

2025 学年南模初中八年级第一学期数学学科期 9 月作业反馈

(考试时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、单选题

1. 下列各式中, 一定是二次根式的是 ()

A. $\sqrt{3}$

B. $\sqrt{m}$

C. $\sqrt[3]{2}$

D. $\sqrt{-20}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的概念, 熟练掌握二次根式的概念是解决本题的关键.

根据二次根式的概念, 即形如 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 的式子叫做二次根式, 由此概念判断选项即可.

【详解】解: A 选项, $\sqrt{3}$ 中 $3 > 0$, 是二次根式;

B 选项, $\sqrt{m}$ 中 $m < 0$ 时, 式子无意义, 不一定是二次根式;

C 选项, $\sqrt[3]{2}$ 中的根指数为 3, 是三次根式, 不是二次根式;

D 选项, $\sqrt{-20}$ 中 $-20 < 0$, 式子无意义, 不是二次根式.

故选: A.

2. 下列计算正确的是 ()

A. $\sqrt{9} = \pm 3$

B. $\sqrt{-8} = -2$

C. $-\sqrt[3]{27} = -3$

D. $\sqrt[3]{16} = 4$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查求算术平方根, 立方根, 熟练掌握相关的知识点是解题的关键. 根据求算术平方根, 立方根的方法进行解题即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{9} = 3$, 故该选项错误, 不符合题意;

B、负数在实数范围内没有平方根, 故该选项错误, 不符合题意;

C、 $-\sqrt[3]{27} = -3$, 计算正确, 故该选项符合题意;

D、因为 $4^3 = 64$,

所以 $\sqrt[3]{16} \neq 4$, 故该选项错误, 不符合题意;

故选: C.

3. 下列二次根式中，最简二次根式是（ ）

- A. $\sqrt{0.5}$ B. $\sqrt{6}$ C. $\sqrt{12}$ D. $\sqrt{\frac{2}{3}}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了最简二次根式，熟记“被开方数不能含有能开得尽方的因数或式子，不能含有分母”是解题关键. 根据二次根式的性质化简后，再根据最简二次根式的定义判断即可.

【详解】解：A、 $\sqrt{0.5} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，被开方数含分母，不是最简二次根式，故 A 不符合题意；

B、 $\sqrt{6}$ ，是最简二次根式，故 B 符合题意；

C、 $\sqrt{12} = \sqrt{3 \times 4} = 2\sqrt{3}$ ，被开方数中含能开得尽方的因数，不是最简二次根式，故 C 不符合题意；

D、 $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，被开方数含分母，不是最简二次根式，故 D 不符合题意；

故选：B.

4. 估计 $\sqrt{76}$ 的大小应在（ ）

- A. 7~8 之间 B. 8~9 之间 C. 9~10 之间 D. 不知道

【答案】B

【解析】

【分析】：

此题主要考查了估算无理数的大小，正确得出接近的有理数是解题关键.

直接得出接近的有理数进而得出答案.

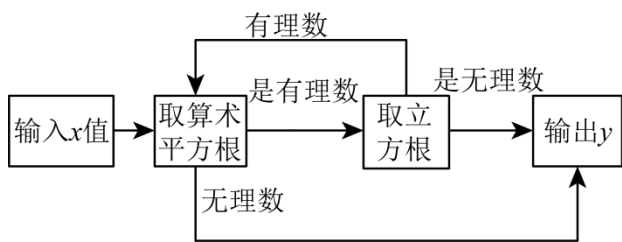
【详解】 $\because \sqrt{64} < \sqrt{76} < \sqrt{81}$,

$\therefore 8 < \sqrt{76} < 9$.

$\therefore \sqrt{76}$ 的大小应在 8 与 9 之间.

故选：B.

5. 小明是一个电脑爱好者，设计了一个程序如图，当输入 x 的值是有理数 64 时，输出的 y 的值是（ ）.



- A. 8 B. ± 8 C. 2 D. $\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】 本题考查了实数的判断和求一个数的算术平方根和立方根，正确按照流程图顺序计算是解题的关键。根据算术平方根和立方根的定义按照流程图顺序计算即可。

【详解】解：64 的算术平方根是 8，是有理数，
故将 8 取立方根为 2，是有理数，
将 2 取算术平方根得 $\sqrt{2}$ ，是无理数，
故选：D.

