

初二年级 12 月能力诊断

(数学) 试题卷

(满分 100 分, 完卷时间 90 分钟)

考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.

一、选择题 (本题共 6 小题, 每题 2 分, 共 12 分)

1. 下列实数中, 无理数是 ()

- A. 1.232232223 B. $\frac{1}{3}$ C. $\sqrt[3]{27}$ D. $\sqrt{8}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了无理数的概念, 熟练掌握无理数的定义是解题的关键. 根据无理数是无限不循环小数, 可得答案.

【详解】解: A. 1.232232223 是有限小数, 属于有理数, 故本选项不合题意;

B. $\frac{1}{3}$ 是分数, 属于有理数, 故本选项不合题意;

C. $\sqrt[3]{27} = 3$, 是整数, 属于有理数, 故本选项不合题意;

D. $\sqrt{8}$ 是无限不循环小数, 是无理数, 故本选项题意.

故选 D.

2. 下列根式中, 是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt[3]{2}$ C. $\sqrt{8}$ D. $\sqrt{\frac{1}{3}}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查二次根式, 三次根式的性质化简, 最简二次根式的概念, 掌握以上知识是解题的关键.

【详解】解: A、 $\sqrt{6}$ 是最简二次根式, 符合题意;

B、 $\sqrt[3]{2}$ 是三次根式, 不符合题意;

A、 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 不是最简二次根式, 不符合题意;

A、 $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 不是最简二次根式, 不符合题意;

故选：A.

3. 在下列关于 x 的一元二次方程中，一定有两个不相等的实数根的是 ()

A. $x^2 - 3x - 1 = 0$

B. $3x^2 - x + 1 = 0$

C. $x^2 + 3 = 0$

D. $x^2 - 4x + 4 = 0$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根的判别式. 用根的判别式判断即可，若方程有两个不相等的实数根，则需 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

【详解】解：A、 $x^2 - 3x - 1 = 0$,

$$\therefore \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 13 > 0,$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根，本选项符合题意；

B、 $3x^2 - x + 1 = 0$,

$$\therefore \Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 1 = -11 < 0,$$

$\therefore$ 方程无实数根，本选项不符合题意；

C、 $x^2 + 3 = 0$,

$$\therefore \Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 3 = -12 < 0,$$

$\therefore$ 方程无实数根，本选项不符合题意；

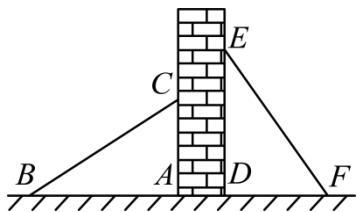
D、 $x^2 - 4x + 4 = 0$,

$$\therefore \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0,$$

$\therefore$ 方程实有两个相等的实数根，本选项不符合题意；

故选：A.

4. 如图，有两根长度相同的竹竿靠在一面竖直的墙两侧，已知左边竹竿端点 C 与墙角 A 的距离等于右边竹竿底部 F 与墙角 D 的距离，则 $\angle ABC + \angle DFE =$ ()



A. 90°

B. 100°

C. 110°

D. 120°

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的性质与判定，熟练掌握全等三角形的性质与判定是解题的关键.

根据题意可知， $AC = DF$ 、 $BC = EF$ ， $\angle BAC = \angle EDF = 90^\circ$ ，进而证得 $\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle DEF$ (HL)，

根据全等三角形的性质证得 $\angle ABC = \angle DEF$ ，进而证得 $\angle ABC + \angle DFE = 90^\circ$.

【详解】解：由题意得， $AC = DF$ 、 $BC = EF$ ， $\angle BAC = \angle EDF = 90^\circ$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle DEF$ (HL)，

$\therefore \angle ABC = \angle DEF$ ，

$\therefore \angle ABC + \angle DFE = \angle DEF + \angle DFE = 90^\circ$ ，

故选：A.

5. 下列命题中，逆命题是真命题的是 ()

A. 如果两个直角三角形全等，那么它们的斜边相等

B. 如果两个实数的商为 -1 ，那么这两个实数互为相反数

C. 如果 $a = b$ ，那么 $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2}$

D. 如果一个三角形是等腰三角形，那么这个三角形两腰上的高相等

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了逆命题以及真假命题，掌握相关定理是解题关键.

把一个命题的条件和结论互换就得到它的逆命题，把四个选项中的命题的结论与条件互换可得到逆命题，再判断出真假即可.

