

小练习 8

一、选择题（每题 3 分，共 24 分）

1. 下列说法正确的是（ ）

- A. 实数可分为有理数和无理数
- B. $\sqrt{4}$ 的平方根是 ± 2
- C. 数轴上的点与有理数一一对应
- D. 无理数与无理数的和一定是无理数

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查实数的分类、平方根、数轴表示以及无理数的性质，掌握基本概念是解题关键. 根据实数的分类、平方根的定义、数轴的性质以及无理数的性质进行判断.

【详解】解：A、实数包括有理数和无理数，这是实数的标准分类，故 A 正确，符合题意；
B、 $\sqrt{4} = 2$ ，2 的平方根是 $\pm\sqrt{2}$ ，不是 ± 2 ，故 B 错误，不符合题意；
C、数轴上的点与实数一一对应，而不是仅与有理数对应，故 C 错误，不符合题意；
D、无理数与无理数的和不一定是无理数，例如 $\pi + (-\pi) = 0$ 为有理数，故 D 错误，不符合题意.
故选：A.

2. 下列二次根式中，与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{22}$
- B. $\sqrt{0.2}$
- C. $\sqrt{\frac{1}{8}}$
- D. $\sqrt{2\frac{1}{2}}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次根式定义：把几个二次根式化为最简二次根式后，如果它们的被开方数相同，就把这几个二次根式叫做同类二次根式，进而分别化简求出符合题意的答案.

【详解】解：A. $\sqrt{22}$ 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式；
B. $\sqrt{0.2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式；
C. $\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ，与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式；

D. $\sqrt{2\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式.

故选 C.

【点睛】 本题考查同类二次根式的定义，解题关键是正确化简二次根式.

3. 下列命题的逆命题中，真命题的是 ()

- A. 全等三角形的对应角相等
- B. 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半
- C. 关于某一条直线对称的两个三角形全等
- D. 对顶角相等

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查的是命题与定理，正确的命题叫做真命题，错误的命题叫做假命题，判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理.

分别写出各个命题的逆命题，根据全等三角形的判定、直角三角形的判定、轴对称、对顶角相等判断即可.

【详解】 解：A、全等三角形的对应角相等，逆命题是对应角相等的三角形全等，是假命题，故 A 选项不符合题意；

B、直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，逆命题是一个三角形一边的中线是这边的一半，那么这个三角形是直角三角形，是真命题，故 B 选项符合题意；

C、关于某一条直线对称的两个三角形全等，逆命题是两个全等三角形关于某一条直线对称，是假命题，故 C 选项不符合题意；

D、对顶角相等，逆命题是相等的角是对顶角，是假命题，故 D 选项不符合题意；

故选：B.

4. 有这样一道题目：“已知 $\sqrt[3]{x-1} = x-1$ ，求 x 的值.” 甲、乙二人的说法如下，则下列判断正确的是 ()

甲： x 的值是 1；

乙：甲考虑的不全面， x 还有另一个值

- A. 甲说的对， x 的值就是 1
- B. 乙说的对， x 的另一个值是 2
- C. 乙说的对， x 的另一个值是 -1
- D. 两人都不对， x 应有 3 个不同值

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据立方根的性质进行计算即可.

【详解】解：∵ $\sqrt[3]{x-1} = x-1$,

∴ $x-1 = \pm 1$ 或 $x-1 = 0$,

当 $x-1 = 1$ 时, $x = 2$;

当 $x-1 = -1$ 时, $x = 0$;

当 $x-1 = 0$ 时, $x = 1$;

即 x 有 3 个不同的值, 故两人说法都不对;

故选: D.

【点睛】本题考查了立方根的性质, 熟练掌握立方根的性质是解题的关键.

