1}\dot{3} = \frac{413-4}{990} = \frac{409}{990}$ 。

故答案为： $\frac{409}{990}$ 。

18. 如果无理数 m 的值介于两个连续正整数之间，即满足 $a < m < b$ （其中 a 、 b 为连续正整数），我们则称无理数 m 的“神奇区间”为 (a, b) 。例： $2 < \sqrt{5} < 3$ ，所以 $\sqrt{5}$ 的“神奇区间”为 $(2, 3)$ 。若某一无理数的“神奇区间”为 (a, b) ，且满足 $6 < \sqrt{a} + b \leq 16$ ，其中 $x = b$ ， $y = \sqrt{a}$ 是关于 x 、 y 的二元一次方程组 $bx + ay = p$ 的一组正整数解，则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】33 或 127

【解析】

【分析】根据“神奇区间”的定义，还有二元一次方程正整数解这两个条件，寻找符合的情况.

【详解】解：∵“神奇区间”为 (a, b) ,

∴ a, b 为连续正整数,

∴ $6 < \sqrt{a} + b \leq 16$, $x = b$, $y = \sqrt{a}$ 是关于 x, y 的二元一次方程组 $bx + ay = p$ 的一组正整数解,

∴符合条件的 a, b 有① $a = 4, b = 5, \sqrt{a} = 2$; ② $a = 9, b = 10, \sqrt{a} = 3$.

① $a = 4, b = 5, \sqrt{a} = 2$ 时, $x = 5, y = 2$,

$$5 \times 5 + 4 \times 2 = p,$$

$$\therefore p = 33,$$

② $a = 9, b = 10, \sqrt{a} = 3$ 时, $x = 10, y = 3$,

$$10 \times 10 + 9 \times 3 = p,$$

$$\therefore p = 127,$$

故 p 的值为33或127,

故答案为: 33或127.

【点睛】本题考查新定义, 估算无理数大小, 二元一次方程整数解相关知识, 综合考查学生分析、计算能力.

三、简答 (每小题4分, 共24分)

19. 计算: $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right)$

【答案】 $-3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的加减法. 根据二次根式的加减法进行计算即可.

【详解】解: $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 2\right)\sqrt{2}$$

$$= -3\sqrt{2}.$$

20. 计算: $\sqrt[3]{-2+\frac{3}{64}}+\sqrt{13^2-12^2}-\sqrt[3]{(-8)^2}$;

【答案】 $-\frac{1}{4}$.

【解析】

【分析】 根据立方根和算术平方根的定义, 即可求解.

【详解】 原式 $=\sqrt[3]{-\frac{125}{64}}+\sqrt{25}-\sqrt[3]{4^3}$

$$=-\frac{5}{4}+5-4$$

$$=-\frac{1}{4}.$$

【点睛】 本题主要考查立方根与算术平方根的混合运算, 掌握立方根和算术平方根的定义是解题的关键.

21. 计算: $(\sqrt{2}-1)^0 \times \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + \sqrt[3]{-8}$.

【答案】 $-1\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 按顺序先分别进行 0 次幂的运算、平方运算、立方根运算, 然后再按运算顺序进行计算即可.

【详解】 $(\sqrt{2}-1)^0 \times \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + \sqrt[3]{-8}$

$$=1 \times \frac{1}{2} - 2$$

$$=\frac{1}{2} - 2$$

$$=-1\frac{1}{2}.$$

【点睛】 本题考查了实数的运算, 涉及了 0 次幂、立方根、乘方等运算, 熟练掌握各运算的运算法则是解题的关键.

22. 计算: $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + (\sqrt{2}-1)^0 \div (1-\sqrt{2})^{-2} \times \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式混合运算、零指数幂、负整数指数幂. 先根据二次根式的性质、负整数指数幂和零指数幂的意义进行化简, 再进行二次根式的乘除运算, 最后再进行加减运算即可.

【详解】解： $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + (\sqrt{2}-1)^0 \div (1-\sqrt{2})^{-2} \times \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$

$$= |1-\sqrt{2}| + 1 \div \frac{1}{(1-\sqrt{2})^2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{2}-1 + 1 \times (1-\sqrt{2})^2 \times \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{2}-1 + (1-2\sqrt{2}+2) \times \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{2}-1 + \frac{3}{2} - \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

23. 解方程： $2\left(\frac{1}{2}+x\right)^3 = 250$

【答案】 $x = \frac{9}{2}$

【解析】

【分析】两边同时除以2，然后根据立方根的定义解方程即可求解.

【详解】 $2\left(\frac{1}{2}+x\right)^3 = 250$

即 $\left(\frac{1}{2}+x\right)^3 = 125$

$\therefore \frac{1}{2}+x = 5$

解得： $x = \frac{9}{2}$

【点睛】本题考查了立方根的定义，熟练掌握立方根的定义是解题的关键.

24. 解方程： $(2x-1)^4 = 16$

【答案】 $x = -\frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】方程两边同时开四次方，进而即可求解.