【详解】解：A、逆命题为：如果两个直角三角形的斜边相等，那么它们全等，错误，是假命题，不符合题意；

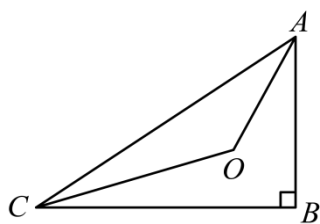
B、逆命题为：如果两个实数互为相反数，那么它们的商为 -1 ，错误，是假命题，不符合题意；

C、逆命题为：如果 $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2}$ ，那么 $a = b$ ，错误，是假命题，不符合题意；

D、逆命题为如果三角形两边上的高相等，那么这个三角形是等腰三角形，正确，是真命题，符合题意；

故选：D.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ，点 O 是 $\angle CAB, \angle ACB$ 平分线的交点，且 $BC = 8\text{cm}$, $AC = 10\text{cm}$ ，则点 O 到边 AB 的距离为 ()



- A. 2cm B. 3cm C. 4cm D. 5cm

【答案】 A

【解析】

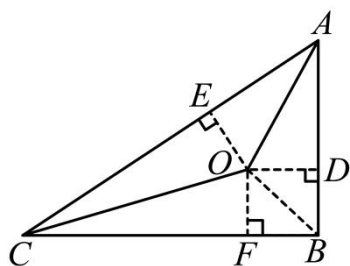
【分析】 过点 O 作 $OD \perp AB$, $OE \perp AC$, $OF \perp BC$, 垂足分别为 D, E, F , 得到 $OD = OE = OF$, 利用勾股定理, 直角三角形的面积公式, 图形的面积和解答即可.

本题考查了角的平分线性, 勾股定理, 直角三角形的面积性质, 熟练掌握性质和定理是解题的关键.

【详解】 解: 过点 O 作 $OD \perp AB$, $OE \perp AC$, $OF \perp BC$, 垂足分别为 D, E, F ,

$\because$ 点 O 是 $\angle CAB, \angle ACB$ 平分线的交点,

$\therefore OD = OE = OF$,



$\because \angle B = 90^\circ$, $BC = 8\text{cm}$, $AC = 10\text{cm}$,

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 6(\text{cm})$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 24(\text{cm}^2)$,

$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle COB}$,

$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot OD + \frac{1}{2} AC \cdot OE + \frac{1}{2} CB \cdot OF = 24$,

$\therefore OD = \frac{24 \times 2}{AB + BC + CA} = \frac{48}{6 + 8 + 10} = 2(\text{cm})$,

故选: A.

二、填空题 (本题共 14 题, 每题 2 分, 共 28 分)

7. 梅花的花粉直径约为 0.000036m , 0.000036 用科学记数法表示为_____.

【答案】 3.6×10^{-5}

【解析】

【分析】本题考查科学记数法表示较小的数，熟练掌握科学记数法是解题的关键. 将一个数表示为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，这种记数方法叫做科学记数法，据此即可求得答案.

【详解】解： $0.000036 = 3.6 \times 10^{-5}$ ，

故答案为： 3.6×10^{-5} .

8. 数轴上点 A 表示的数是 $\sqrt{18}$ ，点 B 在点 A 的左边，且 $AB = 3$ ，那么点 B 表示的数是_____.

【答案】 $3\sqrt{2} - 3$ 或 $-3 + 3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】本题主要考查实数与数轴，熟练掌握实数与数轴是解题的关键；根据数轴上点的位置关系，点 B 在点 A 左边，且 $AB = 3$ ，因此点 B 表示的数为点 A 表示的数减去 3，然后问题可求解.

【详解】解：点 A 表示的数为 $\sqrt{18}$ ，即 $3\sqrt{2}$ ，由于点 B 在点 A 左边且 $AB = 3$ ，

故点 B 表示的数为 $3\sqrt{2} - 3$ ；

故答案为 $3\sqrt{2} - 3$.

9. 若 -4 是 a 的一个平方根， $(\sqrt{9})^2$ 的算术平方根是 b ，则 $\sqrt{a+b}$ 的值为_____.

【答案】

$\sqrt{19}$

【解析】

【分析】本题主要考查平方根与算术平方根，熟练掌握平方根与算术平方根是解题的关键；根据平方根和算术平方根的定义，分别求出 a 和 b 的值，再计算 $a+b$ 的算术平方根即可.

【详解】解：由题意得： $a = 16$ ，

$\because (\sqrt{9})^2 = 9$ ，且 9 的算术平方根是 b ，

$\therefore b = 3$ ，

$\therefore \sqrt{a+b} = \sqrt{16+3} = \sqrt{19}$ ，

故答案为 $\sqrt{19}$.

10. 一元二次方程 $4x(x-2) = 3(x-2)$ 的解 $x =$ _____.

【答案】 2 或 $\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程的解法，熟练掌握一元二次方程的解法是解题的关键；观察方程两边均有公因式 $(x-2)$ ，采用因式分解法求解即可.