5. 施工队要铺设一段全长 2000 米的管道, 因在高考期间需停工两天, 实际每天施工需比原来计划多 50 米, 才能按时完成任务, 求原计划每天施工多少米. 设原计划每天施工 x 米, 则根据题意所列方程正确的是 ()

A. $\frac{2000}{x} - \frac{2000}{x+50} = 2$

B. $\frac{2000}{x+50} - \frac{2000}{x} = 2$

C. $\frac{2000}{x} - \frac{2000}{x-50} = 2$

D. $\frac{2000}{x-50} - \frac{2000}{x} = 2$

【答案】A

【解析】

【分析】设原计划每天铺设 x 米, 则实际施工时每天铺设 $(x+50)$ 米, 根据: 原计划所用时间 - 实际所用时间 = 2, 列出方程即可.

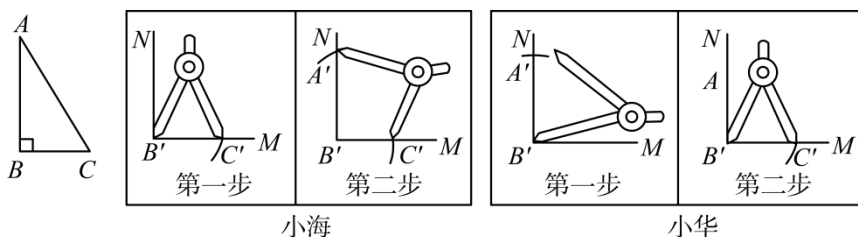
【详解】解: 设原计划每天施工 x 米, 则实际每天施工 $(x+50)$ 米,

根据题意, 可列方程: $\frac{2000}{x} - \frac{2000}{x+50} = 2$,

故选: A.

【点睛】本题考查了由实际问题抽象出分式方程, 关键是读懂题意, 找出合适的等量关系, 列出方程.

6. 在课堂上, 李老师发给每人一张印有 $\text{Rt}\triangle ABC$ (如图) 的卡片, 要求学生们画一个 $\text{Rt}\triangle A'B'C'$, 使得 $\text{Rt}\triangle A'B'C' \cong \text{Rt}\triangle ABC$, 小海和小华先画出了 $\angle MB'N = 90^\circ$ 之后, 后续画图的主要过程分别如图所示. 对这两种画法的描述中, 错误的是 ()



A. 小海作图判定 $\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle A'B'C'$ 的依据是直角三角形全等的判定定理

- B. 小海第二步作图时，用圆规截取的长度是线段 AC 的长
- C. 小华作图判定 $\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle A'B'C'$ 的依据是 SAS
- D. 小华第一步作图时，用圆规截取的长度是线段 AC 的长

【答案】D

【解析】

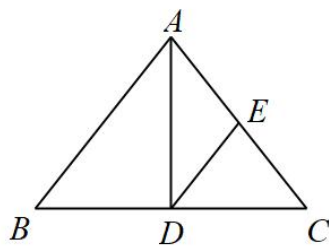
【分析】本题考查了用圆规作图和全等三角形判定的知识，掌握以上知识是解答本题的关键；根据演示确定作图的具体步骤，结合全等的判定方法逐选项进行判断，即可求解；

【详解】解：由图示知，小海第一步为截取线段 $B'C' = BC$ ，第二步为作线段 $C'A' = CA$ ，判定方法为 HL；小华第一步为截取线段 $B'A' = BA$ ，第二步为作线段 $B'C' = BC$ ，判定方法为 SAS．

选项 D 表述为“小华第一步作图时，用圆规截取的长度是线段 AC 的长”明显错误，符合题意，

故选：D．

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D ， E 为 AC 的中点，若 $AB = 10$ ，则 DE 的长是（ ）



- A. 8 B. 6 C. 5 D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】利用等腰三角形三线合一以及直角三角形斜边上的中线进行求解即可．

【详解】 $\because AB = AC = 10$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ，

$$\therefore AD \perp BC,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

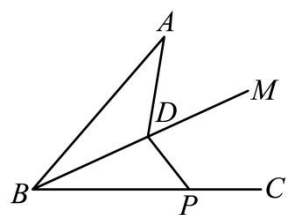
$\because E$ 为 AC 的中点，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AC = 5,$$