6. 若 $3 + \sqrt{5}$ 的小数部分为 a ， $\sqrt{5} - 2$ 的小数部分为 b ，则 $a - b$ 的值为（ ）

- A. 0 B. 1 C. -1 D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】 本题考查了无理数的估算，估算出 $2 < \sqrt{5} < 3$ ，从而可得 $5 < 3 + \sqrt{5} < 6$ ， $0 < \sqrt{5} - 2 < 1$ ，即可得出 $a = \sqrt{5} - 2$ ， $b = \sqrt{5} - 2$ ，代入所求式子计算即可得解，熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键。

【详解】解：∵ $4 < 5 < 9$ ，
∴ $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$ ，即 $2 < \sqrt{5} < 3$ ，
∴ $5 < 3 + \sqrt{5} < 6$ ， $0 < \sqrt{5} - 2 < 1$ ，
∴ $3 + \sqrt{5}$ 的小数部分为 a ， $\sqrt{5} - 2$ 的小数部分为 b ，
∴ $a = 3 + \sqrt{5} - 5 = \sqrt{5} - 2$ ， $b = \sqrt{5} - 2$ ，
∴ $a - b = \sqrt{5} - 2 - (\sqrt{5} - 2) = 0$ ，
故选：A.

二、填空题

7. 要使式子 $\frac{\sqrt{m+1}}{2}$ 有意义, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \geq -1$

【解析】

【分析】 此题考查了二次根式有意义的条件, 根据二次根式的被开方数有意义的条件即可求出 m 的范围, 解题的关键是熟练掌握二次根式有意义的条件.

【详解】 解: $\because \frac{\sqrt{m+1}}{2}$ 有意义,

$$\therefore m+1 \geq 0,$$

$$\therefore m \geq -1,$$

故答案为: $m \geq -1$.

8. 清代袁枚的一首诗苔中的诗句“白日不到处, 青春恰自来. 苔花如米小, 也学牡丹开”若苔花的花粉直径约为米 0.0000084, 则数据 0.0000084 用科学记数法表示为_____.

【答案】 8.4×10^{-6}

【解析】

【分析】 本题主要考查了科学记数法, 科学记数法的表现形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同, 当原数绝对值大于等于 10 时, n 是正数, 当原数绝对值小于 1 时 n 是负数; 由此进行求解即可得到答案.

【详解】 解: $0.0000084 = 8.4 \times 10^{-6}$,

故答案为: 8.4×10^{-6} .

9. 比较大小: $-\frac{\sqrt{15}}{2}$ _____ -2 (填 “ $<$ ” “ $>$ ” 或 “ $=$ ”).

【答案】 $>$

【解析】

【分析】 本题考查了实数大小的比较, 关键要熟记实数大小的比较方法: 正实数都大于 0, 负实数都小于 0, 正实数大于一切负实数, 两个负实数绝对值大的反而小.

根据 $-\sqrt{16} < -\sqrt{15}$, 即 $-4 < -\sqrt{15}$, 即可求解.

【详解】解： $\because -\sqrt{16} < -\sqrt{15}$,

$$\therefore -4 < -\sqrt{15},$$

$$\therefore -2 < -\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

故答案为： $>$.

10. 计算： $\sqrt[3]{8} + |2 - \sqrt{5}| = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查实数的运算，涉及立方根、绝对值运算，先计算立方根和化简绝对值，再加减运算即可求解.

【详解】解： $\sqrt[3]{8} + |2 - \sqrt{5}|$

$$= 2 + \sqrt{5} - 2$$

$$= \sqrt{5},$$

故答案为： $\sqrt{5}$.

11. 数轴上到表示 $-\sqrt{2}$ 的点距离为 $\sqrt{2}$ 的点表示的数是_____.

【答案】 0 或 $-2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了数轴上两点之间的距离、实数与数轴等知识点，掌握分类讨论思想是解题的关键.

当这个点在 $-\sqrt{2}$ 左边和右边两种情况，分别列式即可.

【详解】解： 当这个点在 $-\sqrt{2}$ 左边时，这个点对应的数为： $-\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}$ ；

当这个点在 $-\sqrt{2}$ 右边时，这个点对应的数为： $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$.

故答案为： 0 或 $-2\sqrt{2}$.

12. 计算 $\sqrt{82^2 - 80^2}$ 的结果等于_____

【答案】 18

【解析】

【分析】 本题考查了利用平方差公式进行二次根式的运算，掌握好平方差公式是解题的关键。利用平方差公式和二次根式的性质计算即可。

【详解】 解： $\sqrt{82^2 - 80^2}$
 $= \sqrt{(82+80) \times (82-80)}$
 $= \sqrt{162 \times 2}$
 $= \sqrt{324}$
 $= 18.$

故答案为：18.

13. 若 $\sqrt{102.01} \approx 10.1$, $\sqrt{10.201} \approx 3.41$, 则 $\sqrt{1.0201} \approx$ _____ .

【答案】 1.01

【解析】

【分析】 本题考查了算术平方根的移动规律的应用，能根据移动规律填空是解此题的关键。
根据算术平方根的移动规律，把被开方数的小数点每移动两位，结果移动一位，进行填空即可。

【详解】 解： $\because \sqrt{102.01} \approx 10.1$,
 $\therefore \sqrt{102.01} = \sqrt{1.0201 \times 100} = \sqrt{1.0201} \times 10 \approx 10.1$,
即 $\sqrt{1.0201} \approx 1.01$,
故答案为：1.01 .