【详解】 解： $4x(x-2)=3(x-2)$

$$4x(x-2)-3(x-2)=0,$$

$$(x-2)(4x-3)=0,$$

$$x-2=0 \text{ 或 } 4x-3=0,$$

$$\text{解得 } x_1=2, \quad x_2=\frac{3}{4};$$

$$\text{故答案为: } 2 \text{ 或 } \frac{3}{4}.$$

11. 已知 $a < 0$ ，化简： $\sqrt{a^2b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-a\sqrt{b}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的性质，根据二次函数的性质，进行化简即可.

【详解】 解： $\because a < 0$,

$$\therefore \sqrt{a^2b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = -a\sqrt{b};$$

$$\text{故答案为: } -a\sqrt{b}.$$

12. 如果关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + mx + 1 = 0$ 的两根为 1 和 $\frac{1}{2}$ ，那么多项式 $2x^2 + mx + 1$ 可分解为_____.

【答案】 $(2x-1)(x-1)$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解及因式分解，将 $x=1$ 代入原方程，求出 m 的值，然后再进行因式分解是解决问题的关键.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + mx + 1 = 0$ 有一个根是 1,

$$\therefore \text{把 } x=1 \text{ 代入, 得 } 2+m+1=0,$$

$$\text{解得: } m=-3.$$

$$\text{则 } 2x^2 + mx + 1 = 2x^2 - 3x + 1 = (2x-1)(x-1)$$

故答案为: $(2x-1)(x-1)$.

13. 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 3x + 5 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < \frac{9}{20}$ 且 $m \neq 0$

【解析】

【分析】 此题考查了根的判别式, 根据根的情况和一元二次方程的概念确定参数 m 的范围, 解题的关键是熟练掌握一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$, 当方程有两个不相等的实数根时, $\Delta > 0$; 当方程有两个相等的实数根时, $\Delta = 0$; 当方程没有实数根时, $\Delta < 0$.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 3x + 5 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (-3)^2 - 4m \times 5 = 9 - 20m > 0$$

$$\text{解得: } m < \frac{9}{20},$$

$$\therefore m \neq 0,$$

$$\therefore m \text{ 的取值范围是 } m < \frac{9}{20} \text{ 且 } m \neq 0,$$

$$\text{故答案为: } m < \frac{9}{20} \text{ 且 } m \neq 0.$$

14. 某商品购买价 100 元, 第一年使用后折旧 20%, 第二、三年折旧率相同. 在第三年末它折旧后的价值是 20 元, 求该商品第二、三年折旧率为_____.

【答案】 50%

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用, 找准等量关系, 正确列出一元二次方程是解题的关键. 设该商品第二、三年折旧率为 x , 根据在第三年末它折旧后的价值是 20 元, 列出一元二次方程, 解之取符合题意的值即可.

【详解】 解: 设该商品第二、三年折旧率为 x ,

$$\text{由题意得: } 100(1-20\%)(1-x)^2 = 20,$$

$$\text{整理得: } (1-x)^2 = 0.25,$$

$$\text{解得: } x_1 = 0.5 = 50\%, \quad x_2 = 1.5 \text{ (不合题意, 舍去).}$$

即该商品第二、三年折旧率为 50%.

故答案为: 50%.

15. 已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2 + x - 3 = 0$ ，设方程两个实数根分别为 x_1, x_2 ，且满足

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 = 4, \quad k = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的根与系数的关系，解题的关键是掌握如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ，则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ 。

由题意得所以 $x_1 + x_2 = -\frac{1}{k}$ ， $x_1 x_2 = -\frac{3}{k}$ ，代入 $(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 = 4$ 得到 $\left(-\frac{1}{k}\right)^2 - \frac{3}{k} = 4$ ，换元解方程，

然后利用根的判别式得出 $k \geq -\frac{1}{12}$ ，即可求解。

【详解】解：因为 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $kx^2 + x - 3 = 0$ 的两个实数根，

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = -\frac{1}{k}, \quad x_1 x_2 = -\frac{3}{k}.$$

$$\text{又因为 } (x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 = 4,$$

$$\text{所以 } \left(-\frac{1}{k}\right)^2 - \frac{3}{k} = 4,$$

$$\text{解得 } k_1 = \frac{1}{4}, \quad k_2 = -1,$$

经检验，两根都是原方程的解，且满足 $k \neq 0$ ，

所以 k 的值为 $\frac{1}{4}$ 或 -1 。

又 $\because$ 方程 $kx^2 + x - 3 = 0$ 有两个实数根，

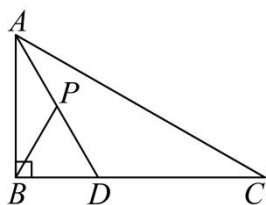
$$\therefore \Delta = 1^2 - 4k \times (-3) = 1 + 12k \geq 0,$$

$$\therefore k \geq -\frac{1}{12},$$

$\therefore$ 应舍去 $k = -1$ 。

故答案为： $\frac{1}{4}$ 。

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ，点 D 是 BC 边上的一点，点 P 是 AD 的中点，若 AC 的垂直平分线经过点 D ， $DC = 8$ ，则 $BP = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 4