故选 C．

【点睛】本题考查等腰三角形的性质和直角三角形斜边上的中线．熟练掌握等腰三角形三线合一和直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半是解题的关键．

8. 如图, BM 是 $\angle ABC$ 的平分线, 点 D 是 BM 上的一点, 点 P 为直线 BC 上的一个动点. 若 $\triangle ABD$ 的面积为 9, $AB = 6$, 则线段 DP 的长不可能是 ()



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

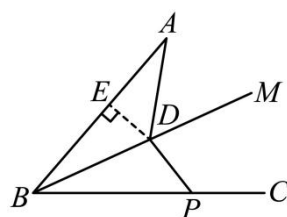
【答案】A

【解析】

【分析】 本题主要考查了角平分线的性质, 垂线段最短, 熟练掌握角平分线的性质与垂线段最短是解题的关键.

过点 D 作 $DE \perp AB$, 利用三角形的面积公式求出 DE 的长, 根据垂线段最短得到 $DP \perp BC$ 时, DP 最短, 此时 $DP = DE$, 进行判断即可.

【详解】 解: 如图, 过点 D 作 $DE \perp AB$,



$$\text{则 } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DE = \frac{1}{2} \times 6DE = 9,$$

$$\therefore DE = 3,$$

$\because$ 点 P 为直线 BC 上的一个动点,

$\therefore$ 当 $DP \perp BC$ 时, DP 最短,

$\because BM$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,

$\therefore$ 当 $DP \perp BC$ 时, $DP = DE = 3$,

$\therefore$ 线段 DP 的长不可能是 2.

故选: A.

二、填空题 (每题 3 分, 共 30 分)

9. $\sqrt{16}$ 的平方根是_____.

【答案】 ± 2

【解析】

【详解】解： $\because \sqrt{16}=4$

$\therefore \sqrt{16}$ 的平方根是 ± 2 .

故答案为 ± 2 .

10. 关于 x 的方程 $x(x-1)+3(x-1)=0$ 的解是_____.

【答案】 $x_1=-3, x_2=1$

【解析】

【分析】 根据因式分解法解一元二次方程.

【详解】 $x(x-1)+3(x-1)=0$,

$$(x-1)(x+3)=0,$$

解得 $x_1=-3, x_2=1$.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程的求解，准确计算是解题的关键.

11. 在实数范围内分解因式： $2x^2-2x-5=$ _____.

【答案】 $2(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2})(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2})$

【解析】

【分析】 将原式变形为 $2(x-\frac{1}{2})^2-\frac{11}{2}$ ，再利用平方差公式分解即可得.

【详解】 解： $2x^2-2x-5$

$$=2(x^2-x+\frac{1}{4})-\frac{11}{2}$$

$$=2(x-\frac{1}{2})^2-\frac{11}{2}$$

$$=2\left[(x-\frac{1}{2})^2-\frac{11}{4}\right]$$

$$=2(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2})(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}),$$

故答案为： $2(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2})(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2})$.

【点睛】 本题主要考查实数范围内分解因式，解题的关键是熟练掌握完全平方公式和平方差公式.

12. 如果关于 x 的一元二次方程 $kx^2-(2k+1)x+k=0$ 有两个实数根，那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的定义，一元二次方程的根与系数的条件，掌握知识点是解题的关键。一元二次方程有两个实数根的条件是判别式大于或等于零且二次项系数不为零，即可解答。

【详解】 解：方程 $kx^2 - (2k+1)x + k = 0$ 是一元二次方程，

因此 $k \neq 0$ 。

判别式 $\Delta = [-(2k+1)]^2 - 4 \cdot k \cdot k = (2k+1)^2 - 4k^2 = 4k^2 + 4k + 1 - 4k^2 = 4k + 1$ 。