14. 已知 $\sqrt[3]{5.23} \approx 1.735$, 且 $-\sqrt[3]{x} \approx 173.5$, 则 $x \approx$ _____ .

【答案】 -5230000

【解析】

【分析】 本题主要考查立方根中小数点的移动数位与被开方数之间的关系。注意掌握开立方时，被开方数的小数点每移动 3 位，则开方的结果小数点移动一位。由题意，当被开方数的小数点每移动 6 位，则开立方的结果小数点向相同方向移动 2 位，即可求解。

【详解】 解： $\because \sqrt[3]{5.23} \approx 1.735$, $-\sqrt[3]{x} \approx 173.5$,
 $\therefore \sqrt[3]{x} \approx -173.5 = -1.735 \times 100 \approx -100 \sqrt[3]{5.23} = \sqrt[3]{-100^3 \times 5.23} = \sqrt[3]{-5230000}$,

$$\therefore x \approx -5230000.$$

故答案为: -5230000 .

15. 二次根式 $\sqrt{8a}$ 是一个整数, 那么正整数 a 的最小值是_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的性质、二次根式的定义等知识点, 掌握二次根式的性质成为解题的关键.

利用二次根式的性质可得 $\sqrt{8a} = 2\sqrt{2a}$, 则 $2a$ 是一个平方数, 然后确定 a 的最小正整数即可.

【详解】 解: $\because \sqrt{8a} = 2\sqrt{2a}$ 是一个正整数,

$\therefore 2a$ 是一个平方数,

$\therefore$ 正整数 a 的最小值是 2.

故答案为: 2.

16. 若 $(a-3)^2 + \sqrt{b-6} = 0$, 则以 a 、 b 为边的等腰三角形的周长为_____.

【答案】 15

【解析】

【分析】 本题考查了非负数的性质, 等腰三角形的定义, 三角形的三边关系, 利用非负数的性质可得 $a-3=0$, $b-6=0$, 即得 $a=3$, $b=6$, 得到以 a 、 b 为边的等腰三角形的三边可能为 3,3,6 或 3,6,6, 再根据三角形的三边关系解答即可求解, 掌握非负数的性质是解题的关键.

【详解】 解: $\because (a-3)^2 + \sqrt{b-6} = 0$,

$\therefore a-3=0$, $b-6=0$,

$\therefore a=3$, $b=6$,

$\therefore$ 以 a 、 b 为边的等腰三角形的三边可能为 3,3,6 或 3,6,6,

当三边为 3,3,6 时, $3+3=6$, 三角形不存在;

当三边为 3,6,6 时, 符合三角形的三边关系, 此时等腰三角形的周长为 $3+6+6=15$;

故答案为: 15.

17. 观察一列无理数: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}$ 等, 根据排列规律, 知 $\sqrt{2023}$ 是这列无理数中的第_____数.

【答案】 1979

【解析】

【分析】 本题考查无理数，新建一列数 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10} \dots \sqrt{2022}, \sqrt{2023}$ ，找出其中有理数的个数，即可求解。

【详解】 解：新建一列数： $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10} \dots \sqrt{2022}, \sqrt{2023}$ ，共有 2022 个数，

$$\because \sqrt{44 \times 44} = \sqrt{1936}, \sqrt{45 \times 45} = \sqrt{2025},$$

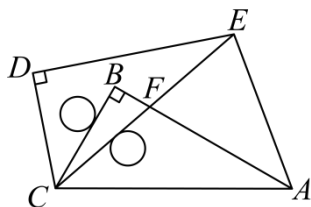
$\therefore$ 该列数中包括有理数： $\sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \dots, \sqrt{44 \times 44}$ ，个数为： $44 - 2 + 1 = 43$ ，

$$\therefore 2022 - 43 = 1979,$$

$\therefore$ 无理数列 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10} \dots$ 中， $\sqrt{2023}$ 是这列无理数中的第 1979 个数，

故答案为：1979.

18. 如图，将含有 60° 锐角的三角板 ABC 绕 60° 的锐角顶点 C 逆时针旋转一个角度到 $\triangle ECD$ ，若 AB 、 CE 相交于点 F ， $AE = AF$ ，则旋转角是_____.



【答案】 40° ## 40 度

【解析】

【分析】 本题考查了旋转的性质、等腰三角形的性质、三角形内角和定理和三角形的外角的性质，熟练掌握旋转的性质是解题的关键。

设旋转角 α ，先根据旋转的性质得 $CA = CE$ ，再利用三角形内角和得到 $\angle CAE = \angle CEA = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ ，由等腰三角形的性质可得出 $\angle AEF = \angle AFE$ ，根据三角形外角的性质可得出答案。

【详解】 解：设旋转角为 α ，

$$\therefore \angle ACF = \alpha, CA = CE,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle CEA = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\because AE = AF,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle AFE,$$

$$\because \angle AFE = \alpha + \angle CAF = \alpha + 30^\circ,$$

$$\therefore \alpha + 30^\circ = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\therefore \alpha = 40^\circ,$$

故答案为： 40° .