【解析】

【分析】 本题主要考查了线段垂直平分线的性质，直角三角形的性质，先根据线段垂直平分线的性质得 $DA = DC = 8$ ，再根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半得出答案.

【详解】 $\because$ 点 D 在 AC 的垂直平分线上,

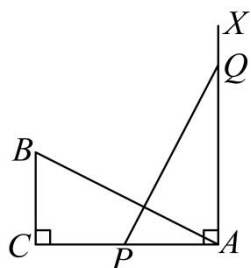
$$\therefore DA = DC = 8.$$

$\because \angle ABC = 90^\circ$, 点 P 是 AD 的中点,

$$\therefore BP = \frac{1}{2} AD = 4.$$

故答案为: 4.

17. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 12$, $BC = 6$, P , Q 两点分别在线段 AC 和 AC 的垂线 AX 上移动, 且 $PQ = AB$, 要使 $\triangle ABC$ 和 $\triangle APQ$ 全等, 则 AP 的长为_____.



【答案】 6 或 12 或 12 或 6

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定, 分情况讨论对应顶点的位置关系是解题的关键.

因为两个直角三角形已有一组斜边相等故分两种情况: $AP = BC$ 或 $AP = AC$ 即可得出.

【详解】 解: $\because PQ = AB$, $\angle C = \angle CAQ = 90^\circ$,

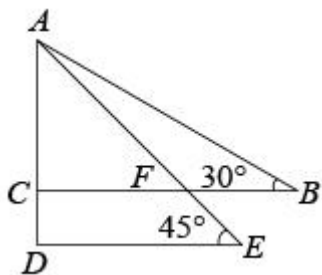
$\therefore$ 要使 $\triangle ABC$ 和 $\triangle APQ$ 全等, 分两种情况:

①当 $AP = BC = 6$ 时, $\triangle ABC \cong \triangle QPA (HL)$,

②当 $AP = AC = 12$ 时, $\triangle ABC \cong \triangle PQA (HL)$.

故答案为 6 或 12.

18. 将一副三角尺如图所示叠放在一起，点 A 、 C 、 D 在同一直线上， AE 与 BC 交于点 F ，若 $AB = 14\text{cm}$ ，则 $AF =$ _____ cm .



【答案】 $7\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 求出 $\angle AFC = \angle E = 45^\circ$ ，由直角三角形的性质求出 $AC = 7\text{cm}$ ，由勾股定理可得出答案.

【详解】 解：由题意知， $\angle ACB = \angle D = 90^\circ$ ，

$$\therefore CF \parallel DE,$$

$$\because \angle E = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AFC = \angle E = 45^\circ,$$

$$\therefore AC = CF,$$

$$\because AB = 14\text{cm}, \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore AC = \frac{1}{2} AB = 7\text{cm},$$

$$\therefore AF = \sqrt{AC^2 + CF^2} = 7\sqrt{2} \text{ (cm)}.$$

故答案为： $7\sqrt{2}$.

【点睛】 本题主要考查含 30° 直角三角形的性质及勾股定理，熟练掌握含 30° 直角三角形的性质及勾股定理是解题的关键.

19. 我们新定义一种三角形：两边的平方和等于第三边平方的 2 倍的三角形叫做“可爱三角形”. 若 $\text{Rt}\triangle ABC$ 是“可爱三角形”， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 2\sqrt{2}$ ，则 $AB =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题主要考查勾股定理，熟练掌握勾股定理是解题的关键；根据“可爱三角形”的定义，两边的平方和等于第三边平方的 2 倍，结合直角三角形勾股定理，列出方程求解即可.