有两个实数根，则 $\Delta \geq 0$ ，

即 $4k + 1 \geq 0$ ，

解得 $k \geq -\frac{1}{4}$ 。

综上， k 的取值范围是 $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$ 。

故答案为： $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$ 。

13. 已知 $a+b=-8$ ， $ab=1$ ，则 $\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}$ 的值为_____。

【答案】 8

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的加减混合运算以及求值，根据 $a+b=-8$ ， $ab=1$ 判断出 $a<0, b<0$ ，

将 $\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}$ 化简再进行加减运算，最后将 $a+b=-8$ ， $ab=1$ 代入求值即可。

【详解】 解： $\because a+b=-8$ ， $ab=1$ ，

$\therefore a<0, b<0$ ，

$\therefore \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}$

$= -\frac{\sqrt{ab}}{a} - \frac{\sqrt{ab}}{b}$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{b\sqrt{ab}}{ab} - \frac{a\sqrt{ab}}{ab} \\
 &= -\frac{b\sqrt{ab} + a\sqrt{ab}}{ab} \\
 &= -\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{ab},
 \end{aligned}$$

当 $a+b=-8$, $ab=1$, 原式 $= -\frac{(-8)\times\sqrt{1}}{1} = 8$,

故答案为: 8.

14. 方程 $\frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{x-2}$ 的根是_____.

【答案】

$$x = -2$$

【解析】

【分析】本题考查分式方程的求解, 熟练掌握解分式方程的步骤是解决此题的关键, 需先确定分母不为零, 再通过分子相等求解, 并排除增根即可.

【详解】解: 由方程 $\frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{x-2}$, 分母 $x-2 \neq 0$, 即 $x \neq 2$,

两边同乘 $x-2$, 得 $x^2 = 4$,

解得 $x=2$ 或 $x=-2$.

检验: $x=2$ 使分母为零, 为增根, 舍去; $x=-2$ 满足条件,

故方程根为 $x=-2$,

故答案为: $x=-2$.

15. “直角三角形中的两个锐角互余”的逆命题是_____.

【答案】两个锐角互余的三角形是直角三角形

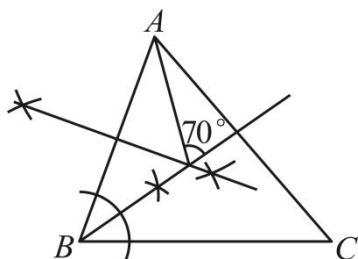
【解析】

【分析】本题考查了逆命题, 找出原命题的题设和结论, 交换后即可得逆命题, 掌握互逆命题的定义是解题的关键.

【详解】解: “直角三角形中的两个锐角互余”的逆命题是“两个锐角互余的三角形是直角三角形”,

故答案为: 两个锐角互余的三角形是直角三角形.

16. 如图，依据尺规作图的痕迹， $\angle ABC = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.

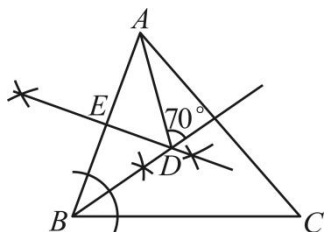


【答案】 70

【解析】

【分析】 本题考查作角平分线与线段垂直平分线、线段垂直平分线的性质、角平分线的定义，由尺规作图痕迹可知，所作是线段 AB 的垂直平分线和 $\angle ABC$ 的平分线，结合线段垂直平分线的性质以及角平分线的定义可得答案.

【详解】 解：由尺规作图痕迹可知，所作是线段 AB 的垂直平分线和 $\angle ABC$ 的平分线，
 设线段 AB 的垂直平分线和 $\angle ABC$ 的平分线相交于点 D ，线段 AB 的垂直平分线交 AB 于点 E ，



则 $AD = BD$ ， $DE \perp AB$ ， $\angle ABD = \angle CBD$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 为等腰三角形，

$$\therefore \angle ADE = \angle BDE = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 70^\circ) = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE = 180^\circ - 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 2\angle DBE = 70^\circ.$$

故答案为：70.