三、解答题

19. 计算：

$$(1) \sqrt{27} - 2\sqrt{12} + \sqrt{3} ;$$

$$(2) 2\sqrt{3} \times \sqrt{32} \div \sqrt{2} .$$

【答案】 (1) 0 (2) $8\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算；

(1) 先化简各项，再合并同类二次根式即可；

(2) 根据二次根式乘除运算法则计算即可.

【小问 1 详解】

解：原式 $= 3\sqrt{3} - 2 \times 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$

$$= 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + \sqrt{3}$$

$$= 0 ;$$

【小问 2 详解】

解：原式 $= 2\sqrt{3 \times 32} \div 2$

$$= 2\sqrt{3 \times 16}$$

$$= 8\sqrt{3} .$$

20. 计算

$$(1) \sqrt{\frac{b}{a}} \div \sqrt{ab} \times \sqrt{\frac{a^3}{b}} (a < 0, b < 0)$$

$$(2) 3a\sqrt{12ab} \cdot \left(-\frac{2}{3}\sqrt{6b}\right)$$

【答案】 (1) $-\frac{\sqrt{ab}}{b}$

$$(2) -12ab\sqrt{2a}$$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的乘除法、二次根式的化简、二次根式有意义的条件，熟练掌握运算是解题关键.

(1) 先化简二次根式，再计算二次根式的除法，然后计算二次根式的乘法即可得；

(2) 先根据二次根式有意义的条件可得 $a \geq 0, b \geq 0$ ，再计算二次根式的乘法，然后化简二次根式即可得.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= \sqrt{\frac{ab}{a^2}} \div \sqrt{ab} \times \sqrt{\frac{a^3b}{b^2}} \\ &= \frac{\sqrt{ab}}{-a} \div \sqrt{ab} \times \frac{-a\sqrt{ab}}{-b} \\ &= -\frac{1}{a} \times \frac{a\sqrt{ab}}{b} \\ &= -\frac{\sqrt{ab}}{b}.\end{aligned}$$

【小问 2 详解】

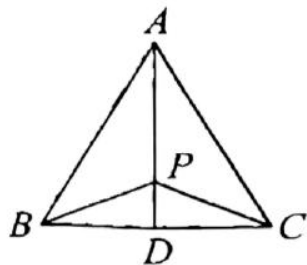
解: 由题意可知, $12ab \geq 0, 6b \geq 0$,

则 $a \geq 0, b \geq 0$,

$$\begin{aligned}\text{则原式} &= -\frac{2}{3} \times 3a\sqrt{12ab \cdot 6b} \\ &= -2a \cdot 6b\sqrt{2a} \\ &= -12ab\sqrt{2a}.\end{aligned}$$

21. 已知在三角形 ABC 中, 点 D 是边 BC 上一点, P 是线段 AD 上一点, $\angle ACP = \angle ABP$, $\angle CPD = \angle BPD$.

求证: $AD \perp BC$.



方法一: $\because \angle CPD = \angle BPD$.

$\therefore 180^\circ - \angle CPD = 180^\circ - \angle BPD$, 即 $\angle APB = \angle APC$

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle ACP$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABP = \angle ACP \\ \angle APB = \angle APC \\ AP = AP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ACP \text{ ()}$$

$$\therefore AB = AC, \angle BAP = \angle CAP \text{ ()}$$

$$\therefore AD \perp BC \text{ ()}$$

方法二: $\because \angle CPD = \angle BPD, \angle ABP = \angle ACP,$

$$\therefore \angle BAP = \angle BPD - \angle ABP, \angle CAP = \angle DPC - \angle ACP \text{ ()}$$

$$\therefore \angle BAP = \angle CAP$$

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle ACP$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABP = \angle ACP \\ \angle BAP = \angle CAP \\ AP = AP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ACP$$

$$\therefore AB = AC, PB = PC$$

$$\therefore \text{点 } A, \text{点 } P \text{ 在线段 } BC \text{ 的垂直平分线上 ()}$$

$$\therefore AP \text{ 垂直平分 } BC \text{ ()}$$

即 $AD \perp BC$

【答案】见解析

【解析】

【分析】 本题考查了三角形全等的判定与性质、等腰三角形的三线合一、线段垂直平分线的判定等知识, 熟练掌握三角形全等的判定是解题关键.

方法一: 先求出 $\angle APB = \angle APC$, 再根据 AAS 定理证出 $\triangle ABP \cong \triangle ACP$, 根据全等三角形的性质可得 $AB = AC, \angle BAP = \angle CAP$, 然后根据等腰三角形的三线合一即可得证.