【详解】 解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 2\sqrt{2}$ ，设 $BC = a$ ， $AB = c$ ，则根据勾股定理，有

$$AC^2 + BC^2 = AB^2, \text{ 即 } 8 + a^2 = c^2,$$

由“可爱三角形”的定义，需考虑三种情况：

①若 $AC^2 + BC^2 = 2AB^2$ ，但 $AC^2 + BC^2 = AB^2$ ，前后矛盾，故不成立；

②若 $AC^2 + AB^2 = 2BC^2$ ，即 $8 + c^2 = 2a^2$ ，则 $c^2 = 2a^2 - 8$ 代入 $8 + a^2 = c^2$ ，

得 $8 + a^2 = 2a^2 - 8$ ，整理得 $a^2 = 16$ ，

解得 $a = 4$ （负根舍去），则 $c^2 = 8 + 16 = 24$ ，

$\therefore c = 2\sqrt{6}$ （负根舍去），即 $AB = 2\sqrt{6}$ ；

③若 $BC^2 + AB^2 = 2AC^2$ ，即 $a^2 + c^2 = 2 \times 8 = 16$ ，则 $c^2 = 16 - a^2$ 代入 $8 + a^2 = c^2$ ，

得 $8 + a^2 = 16 - a^2$ ，整理得 $2a^2 = 8$ ，

解得 $a^2 = 4$ ，则 $c^2 = 8 + 4 = 12$ ，

$\therefore c = 2\sqrt{3}$ （负根舍去）， $AB = 2\sqrt{3}$ ；

综上所述： $AB = 2\sqrt{6}$ 或 $AB = 2\sqrt{3}$ ；

故答案为： $2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{6}$ 。

20. 我们规定：如果一个三角形一边上的高等于这条边，那么这个三角形叫做“等高底”三角形，这条边叫做这个三角形的“等底”。如图，已知直线 $l_1 \parallel l_2$ ， l_1 与 l_2 之间的距离是 3，“等高底” $\triangle ABC$ 的“等底” BC 在直线 l_1 上（点 B 在点 C 的左侧），点 A 在直线 l_2 上， $AB = \sqrt{2}BC$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 45° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$ ，点 A 、 C 的对应点分别为点 A_1 、 C_1 ，那么 A_1C 的长为_____。

_____ l_2

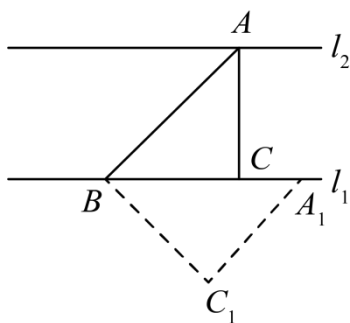
_____ l_1

【答案】 $3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{2} - 3$

【解析】

【分析】 根据题意分情况画出相应图，然后根据旋转性质找到线段对应关系求解即可。

【详解】 解：当如下图所示时，



$$BC = 3, \quad AB = \sqrt{2}BC = 3\sqrt{2},$$

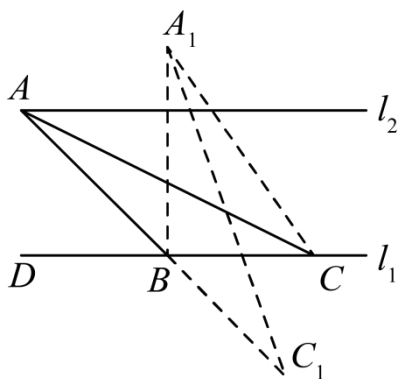
$\because$ 点 A 到直线 l_1 的距离为 3,

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ,$$

将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 45° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$,

$$A_1C = A_1B - BC = 3\sqrt{2} - 3;$$

当如下图所示时,



$$BC = 3, \quad AB = \sqrt{2}BC = 3\sqrt{2},$$

$\because$ 点 A 到直线 l_1 的距离为 3,

$$\therefore \angle ABD = 45^\circ, \quad \angle ABC = 135^\circ,$$

将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 45° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle ABA_1 = 45^\circ$, $A_1B = AB = 3\sqrt{2}$,

$$\therefore \angle A_1BC = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle A_1BC \text{ 中, } A_1C = \sqrt{A_1B^2 + BC^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 3^2} = 3\sqrt{3},$$

故答案为: $3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{2} - 3$.

【点睛】 本题考查了旋转性质、勾股定理、二次根式的运算等知识, 分情况讨论并画出相应图像是解题关键.

三、计算题 (本大题共 6 题, 每题 5 分, 共 30 分)

21. 计算: $(\sqrt{12} - \sqrt{24}) \div \sqrt{3} - \frac{2}{2 + \sqrt{2}}.$

【答案】 $-\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的混合运算, 熟练掌握二次根式的运算是解题的关键; 因此此题可根据二次根式的运算进行求解即可.