17. 设 x_1 、 x_2 是方程 $2x^2 - 4mx + 2m^2 + m - 2 = 0$ 的两个根，当 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 时， $x_1^2 + x_2^2$ 取到最小值.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了根与系数的关系以及二次函数最值问题，熟练掌握相关知识点是解题的关键.

利用根与系数的关系将 $x_1^2 + x_2^2$ 表示为 m 的二次函数，再求其最小值，并验证判别式确保方程有实根.

【详解】 解：在方程 $2x^2 - 4mx + 2m^2 + m - 2 = 0$ 中， $a = 2$ ， $b = -4m$ ， $c = 2m^2 + m - 2$ ，

由根与系数的关系, 得 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-4m}{2} = 2m$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2m^2 + m - 2}{2}$,

$\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$, 将上式代入

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (2m)^2 - 2 \cdot \frac{2m^2 + m - 2}{2} = 2m^2 - m + 2,$$

$$\text{故 } x_1^2 + x_2^2 = 2m^2 - m + 2,$$

令 $y = 2m^2 - m + 2$, 此为开口向上的二次函数, 最小值在顶点处,

$$\text{顶点横坐标为 } m = -\frac{-1}{2 \times 2} = \frac{1}{4},$$

$2x^2 - 4mx + 2m^2 + m - 2 = 0$ 的判别式:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4m)^2 - 4 \times 2 \times (2m^2 + m - 2) = 16m^2 - 16m^2 - 8m + 16 = -8m + 16$$

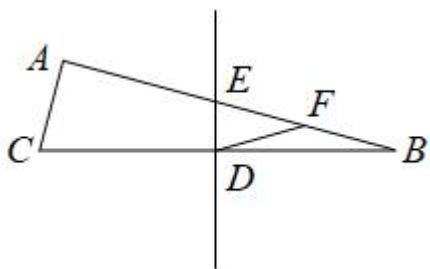
要求 $\Delta \geq 0$, 即 $-8m + 16 \geq 0$, 解得 $m \leq 2$,

$$m = \frac{1}{4} \leq 2, \text{ 满足条件,}$$

故当 $m = \frac{1}{4}$ 时, $x_1^2 + x_2^2$ 取到最小值,

故答案为: $\frac{1}{4}$.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 15^\circ$, 斜边 BC 的垂直平分线交边 AB 于点 E , 垂足为点 D , 取线段 BE 的中点 F , 联结 DF , 如果 $AC = 4$, 则 $DF =$ _____.

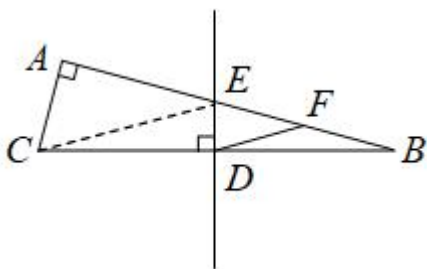


【答案】 4

【解析】

【分析】 先根据线段垂直平分线的性质得 $AE = BE$, 再利用直角三角形斜边中线的性质得 $DF = BE$, 最后根据直角三角形 30° 的性质得 $AC = \frac{1}{2} AE$, 从而得出 $DF = AC$, 即可得出答案.

【详解】 证明: 如图, 联结 CE ,



$\because DE$ 是 AB 的垂直平分线,

$\therefore AE=BE, \angle EDB=90^\circ$,

$\therefore \angle EAB=\angle B=15^\circ$,

$\therefore \angle AEC=30^\circ$,

$Rt\triangle EDB$ 中, $\because F$ 是 BE 的中点,

$\therefore DF=\frac{1}{2}BE$,

$Rt\triangle ACE$ 中, $\because \angle AEC=30^\circ$,

$\therefore AC=\frac{1}{2}AE$,

$\therefore AC=DF=4$.