方法二: 先根据三角形的外角性质可得 $\angle BAP = \angle CAP$, 再根据 AAS 定理证出 $\triangle ABP \cong \triangle ACP$, 根据全等三角形的性质可得 $AB = AC, PB = PC$, 然后证出 AP 垂直平分 BC , 由此即可得证.

【详解】 证明: 方法一: $\because \angle CPD = \angle BPD,$

$$\therefore 180^\circ - \angle CPD = 180^\circ - \angle BPD, \text{ 即 } \angle APB = \angle APC,$$

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle ACP$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABP = \angle ACP \\ \angle APB = \angle APC, \\ AP = AP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ACP (\text{AAS}),$$

$$\therefore AB = AC, \angle BAP = \angle CAP \text{ (全等三角形的性质)},$$

$$\therefore AD \perp BC \text{ (等腰三角形的三线合一)}.$$

$$\text{方法二: } \because \angle CPD = \angle BPD, \angle ABP = \angle ACP,$$

$$\therefore \angle BAP = \angle BPD - \angle ABP, \angle CAP = \angle DPC - \angle ACP \text{ (三角形的外角性质)},$$

$$\therefore \angle BAP = \angle CAP,$$

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle ACP$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABP = \angle ACP \\ \angle BAP = \angle CAP, \\ AP = AP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ACP,$$

$$\therefore AB = AC, PB = PC,$$

$$\therefore \text{点 } A, \text{ 点 } P \text{ 在线段 } BC \text{ 的垂直平分线上 (线段垂直平分线的判定)},$$

$$\therefore AP \text{ 垂直平分 } BC \text{ (两点确定一条直线)},$$

$$\text{即 } AD \perp BC.$$

$$22. (1) \text{ 试化简: } \sqrt{(x-3)^2} - (\sqrt{2-x})^2;$$

$$(2) \text{ 已知 } a, b \text{ 满足 } \sqrt{(2-a)^2} = a+3, \sqrt{a-b+1} = a-b+1, \text{ 求 } ab.$$

$$\text{【答案】 (1) } 1; (2) \pm \frac{1}{4}$$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质, 熟练掌握二次根式的性质是解题的关键.

(1) 根据二次根式的概念分析出 $x \leq 2$, 即可根据二次根式的性质化简运算;

(2) 根据二次根式的性质化简运算即可.

$$\text{【详解】 (1) 解: } \because 2-x \geq 0$$

$$\therefore x \leq 2$$

$$\therefore \sqrt{(x-3)^2} - (\sqrt{2-x})^2 = 3-x - (2-x) = 3-x-2+x = 1;$$

$$(2) \because \sqrt{(2-a)^2} = a+3,$$

若 $a \geq 2$, 则 $a-2=a+3$,

该方程无解, 故 $a \geq 2$ 不成立, 则 $a < 2$,

$$\therefore 2-a=a+3,$$

$$\therefore a=-\frac{1}{2},$$

$$\because \sqrt{a-b+1}=a-b+1,$$

$$\therefore a-b+1=1 \text{ 或 } a-b+1=0,$$

$$\therefore \text{把 } a=-\frac{1}{2} \text{ 代入 } a-b+1=1 \text{ 或 } a-b+1=0 \text{ 运算解得: } b=-\frac{1}{2} \text{ 或 } b=\frac{1}{2},$$

$$\therefore ab=-\frac{1}{2} \times \left(\pm \frac{1}{2}\right) = \pm \frac{1}{4}.$$

23. 已知 $2a+1$ 和 $a-4$ 是同一个正数 m 的平方根, $b-4$ 的立方根为 -2 , 求 $5m-b$ 的平方根?

【答案】 $\pm\sqrt{409}$ 或 ± 7

【解析】

【分析】 本题考查了平方根与立方根, 熟悉理解平方根与立方根是解题的关键.

根据平方根的概念分两种情况分析: 当 $2a+1$ 和 $a-4$ 互为相反数时, 当 $2a+1$ 和 $a-4$ 互为相等时, 求出 m 的值, 根据立方根的概念求出 b 的值, 代入 $5m-b$ 运算即可.

【详解】 解: $\because 2a+1$ 和 $a-4$ 是同一个正数 m 的平方根,

$\therefore$ 当 $2a+1$ 和 $a-4$ 互为相反数时,

$$\therefore 2a+1+a-4=0,$$

$$\therefore a=1,$$

$$\therefore m=(2a+1)^2=(2+1)^2=9,$$

$\because b-4$ 的立方根为 -2 ,

$$\therefore \sqrt[3]{b-4}=-2,$$

$$\therefore b=-4,$$

$$\therefore 5m-b=5 \times 9 - (-4) = 45 + 4 = 49.$$

$$\therefore \pm\sqrt{49}=\pm 7,$$

$\therefore 5m-b$ 的平方根为: ± 7 ;