【详解】解： $(2x-1)^4 = 16$

$\therefore 2x-1 = 2$ 或 $2x-1 = -2$

解得: $x = -\frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{3}{2}$

【点睛】 本题考查了根据开方的定义解方程，掌握开方的定义是解题的关键.

四、解答题 (每题 6 分, 共 30 分)

25. 已知 -4 是 $x+y$ 的平方根, 4 是 $x-y$ 的立方根, 求 $7x+y$ 的四次方根的值.

【答案】 ± 4

【解析】

【分析】 根据平方根与立方根的定义列出二元一次方程组, 进而求得 x, y 的值, 代入代数式, 进而求其四次方根即可求解.

【详解】 解: $\because -4$ 是 $x+y$ 的平方根, 4 是 $x-y$ 的立方根,

$$\therefore \begin{cases} x+y=16 \\ x-y=64 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} x=40 \\ y=-24 \end{cases}$

$$\therefore 7x+y = 7 \times 40 - 24 = 256,$$

$$\therefore \pm \sqrt[4]{256} = \pm 4$$

【点睛】 本题考查了平方根与立方根的定义, 解二元一次方程组, 求 4 次方根, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

26. 已知 $\sqrt{x} - (\sqrt{x})^{-1} = 2$, 求 $x^2 + x^{-2}$ 的值.

【答案】 34

【解析】

【分析】 本题考查完全平方公式的应用, 利用好完全平方公式是解决本题的关键.

先对已知条件进行两边平方化简求解得 $x + x^{-1} = 6$, 再对其进行两边平方化简求值即可.

【详解】 解: 对 $\sqrt{x} - (\sqrt{x})^{-1} = 2$ 两边平方得,

$$\begin{aligned} & \left[\sqrt{x} - (\sqrt{x})^{-1} \right]^2 \\ &= (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}(\sqrt{x})^{-1} + \left[(\sqrt{x})^{-1} \right]^2 \\ &= x - 2 + x^{-1} \end{aligned}$$

$$= 4,$$

$$\therefore x + x^{-1} = 6,$$

再对 $x + x^{-1} = 6$ 两边平方得,

$$(x + x^{-1})^2$$

$$= x^2 + 2xx^{-1} + (x^{-1})^2$$

$$= x^2 + 2 + x^{-2}$$

$$= 36,$$

$$\therefore x^2 + x^{-2} = 34.$$

27. 已知实数 x 、 y 满足 $y = \frac{\sqrt{16-x^2} + \sqrt{x^2-16} - 1}{x+4}$, 求 $\frac{7}{8}x + y$ 的立方根.

【答案】 $\frac{7}{8}x + y$ 的立方根为 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件, 分式有意义的条件, 求一个数的立方根. 根据二次根式有意义的条件以及分式有意义的条件确定 x 的值, 进而求得 y 的值, 代入代数式, 求得代数式的值, 根据立方根的定义即可求解.

【详解】 解: $\because 16 - x^2 \geq 0, x^2 - 16 \geq 0,$

$$\therefore x^2 = 16,$$

$$\therefore x = \pm 4,$$

又 $\because$ 分母中 $x + 4 \neq 0,$

$$\therefore x \neq -4,$$

解得: $x = 4,$

$$\therefore y = \frac{0+0-1}{4+4} = -\frac{1}{8},$$

$$\therefore \frac{7}{8}x + y = \frac{7}{8} \times 4 - \frac{1}{8} = \frac{27}{8},$$

$$\therefore \frac{27}{8} \text{ 的立方根为 } \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{7}{8}x + y \text{ 的立方根为 } \frac{3}{2}.$$

28. 已知 a 、 b 为整数, 且满足 $a(\sqrt{2}+1) + 3(b-2\sqrt{2}) = 6+3\sqrt{2}$, 求 $a+b$ 的值.

【答案】 $a+b=8$.

【解析】

【分析】 此题主要考查了实数运算. 去括号, 合并同类二次根式得到 $(a+3b)+(a-6)\sqrt{2}=6+3\sqrt{2}$, 由 a 、 b 为整数, 计算得出 a , b 的值, 进而得出答案.

【详解】 解: $\because a(\sqrt{2}+1)+3(b-2\sqrt{2})=\sqrt{2}a+a+3b-6\sqrt{2}=(a+3b)+(a-6)\sqrt{2}$,
而 $a(\sqrt{2}+1)+3(b-2\sqrt{2})=6+3\sqrt{2}$, a 、 b 为整数,
 $\therefore a+3b=6$, $a-6=3$,
 $\therefore a=9$, $b=-1$,
 $\therefore a+b=9-1=8$.

29. (1) 计算: $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=$ _____; $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=$ _____

(2) 由以上计算结果: 可知 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ ($n \geq 0$) 的倒数是 _____.

(3) 比较 $4-\sqrt{13}$ 与 $2\sqrt{3}-3$ 的大小.