故答案为: 4.

【点睛】 本题考查了垂直平分线的性质, 直角三角形斜边上的中线的性质以及 30° 所对的直角边的性质, 熟练掌握这些基本性质得出线段关系是解题的关键.

三、解答题 (共 46 分)

19. 计算: $\frac{1}{\sqrt{3}-2}-4\sqrt{\frac{1}{2}}+(\sqrt{48}-\sqrt{24})\div\sqrt{6}$.

【答案】 $-4-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算, 先化简各式, 再合并同类二次根式即可.

【详解】 解: 原式 $=\frac{(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}-2\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{4}$

$$=-2-\sqrt{3}-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2$$

$$=-4-\sqrt{3}.$$

20. 解方程: $2x(x-2)=x^2-3$

【答案】 $x=1$ 或 $x=3$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程，掌握因式分解法解方程是解题的关键.

对方程进行变形化简，再利用因式分解法解方程即可.

【详解】 解： $2x(x-2)=x^2-3$

$$2x^2-4x=x^2-3$$

$$x^2-4x+3=0$$

$$(x-1)(x-3)=0$$

$$x=1 \text{ 或 } x=3$$

21. 当 m 为何值时，关于 x 的方程 $\frac{2}{x}-\frac{x-m}{x^2-x}=1+\frac{1}{x-1}$ 在实数范围内无解？

【答案】

$$m < \frac{7}{4} \text{ 或 } m=2$$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的解，一元二次方程根的判别式，掌握方程和不等式的解法是解答本题的关键. 把分式方程化为整式方程，根据分式方程无解，得出 m 的取值范围即可.

【详解】 解： $\frac{2}{x}-\frac{x-m}{x^2-x}=1+\frac{1}{x-1}$,

方程去分母得： $2(x-1)-(x-m)=x^2-x+x$,

整理得： $x^2-x+2-m=0$,

$\therefore$ 方程 $\frac{2}{x}-\frac{x-m}{x^2-x}=1+\frac{1}{x-1}$ 无实数解，

$$\therefore \Delta = (-1)^2 - 4(2-m) < 0,$$

解得： $m < \frac{7}{4}$;

当 $x=0$, $x=1$ 时分式方程无意义，

把 $x=0$ 代入 $x^2-x+2-m=0$ 得 $m=2$,

把 $x=1$ 代入 $x^2-x+2-m=0$ 得 $m=2$;

综上所述可知：当 $m < \frac{7}{4}$ 或 $m=2$ 时方程 $\frac{2}{x}-\frac{x-m}{x^2-x}=1+\frac{1}{x-1}$ 无实数解.

22. 为了让我们的小朋友们有更好的学习环境，我校 2020 年投资 110 万元改造硬件设施，计划以后每年以相同的增长率进行投资，到 2022 年投资额将达到 185.9 万元.

(1) 求我校改造硬件设施投资额的年平均增长率；

(2) 从 2020 年到 2022 年，这三年我校将总共投资多少万元？

【答案】 (1) 我校改造硬件设施投资额的年平均增长率为 30%；(2) 从 2020 年到 2022 年，这三年我校将总共投资 438.9 万元

【解析】

【分析】 (1) 设我校改造硬件设施投资额的年平均增长率为 x ，利用 2022 年投资额 = 2020 年投资额 $\times$ (1 + 年平均增长率)²，即可得出关于 x 的一元二次方程，解之取其正值即可得出结论；

(2) 利用这三年我校总共投资的金额 = 2020 年投资额 + 2020 年投资额 $\times$ (1 + 年平均增长率) + 2022 年投资额，即可求出结论.

【详解】 解：(1) 设我校改造硬件设施投资额的年平均增长率为 x ，

依题意得： $110(1+x)^2 = 185.9$,

解得： $x_1 = 0.3 = 30\%$, $x_2 = -2.3$ (不合题意，舍去).