当 $2a+1$ 和 $a-4$ 相等时,

$$\therefore 2a+1=a-4,$$

$$\therefore a = -5,$$

$$\therefore m = (2a+1)^2 = (-10+1)^2 = 81,$$

$$\therefore b-4 \text{ 的立方根为 } -2,$$

$$\therefore \sqrt[3]{b-4} = -2,$$

$$\therefore b = -4,$$

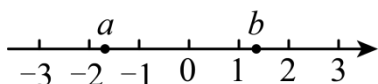
$$\therefore 5m-b = 5 \times 81 - (-4) = 405 + 4 = 409.$$

$$\therefore \pm\sqrt{409} = \pm\sqrt{409},$$

$$\therefore 5m-b \text{ 的平方根为: } \pm\sqrt{409};$$

$$\therefore 5m-b \text{ 的平方根为 } \pm\sqrt{409} \text{ 或 } \pm 7.$$

24. 实数 a, b 在数轴上的位置如图所示, 化简: $\sqrt{(a+1)^2} - |b-2| + \sqrt[3]{(a-b)^3}$.



【答案】 -3

【解析】

【分析】本题考查了实数与数轴, 平方根与立方根, 二次根式的性质与化简等知识, 由图可知 $a < -1$, $b < 2$, 得到 $a+1 < 0$, $b-2 < 0$, 然后化简求解即可, 掌握相关知识是解题的关键.

【详解】解: 由图可知, $a < -1$, $b < 2$,

$$\therefore a+1 < 0, \quad b-2 < 0,$$

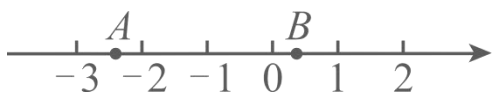
$$\therefore \sqrt{(a+1)^2} - |b-2| + \sqrt[3]{(a-b)^3}$$

$$= -(a+1) - (2-b) + (a-b)$$

$$= -a-1-2+b+a-b$$

$$= -3.$$

25. 已知数轴上点 A 表示 $-\sqrt{5}$, 点 B 表示 $\pi-3$, 如果存在点 P , 满足 $PA:PB=3:4$, 求点 P 表示的数是多少?



【答案】 $-3\pi+9-4\sqrt{5}$ 或 $\frac{3\pi-9-4\sqrt{5}}{7}$.

【解析】

【分析】 本题主要考查了数轴上两点间的距离公式以及绝对值方程的求解，熟练掌握数轴上两点间距离公式 $d = |x_1 - x_2|$ ，并能根据点的位置分情况讨论求解方程是解题的关键. 设点 P 表示的数为 x ，分点 P 在点 A 左侧、在点 A 和点 B 之间、在点 B 右侧三种情况，根据 $PA:PB = 3:4$ 列方程求解.

【详解】 解： 设点 P 表示的数为 x .

$\because$ 点 A 表示 $-\sqrt{5}$ ，点 P 表示 x ，

$$\therefore PA = |x - (-\sqrt{5})| = |x + \sqrt{5}|.$$

$\because$ 点 B 表示 $\pi - 3$ ，点 P 表示 x ，

$$\therefore PB = |x - (\pi - 3)| = |x - \pi + 3|.$$

$$\because PA:PB = 3:4,$$

$$\therefore \frac{|x + \sqrt{5}|}{|x - \pi + 3|} = \frac{3}{4}, \text{ 即 } 4|x + \sqrt{5}| = 3|x - \pi + 3|.$$

情况一： 点 P 在点 A 左侧，即 $x < -\sqrt{5}$

此时 $x + \sqrt{5} < 0$ ， $x - \pi + 3 < 0$ ，

$$\therefore -4(x + \sqrt{5}) = -3(x - \pi + 3),$$

$$-4x - 4\sqrt{5} = -3x + 3\pi - 9,$$

$$-x = 3\pi - 9 + 4\sqrt{5},$$

$$x = -3\pi + 9 - 4\sqrt{5}.$$

$-3\pi + 9 - 4\sqrt{5} < -\sqrt{5}$ ，符合点 P 在点 A 左侧.

情况二： 点 P 在点 A 和点 B 之间，即 $-\sqrt{5} < x < \pi - 3$

此时 $x + \sqrt{5} > 0$ ， $x - \pi + 3 < 0$ ，

$$\therefore 4(x + \sqrt{5}) = -3(x - \pi + 3),$$

$$4x + 4\sqrt{5} = -3x + 3\pi - 9,$$

$$7x = 3\pi - 9 - 4\sqrt{5},$$

$$x = \frac{3\pi - 9 - 4\sqrt{5}}{7}, \quad -\sqrt{5} < \frac{3\pi - 9 - 4\sqrt{5}}{7} < \pi - 3, \text{ 符合点 } P \text{ 在点 } A \text{ 和点 } B \text{ 之间.}$$