【详解】 解: 原式 $= (2\sqrt{3} - 2\sqrt{6}) \div \sqrt{3} - \frac{2(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}$

$$= 2 - 2\sqrt{2} - \frac{2(2 - \sqrt{2})}{2}$$
$$= 2 - 2\sqrt{2} - 2 + \sqrt{2}$$
$$= -\sqrt{2}.$$

22. 计算: $\frac{a}{b}\sqrt{ab} \cdot \sqrt{a^3b} \div 3\sqrt{\frac{a}{b}} (a > 0, b > 0)$

【答案】 $\frac{a^2\sqrt{ab}}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式乘除法, 根据二次根式乘除法运算法则进行计算即可.

【详解】 解: $\frac{a}{b}\sqrt{ab} \cdot \sqrt{a^3b} \div 3\sqrt{\frac{a}{b}} (a > 0, b > 0)$

$$= \frac{a}{b}\sqrt{ab} \cdot \sqrt{a^3b} \div 3\sqrt{\frac{a}{b}}$$
$$= \frac{a}{b} \cdot \sqrt{ab} \cdot \sqrt{a^3b} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$$
$$= \frac{a}{b} \cdot \sqrt{ab} \cdot \sqrt{a^3b} \times \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{b}{a}}$$
$$= \frac{a}{b} \times \frac{1}{3} \times ab\sqrt{ab}$$

$$= \frac{a^2 \sqrt{ab}}{3}.$$

23. 解方程: $(2x-1)^2 + (1-2x) = 2$.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程的解法, 熟练掌握一元二次方程的解法是解题的关键; 因此此题可把 $(2x-1)$ 看作一个整体, 然后利用因式分解法可进行求解.

【详解】 解: $(2x-1)^2 + (1-2x) = 2$

$$(2x-1)^2 - (2x-1) - 2 = 0$$

$$(2x-1+1)(2x-1-2) = 0$$

$$2x = 0 \text{ 或 } 2x-3 = 0$$

$$\therefore x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2}.$$

24. 解方程: $2x^2 - 4x - 1 = 0$.

【答案】 $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程的解法, 熟练掌握一元二次方程的解法是解题的关键; 因此此题可根据公式法求解方程.

【详解】 解: $2x^2 - 4x - 1 = 0$,

$$\therefore a = 2, b = -4, c = -1,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 2 \times (-1) = 24 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

25. 解方程: $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} = -\frac{8}{x^2-4}$.

【答案】 $x = -4$ 或 $x = -\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查分式方程的解法，熟练掌握分式方程的解法是解题的关键；因此此题可根据分式方程的解法进行求解即可.

【详解】 解: $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} = -\frac{8}{x^2-4}$

去分母得: $x^2-4+2(x+1)(x+2)=-8(x+1)$,

去括号得: $x^2-4+2x^2+6x+4=-8x-8$,

移项、合并同类项得: $3x^2+14x+8=0$,

解得: $x=-4$ 或 $x=-\frac{2}{3}$,

经检验: 当 $x=-4$ 或 $x=-\frac{2}{3}$ 时, $(x+1)(x+2)(x-2) \neq 0$,

$\therefore$ 该方程的解为 $x=-4$ 或 $x=-\frac{2}{3}$.

26. 解方程: $\frac{2x}{x+3} - \frac{18}{x^2+3x} = 1$.

【答案】 $x = 6$

【解析】

【分析】 本题考查解分式方程, 解一元二次方程, 掌握分式方程和一元二次方程的解法和步骤是解题关键. 将原分式方程化为整式方程, 再根据因式分解法解一元二次方程, 最后检验即可.

【详解】 解: $\frac{2x}{x+3} - \frac{18}{x^2+3x} = 1$,

$2x^2-18=x^2+3x$,

$x^2-3x-18=0$,

$(x+3)(x-6)=0$,

$x_1=-3, x_2=6$.

经检验: $x_1=-3$ 是原方程的增根, 舍去; $x_2=6$ 是原方程的解

所以原方程的解是 $x=6$.

四、解答题 (本题共 4 题, 共 30 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

27. 今年新型“和谐号”高速列车正式投入沪宁线运行, 已知上海到南京全程约为 300 公里, 如果新型“和谐号”高速列车行驶的平均速度比原来“和谐号”动车行驶的平均速度每分钟快 2 公里, 那么从上海到南

京比原来“和谐号”动车少用 40 分钟，问新型“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要多少分钟？

【答案】60 分钟

【解析】

【分析】本题主要考查了分式方程的实际应用，设新型“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要 x 分钟，根据已知上海到南京全程约 300 公里，如果新型“和谐号”高速列车行驶的平均速度比原来的“和谐号”动车行驶的平均速度每分钟快 2 公里，那么从上海到南京比原来“和谐号”动车少用 40 分钟，可列方程求解.