答：我校改造硬件设施投资额的年平均增长率为 30%.

(2) $110 + 110 \times (1 + 30\%) + 185.9$

$= 110 + 143 + 185.9$

$= 438.9$ (万元).

答：从 2020 年到 2022 年，这三年我校将总共投资 438.9 万元

【点睛】 本题考查了一元二次方程的应用以及有理数的混合运算，解题的关键是：(1) 找准等量关系，正确列出一元二次方程；(2) 根据各数量之间的关系，列式计算.

23. 已知实数 a 、 b 使等式 $(\sqrt{2a}-1)^2 + |b-2| = 0$ 成立，请先化简，再求值： $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-b} + 1 \div \frac{\sqrt{ab}+b}{a+\sqrt{a}}$.

【答案】 $\sqrt{a} + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}, \frac{1+4\sqrt{2}}{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式被开方数非负性，绝对值的非负性、分式的混合运算、二次根式的混合运算，解题的关键是掌握相应的运算法则，利用非负性求出 a 、 b 的值，利用分式和根式的运算进行化简，再将 a 、 b 的值代入求解即可.

【详解】解： $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-b}+1\div\frac{\sqrt{ab}+b}{a+\sqrt{a}}$

$$=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}+\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

$$=\sqrt{a}+\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

$$\therefore (\sqrt{2a}-1)^2+|b-2|=0,$$

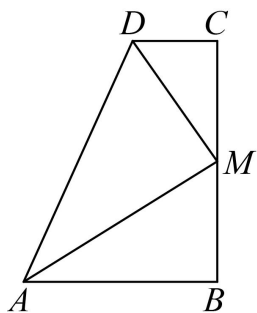
$$\therefore \sqrt{2a}-1=0, b-2=0,$$

解得： $a=\frac{1}{2}, b=2$

$$\text{代入原式}=\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+1\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1+\sqrt{2}}{6}=\frac{1+4\sqrt{2}}{6}.$$

24. 如图，已知 $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ， M 是 BC 的中点， DM 平分 $\angle ADC$ 。求证：



(1) AM 平分 $\angle DAB$ ；

(2) $DM \perp AM$ 。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了角平分线的判定与性质、三角形的内角和定理、平行线的判定和性质，解决本题的关键是根据角平分线的性质找边和角之间的关系。

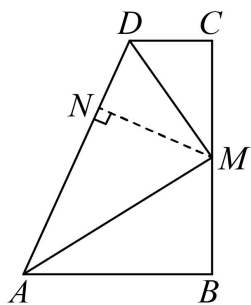
(1) 过点 M 作 $MN \perp AD$ ，根据角平分线的性质可证 $MN = MC$ ，根据中点的定义可知 $MC = MB$ ，所

以可证 $MC = MB = MN$ ，根据到角两边的距离相等的点在角平分线上，可证结论成立；

(2) 根据 $\angle B = \angle C = 90^\circ$ 可知 $DC \parallel AB$ ，根据两直线平行同旁内角互补可得 $\angle ADC + \angle DAB = 180^\circ$ ，根据角平分线的定义可知 $\angle ADM + \angle DAM = 90^\circ$ ，根据三角形的内角和定理可证 $\angle AMD = 90^\circ$ ，从而可证结论成立.