情况三: 点 P 在点 B 右侧, 即 $x > \pi - 3$

$$\text{此时 } x + \sqrt{5} > 0, \quad x - \pi + 3 > 0,$$

$$\therefore 4(x + \sqrt{5}) = 3(x - \pi + 3),$$

$$4x + 4\sqrt{5} = 3x - 3\pi + 9,$$

$$x = -3\pi + 9 - 4\sqrt{5}.$$

$$-3\pi + 9 - 4\sqrt{5} < \pi - 3, \text{ 此时不符合点 } P \text{ 在点 } B \text{ 右侧, 舍去.}$$

$$\text{综上, 点 } P \text{ 表示的数为 } -3\pi + 9 - 4\sqrt{5} \text{ 或 } \frac{3\pi - 9 - 4\sqrt{5}}{7}.$$

26. 我们用 $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数. $a - [a]$ 的值称为数 a 的小数部分, 如 $[2.13] = 2$, 2.13 的小数部分为 $2.13 - [2.13] = 0.13$.

$$(1) [\sqrt{3}] = \underline{\hspace{2cm}}, \quad [-\sqrt{7}] = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \text{ 设 } \sqrt{5} \text{ 的小数部分为 } a, \text{ 则 } a + [\sqrt{6}] - \sqrt{5} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \text{ 已知: } 9 + \sqrt{13} = x + y, \text{ 其中 } x \text{ 是整数, 且 } 0 < y < 1, \text{ 求 } x - y - [5\pi] \text{ 的值的相反数.}$$

【答案】 (1) 1, -3

$$(2) 0 \quad (3) \sqrt{13}$$

【解析】

【分析】 本题考查了估算无理数的大小, 熟练掌握平方数是解题的关键.

(1) 根据题意即可解答;

(2) 根据平方运算估算出 $\sqrt{5}$ 和 $\sqrt{6}$, 进而求解;

(3) 估算 $\sqrt{13}$ 的范围即可得到 x 和 y , 然后根据相反数的意义, 即可解答.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \because 1 < 3 < 4,$$

$$\therefore 1 < \sqrt{3} < 2,$$

$$\therefore \sqrt[4]{3} = 1;$$

$$\because 4 < 7 < 9,$$

$$\therefore 2 < \sqrt{7} < 3,$$

$$\therefore -3 < -\sqrt{7} < -2$$

$$\therefore -3 < -2,$$

$$\therefore \lceil -\sqrt{7} \rceil = -3;$$

故答案为: 1, -3;

【小问 2 详解】

解: $\because 4 < 5 < 9,$

$$\therefore 2 < \sqrt{5} < 3,$$

$\therefore \sqrt{5}$ 的整数部分为 2,

$\therefore \sqrt{5}$ 的小数部分为: $\sqrt{5} - 2,$

$$\therefore a = \sqrt{5} - 2;$$

$$\because 4 < 6 < 9,$$

$$\therefore 2 < \sqrt{6} < 3,$$

$$\therefore \lceil \sqrt{6} \rceil = 2,$$

$$\therefore a + \lceil \sqrt{6} \rceil - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2 + 2 - \sqrt{5} = 0;$$

故答案为: 0;

【小问 3 详解】

解: $\because 3 < \sqrt{13} < 4,$

$$\therefore 12 < 9 + \sqrt{13} < 13,$$

$\because 9 + \sqrt{13} = x + y$, x 是整数, 且 $0 < y < 1$,

$$\therefore x = 12, \quad y = 9 + \sqrt{13} - 12 = \sqrt{13} - 3,$$

$$\therefore \lceil 5\pi \rceil = 15,$$

$$\therefore x - y - [5\pi] = 12 - (\sqrt{13} - 3) - 15 = -\sqrt{13},$$

$$\therefore x - y - [5\pi] \text{ 的相反数为: } \sqrt{13}.$$

27. (1) 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB > AC$.

如图 1, 通过定理“在三角形中, _____”可以证明 $\angle C > \angle B$;

如图 1, 若 D 是 BC 边的中点, 连接 AD , 求证: $\angle BAD < \angle CAD$.

(2) 如图 2, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = AC$, 且 D 是 $\triangle ABC$ 内的一点, $\angle ADB > \angle ADC$. 求证: $DC > DB$.

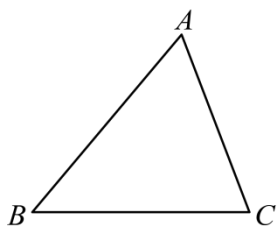


图1

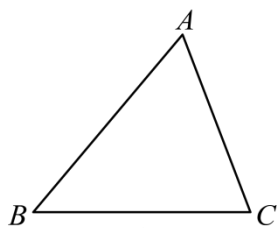


图1备用

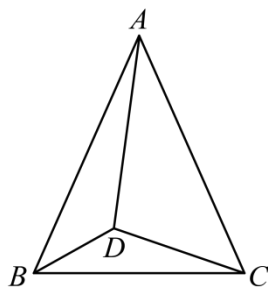


图2

【答案】 (1) 大边对大角; 证明见解析; (2) 证明见解析

【解析】

【分析】 本题考查了三角形全等的判定与性质、大边对大角定理、等腰三角形的性质等知识, 通过作辅助线, 构造全等三角形是解题关键.