【详解】解：设新型“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要 x 分钟，则原来“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要 $(x+40)$ 分钟，

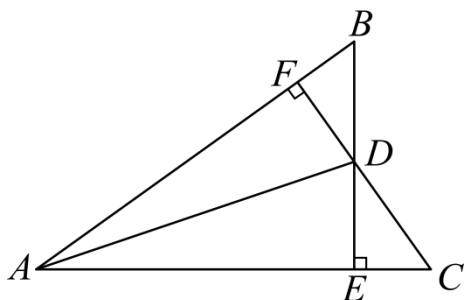
由题意得， $\frac{300}{x} - \frac{300}{x+40} = 2$,

解得 $x = 60$ 或 $x = -100$ (舍去)，

经检验， $x = 60$ 是原方程的解，且符合题意，

答：新型“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要 60 分钟.

28. 已知 $BE \perp AC$ 于 E ， $CF \perp AB$ 于 F ， BE 、 CF 相交于点 D ，若 $BD = CD$. 求证： AD 平分 $\angle BAC$.



【答案】证明见解析

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定和性质，以及到角两边距离相等的点在角平分线上等知识. 发现并利用 $\triangle FBD \cong \triangle ECD$ 是正确解答本题的关键.

先由垂直的定义得到 $\angle DFB = \angle DEC = 90^\circ$ ，再证明 $\triangle FBD \cong \triangle ECD$ (AAS) 得到 $DF = DE$ ，最后根据角平分线的判定即可证明结论.

【详解】证明： $\because BE \perp AC$ ， $CF \perp AB$ ，

$\therefore \angle DFB = \angle DEC = 90^\circ$ ，

又 $\because \angle FDB = \angle EDC$ ， $BD = CD$ ，

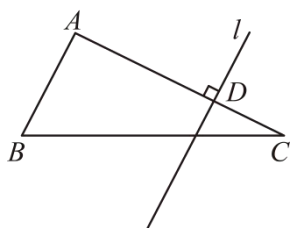
$\therefore \triangle FBD \cong \triangle ECD$ (AAS)，

$$\therefore DF = DE,$$

$$\text{又} \because BE \perp AC, CF \perp AB,$$

$$\therefore AD \text{ 平分 } \angle BAC.$$

29. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = \sqrt{5}AB$, 直线 $l \perp AC$, 垂足为点 D .



(1) 如果点 E 在直线 l 上, 且点 E 到 $\angle BAC$ 两边的距离相等, 试用直尺和圆规作出满足上述条件的点 E (不写作法, 仅保留作图痕迹, 在图中清楚地标注出点 E);

(2) 在第 (1) 题的条件下, 连接 BE 和 CE , 如果 $\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACE}} = \frac{1}{2}$, 请判断 $\triangle ABC$ 的形状, 并说明理由.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\triangle ABC$ 为直角三角形. 理由见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了角平分线的性质, 尺规作图, 勾股定理, 解题的关键是掌握角平分线的性质.

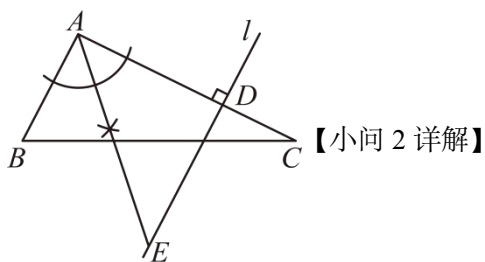
(1) 根据角平分线的性质, 尺规作 $\angle BAC$ 的平分线, 与直线 l 交于点 E ;

(2) 过点 E 作 $EM \perp AB$ 于 M , 根据角平分线性质得出 $EM = ED$, 根据三角形面积公式求出 $AC = 2AB$,

结合 $BC = \sqrt{5}AB$, 可得 $BC^2 = AB^2 + AC^2$, 即可解答.

【小问 1 详解】

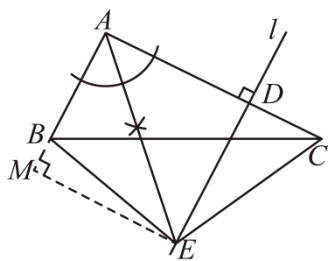
解: 如图, 点 E 即为所求,



【小问 2 详解】

$\triangle ABC$ 为直角三角形,

理由如下: 过点 E 作 $EM \perp AB$ 于 M .



$\because AE$ 平分 $\angle BAC$, $ED \perp AC$, $EM \perp AB$,

$\therefore EM = ED$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACE}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot EM}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot ED} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AC = 2AB,$$

$$\therefore AC^2 = 4AB^2,$$

$$\because BC = \sqrt{5}AB,$$

$$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

30. 综合与实践

【问题情境】

数学综合与实践活动课上,老师提出如下问题:如图 1 是一个三级台阶,它的每一级的长、宽、高分别为 20dm, 3dm, 2dm, A 和 B 是这个三级台阶两个相对的端点,若 A 点有一只蚂蚁,想到 B 点去吃可口的食物,则蚂蚁沿着台阶面爬行到 B 点的最短路程是多少?