【答案】 (1) 1, 1; (2) $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$; (3) $4-\sqrt{13} < 2\sqrt{3}-3$

【解析】

【分析】 本题考查了分母有理化, 利用平方差公式是分母有理化的关键.

(1) 根据平方差公式, 可得答案;

(2) 根据 (1) 的规律, 可得答案;

(3) 利用 (2) 的结论, 可得答案.

【详解】 解: (1) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$
 $= (\sqrt{2})^2 - 1^2$
 $= 2 - 1$
 $= 1$,
 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
 $= (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2$
 $= 3 - 2$
 $= 1$,
故答案为: 1, 1;

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \because (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\
 &= (\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2 \\
 &= n+1-n \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\therefore \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \\
 &= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\
 &= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{1} \\
 &= \sqrt{n+1} + \sqrt{n},
 \end{aligned}$$

故答案为： $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ ；

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \frac{1}{4 - \sqrt{13}} \\
 &= \frac{4 + \sqrt{13}}{(4 - \sqrt{13})(4 + \sqrt{13})} \\
 &= \frac{4 + \sqrt{13}}{3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\sqrt{3} - 3} \\
 &= \frac{2\sqrt{3} + 3}{(2\sqrt{3} - 3)(2\sqrt{3} + 3)} \\
 &= \frac{2\sqrt{3} + 3}{3},
 \end{aligned}$$

$$\because 2\sqrt{3} + 3 = \sqrt{12} + 3,$$

$$\therefore 4 + \sqrt{13} > \sqrt{12} + 3,$$

$$\therefore \frac{1}{4 - \sqrt{13}} > \frac{1}{2\sqrt{3} - 3},$$

$$\therefore 4 - \sqrt{13} < 2\sqrt{3} - 3.$$

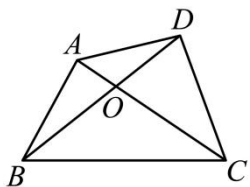
五、综合实践 (满分 10 分)

30. 阅读下面内容: 当 $a > 0$, $b > 0$ 时, $\because (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$, $\therefore a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 当且仅当 $a = b$ 时取等号. 请利用上述结论解决以下问题:

(1) 当 $x > 0$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 的最小值为_____; 当 $x < 0$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 的最大值为_____.

(2) 当 $x > 0$ 时, 求 $y = \frac{x^2 + 3x + 16}{x}$ 的最小值.

(3) 如图, 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , $\triangle AOB$ 、 $\triangle COD$ 的面积分别为 4 和 9, 求四边形 $ABCD$ 面积的最小值.



【答案】(1) 2, -2

(2) 11

(3) 25

【解析】

【分析】本题主要考查分式的值、三角形的高与面积的关系及完全平方公式, 熟练掌握分式的求值及完全平方公式是解题的关键;

(1) 根据题中所给公式可直接进行求解;

(2) 由题意可把所求分式进行变形, 然后再利用公式进行求解最值即可;

(3) 设 $S_{\triangle BOC} = x$, 由题意易得 $S_{\triangle BOC} : S_{\triangle COD} = S_{\triangle AOB} : S_{\triangle AOD}$, 则有 $S_{\triangle AOD} = \frac{36}{x}$, 然后根据题中所给公式可进行求解.

【小问 1 详解】

解: 当 $x > 0$ 时, $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$;

$\therefore$ 当且仅当 $x = \frac{1}{x}$ 时, 即当 $x = 1$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 有最小值 2;

当 $x < 0$ 时, $x + \frac{1}{x} = -\left(-x - \frac{1}{x}\right)$,

$$\therefore -x - \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{-x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)} = 2,$$

$$\therefore -\left(-x - \frac{1}{x}\right) \leq -2, \text{ 即 } x + \frac{1}{x} \leq -2.$$

$\therefore$ 当且仅当 $-x = -\frac{1}{x}$ 时, 即当 $x = -1$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 有最大值 -2 ;

故答案为: $2, -2$;

【小问 2 详解】

解: 当 $x > 0$ 时,

$$y = \frac{x^2 + 3x + 16}{x} = x + \frac{16}{x} + 3 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} + 3 = 11,$$

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, 当且仅当 $x = \frac{16}{x}$ 时, 即当 $x = 4$ 时, y 的最小值为 11 ;

【小问 3 详解】

解: 设 $S_{\triangle BOC} = x$,

$$\therefore S_{\triangle AOB} = 4, S_{\triangle COD} = 9,$$

$\therefore$ 由等高三角形可得: $S_{\triangle BOC} : S_{\triangle COD} = S_{\triangle AOB} : S_{\triangle AOD}$,

$$\therefore x : 9 = 4 : S_{\triangle AOD},$$

$$\therefore S_{\triangle AOD} = \frac{36}{x},$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积为: $4 + 9 + x + \frac{36}{x} \geq 13 + 2\sqrt{x \cdot \frac{36}{x}} = 25$, 当且仅当 $x = \frac{36}{x}$, 即 $x = 6$ 时取等号,

即四边形 $ABCD$ 面积的最小值为 25 .