(1) 证明: 作 $\angle BAC$ 的角平分线, 交 BC 于点 D , 在 AB 上取一点 E , 使得 $AE = AC$, 连接 DE , 先证出 $\triangle ADE \cong \triangle ADC$, 根据全等三角形的性质可得 $\angle AED = \angle C$, 再根据三角形的外角性质可得 $\angle AED = \angle B + \angle BDE > \angle B$, 由此即可得证;

延长 AD 至点 E , 使得 $ED = AD$, 连接 CE , 先证出 $\triangle CDE \cong \triangle BDA$, 根据全等三角形的性质可得 $CE = AB$, $\angle E = \angle BAD$, 则可得 $CE > AC$, 根据大边对大角, 小边对小角定理可得 $\angle E < \angle CAD$, 由此即可得证;

(2) 在 AC 右侧作 $\angle CAF = \angle BAD$, 且 $AF = AD$, 连接 CF, DF , 先证出 $\triangle ACF \cong \triangle ABD$, 根据全等三角形的性质可得 $FC = DB$, $\angle AFC = \angle ADB$, 则可得 $\angle AFC > \angle ADC$, 再根据等腰三角形的性质可得 $\angle ADF = \angle AFD$, 则可得 $\angle CFD > \angle CDF$, 然后根据大角对大边, 小角对小边定理可得 $DC > FC$, 由此即可得证.

【详解】 证明: (1) 如图 1, 通过定理“在三角形中, 大边对大角”可以证明 $\angle C > \angle B$, 定理证明如下:
如图, 作 $\angle BAC$ 的角平分线, 交 BC 于点 D , 在 AB 上取一点 E , 使得 $AE = AC$, 连接 DE ,

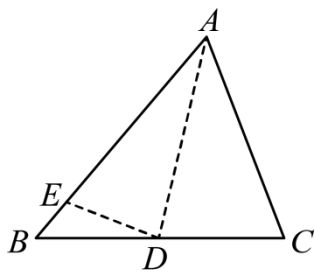


图1

$$\therefore \angle DAE = \angle DAC ,$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ADC$ 中,

$$\begin{cases} AE = AC \\ \angle DAE = \angle DAC , \\ AD = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ADC (\text{SAS}),$$

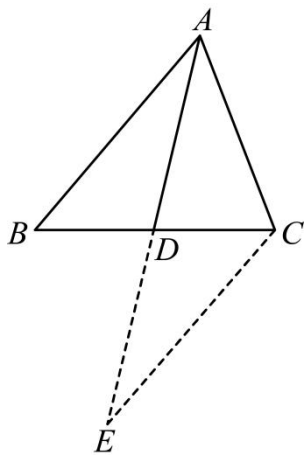
$$\therefore \angle AED = \angle C ,$$

$$\because \angle AED = \angle B + \angle BDE > \angle B ,$$

$$\therefore \angle C > \angle B .$$

由题意，画出图形如下：

延长 AD 至点 E ，使得 $ED = AD$ ，连接 CE ，



$\because D$ 是 BC 边的中点,

$$\therefore CD = BD ,$$

在 $\triangle CDE$ 和 $\triangle BDA$ 中,

$$\begin{cases} ED = AD \\ \angle CDE = \angle BDA , \\ CD = BD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CDE \cong \triangle BDA (\text{SAS}),$$

$$\therefore CE = AB, \angle E = \angle BAD,$$

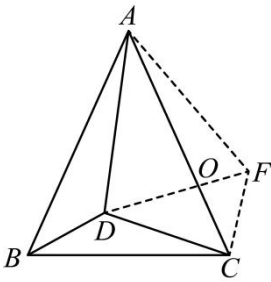
$$\because AB > AC,$$

$$\therefore CE > AC,$$

$$\therefore \text{在 } \triangle ACE \text{ 中, } \angle E < \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BAD < \angle CAD.$$

(2) 如图, 在 AC 右侧作 $\angle CAF = \angle BAD$, 且 $AF = AD$, 连接 CF, DF ,



在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle ABD$ 中,

$$\begin{cases} AC = AB \\ \angle CAF = \angle BAD, \\ AF = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACF \cong \triangle ABD (\text{SAS}),$$

$$\therefore FC = DB, \angle AFC = \angle ADB,$$

$$\because \angle ADB > \angle ADC,$$

$$\therefore \angle AFC > \angle ADC,$$

$$\because AF = AD,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle AFD,$$

$$\therefore \angle AFC - \angle AFD > \angle ADC - \angle ADF, \text{ 即 } \angle CFD > \angle CDF,$$

$$\therefore \text{在 } \triangle CDF \text{ 中, } DC > FC,$$

$$\therefore DC > DB.$$