(1) 同学们经过思考得到如下解题方法:如图 2,将三级台阶展开成平面图形,连接 AB ,经过计算得到 AB 长度即为最短路程,则 $AB = \underline{\hspace{2cm}} \text{ dm}$.

【变式探究】

(2) 如图 3,一个圆柱形玻璃杯,若该玻璃杯的底面周长是 48 厘米,高是 7 厘米,一只蚂蚁从点 A 出发沿着玻璃杯的侧面到与点 A 相对的点 B 处,则该蚂蚁爬行的最短路程是多少厘米?

【拓展应用】

(3) 如图 4,圆柱形玻璃杯高为 14cm,底面周长为 32cm,在杯内壁离杯底 5cm 的点 B 处有一滴蜂蜜,此

时一只蚂蚁正好在杯外壁，离杯上沿3cm与蜂蜜相对的点A处，则蚂蚁从外壁A处到内壁B处的最短路程是多少厘米？（杯壁厚度不计）

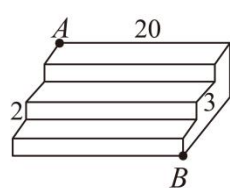


图1

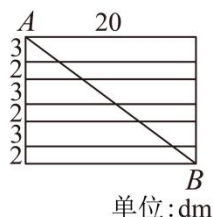


图2



图3

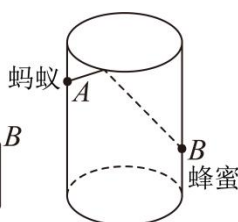


图4

【答案】(1) 25; (2) 该蚂蚁爬行的最短路程 25 厘米; (3) 蚂蚁从外壁 A 处到内壁 B 处的最短路程为 20cm .

【解析】

【分析】本题考查了平面展开——最短路径问题，勾股定理，轴对称的性质，将图形展开，利用轴对称的性质和勾股定理进行计算是解题的关键.

(1) 先将图形平面展开，再用勾股定理根据两点之间线段最短进行解答；

(2) 将圆柱体展开，利用勾股定理求解即可；

(3) 将杯平面展开，作 B 点纵向的对称点 C，A 点与对称点 C 的连线，即为蚂蚁从外壁 A 处到内壁 B 处的最短路程，再根据勾股定理计算长度即可.

【详解】解：(1) 三级台阶平面展开图为长方形，长为 20dm，宽为 $(2+3) \times 3$ dm，则蚂蚁沿台阶面爬行到 B 点最短路程是此长方形的对角线长.

可设蚂蚁沿台阶面爬行到 B 点最短路程为 x dm，

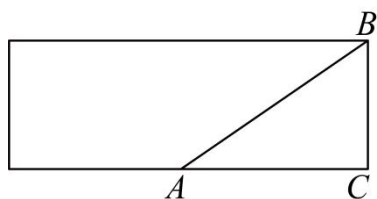
由勾股定理得： $x^2 = 20^2 + [(2+3) \times 3]^2 = 25^2$ ，

解得： $x = 25$.

答：蚂蚁沿着台阶面爬到 B 点的最短路程是 25dm .

故答案为： 25；

(2) 将圆柱体侧面展开，如图：

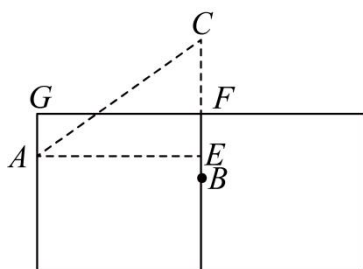


由题意得： $AC = \frac{1}{2} \times 48 = 24(\text{cm})$ ， $BC = 7\text{cm}$ ，

$\therefore AB = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25(\text{cm})$ ，

∴ 该蚂蚁爬行的最短路程 25 厘米;

(3) 如图, 将杯平面展开, 作 B 点纵向的对称点 C ,
连接 AC , AC 即为蚂蚁从外壁 A 处到内壁 B 处的最短路程,



$$EF = AG = 3\text{cm}, \quad CF = FB = (14 - 5)\text{cm} = 9\text{cm}, \quad AE = \frac{1}{2} \times 32\text{cm} = 16\text{cm}, \quad CE = EF + CF = 12\text{cm},$$

根据勾股定理有:

$$AC = \sqrt{AE^2 + CE^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20(\text{cm}),$$

∴ 蚂蚁从外壁 A 处到内壁 B 处的最短路程为 20cm .