【小问 1 详解】

证明：如下图所示，过点 M 作 $MN \perp AD$ ，



$\because DM$ 平分 $\angle ADC$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore MC \perp DC$ ，

$\therefore MN = MC$ ，

$\because M$ 是 BC 的中点，

$\therefore MC = MB$ ，

$\therefore MC = MB = MN$ ，

$\therefore AM$ 平分 $\angle DAB$ ；

【小问 2 详解】

证明：由 (1) 可知 AM 平分 $\angle DAB$ ，

$\therefore \angle CDM = \angle ADM = \frac{1}{2} \angle ADC$ ，

又 $\because DM$ 平分 $\angle ADC$ ，

$\therefore \angle DAM = \angle BAM = \frac{1}{2} \angle DAB$ ，

$\because \angle B = \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，

$\therefore DC \parallel AB$ ，

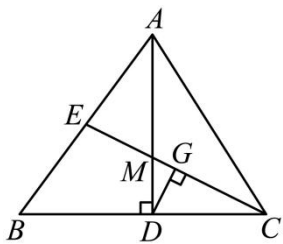
$\therefore \angle ADC + \angle DAB = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle ADM + \angle DAM = \frac{1}{2} (\angle ADC + \angle DAB) = 90^\circ$ ，

在 $\triangle ADM$ 中， $\angle AMD = 180^\circ - \angle ADM - \angle DAM = 90^\circ$ ，

$\therefore DM \perp AM$.

25. 如图, $\triangle ABC$ 中, AD 是边 BC 上的高, CE 是边 AB 上的中线, AD 与 CE 交于点 M . $DG \perp CE$, 垂足为 G . 已知: $\angle B = 2\angle BCE$.



(1) 求证: $DC = BE$;

(2) 如果 $AC = BC$, $\angle B = 60^\circ$, 求证: $S_{\triangle AMC} = 2S_{\triangle DMC}$.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定和性质, 直角三角形中线的性质和等边三角形的知识, 掌握以上知识是解答本题的关键;

(1) 根据 CE 是边 AB 上的中线, AD 是边 BC 上的高, 得到 $DE = AE = BE$, 然后根据等量变换和等角对等边即可求解;

(2) 根据等边三角形知识得到 $\angle BAD = \angle BCE = 30^\circ$, 然后证得 $\triangle AME \cong \triangle DMC$ (AAS), 再根据含 30° 角的直角三角形知识和等量变换, 得到 $\frac{1}{2} AM = DM$, 然后根据三角形面积公式分别表示出

$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} AM \times CD$, $S_{\triangle DMC} = \frac{1}{2} DM \times CD = \frac{1}{4} AM \times CD$, 然后即可求解;

【小问 1 详解】

证明: $\because AD$ 是边 BC 上的高, CE 是边 AB 上的中线,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $DE = AE = BE$,

$\therefore \angle B = \angle BDE$,

$\therefore \angle B = 2\angle BCE = \angle BDE$, $\angle BDE = \angle DEC + \angle BCE$,

$\therefore 2\angle BCE = \angle DEC + \angle BCE$,

$\therefore \angle BCE = \angle DEC$,

$\therefore DE = DC$,

$\therefore DE = AE = BE = DC$,

$\therefore DC = BE$;

【小问 2 详解】

证明: $\because AC = BC$, $\angle B = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\because AD$ 是边 BC 上的高, CE 是边 AB 上的中线,

$\therefore \angle BAD = \angle BCE = 30^\circ$, $\angle ADC = 90^\circ$,

$\because AE = DC$, $\angle AME = \angle DMC$,

$\therefore \triangle AME \cong \triangle DMC$ (AAS),

$\therefore AM = MC$,

$\because \angle ADC = 90^\circ$, $\angle BCE = 30^\circ$,

$\therefore DM = \frac{1}{2}MC$,

$\therefore AM = 2DM$, 即 $\frac{1}{2}AM = DM$,

根据三角形面积公式 $S = \frac{1}{2}ah$ (这里 a 为底, h 为高),

$\therefore S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2}AM \times CD$, $S_{\triangle DMC} = \frac{1}{2}DM \times CD = \frac{1}{4}AM \times CD$,

$\therefore \frac{1}{2}AM \cdot CD = 2 \times \left(\frac{1}{4}AM \cdot CD \right)$,

$\therefore S_{\triangle AMC} = 2S_{\triangle DMC}$;