

2025-2026 学年八年级数学上学期第三次月考模拟卷

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 测试范围: 沪教版(五四制)(2024)第19章 实数, 第20章 二次根式, 第21章 一元二次方程。

第一部分 (选择题 共 18 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分。在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的)

1. (本题 3 分) 下列各式, 正确的是 ()

A. $\sqrt{4} = \pm 2$ B. $\sqrt[3]{-27} = -3$ C. $\pm\sqrt{16} = 4$ D. $\sqrt{(-3)^2} = -3$

【答案】B

【分析】本题考查了算术平方根的定义, 以及立方根的定义, 根据算术平方根的定义和立方根的定义逐项分析即可。

【详解】A. $\sqrt{4} = 2$, 故该选项不正确, 不符合题意;

B. $\sqrt[3]{-27} = -3$, 故该选项正确, 符合题意;

C. $\pm\sqrt{16} = \pm 4$, 故该选项不正确, 不符合题意;

D. $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{3^2} = 3$, 故该选项不正确, 不符合题意;;

故选: B.

2. (本题 3 分) 下列实数中, 是无理数的是 ()

A. 3.14 B. $\frac{1}{3}$ C. $-\sqrt{3}$ D. $\sqrt{9}$

【答案】C

【分析】根据无理数的定义即可得出答案。

【详解】根据无理数的定义可知，A、B、D均为有理数，C为无理数，故答案选择C.

【点睛】本题主要考查的是无理数的定义：无限不循环小数.

3. (本题3分) 已知 a, b 为实数，且 $b = \sqrt{a-8} - \sqrt{8-a} + 25$ ，则 $\sqrt[3]{a} + \sqrt{b}$ 的值为 ()

- A. -3 B. 7 C. -3或7 D. 9

【答案】B

【分析】本题主要考查了二次根式有意义的条件，求一个数的立方根和算术平方根，解题的关键是熟练掌握二次根式有意义的条件即被开方数非负.

根据二次根式的被开方数非负得到不等式组 $\begin{cases} a-8 \geq 0 \\ 8-a \geq 0 \end{cases}$ ，然后求出 a, b ，再代入 $\sqrt[3]{a} + \sqrt{b}$ 求解即可.

【详解】解： $\because b = \sqrt{a-8} - \sqrt{8-a} + 25$,

$$\therefore \begin{cases} a-8 \geq 0 \\ 8-a \geq 0 \end{cases},$$

$$\therefore a = 8, \quad b = 25,$$

$$\therefore \sqrt[3]{a} + \sqrt{b} = \sqrt[3]{8} + \sqrt{25} = 2 + 5 = 7,$$

故选：B.

4. (本题3分) 如果 $\frac{\sqrt{a^2}}{a} = -1$ ，那么 a 一定是 ()

- A. 负数 B. 正数 C. 正数或零 D. 负数或零

【答案】A

【详解】解：如果 $\frac{\sqrt{a^2}}{a} = -1$ ，那么 $\sqrt{a^2} = -a$ ，且 $a \neq 0$ ，所以 a 一定是负数. 故选A.

5. (本题3分) 如果关于 x 的方程 $k^2x^2 - (2k+1)x + 1 = 0$ 有实数根，那么 k 的取值范围是 ()

- A. $k \geq -\frac{1}{4}$ B. $k > -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$ C. $k < -\frac{1}{4}$ D. $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$

【答案】A

【分析】本题考查了一元一次方程的定义，一元二次方程的定义，一元二次方程根的判别式. 熟练掌握一元一次方程的定义，一元二次方程的定义，一元二次方程根的判别式是解题的关键.

由题意知，分方程是一元一次方程，一元二次方程两种情况求解作答即可.

【详解】解：当方程 $k^2x^2 - (2k+1)x + 1 = 0$ 是一元一次方程，且有实数根时， $k = 0$,

$$\therefore -x + 1 = 0,$$

解得， $x = 1$;

当方程 $k^2x^2 - (2k+1)x + 1 = 0$ 是一元二次方程时，且有实数根时，

$$\therefore k^2 \neq 0, \Delta = [-(2k+1)]^2 - 4k^2 \geq 0,$$

$$\text{解得, } k \geq -\frac{1}{4} \text{ 且 } k \neq 0;$$

$$\text{综上所述, } k \geq -\frac{1}{4};$$

故选：A.

6. (本题 3 分) 已知 a, b, c 满足 $a+b+c=0, 4a+2b+c=0$ ，则关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的解的情况为 ()

A. $x_1=1, x_2=2$

B. $x_1=-1, x_2=-2$

C. 方程的解与 a, b 的取值有关

D. 方程的解与 a, b, c 的取值有关

【答案】A

【分析】根据已知条件求出 a, b, c 之间的关系，代入方程即可解答. 本题考查了一元二次方程的概念及利用因式分解法解一元二次方程，理解一元二次方程的概念是解题的关键.

【详解】解： $\because a+b+c=0, 4a+2b+c=0,$

$$\therefore a+c=-b \text{ ①, } 4a+c=-2b \text{ ②,}$$

$$\therefore \text{②}-\text{①} \text{ 得 } b=-3a,$$

将 $b=-3a$ 代入 $a+b+c=0$ 得： $a-3a+c=0,$

$$\therefore c=2a,$$

将 $b=-3a, c=2a$ 代入 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 得： $a(x^2-3x+2)=0,$

$$\because a \neq 0,$$

$$\therefore x^2-3x+2=0,$$

$$\therefore (x-1)(x-2)=0,$$

解得 $x_1=1, x_2=2,$

故选 A.

第二部分 (非选择题 共 82 分)

二、填空题 (本大题共 12 小题，每小题 2 分，满分 24 分)

7. (本题 2 分) 17 的两个平方根的积是_____.

【答案】 -17

【分析】 本题考查求一个数的平方根，二次根式的乘法运算. 先根据平方根的定义求出两个平方根，再相乘即可.

【详解】 解：17 的两个平方根为 $\sqrt{17}$ 和 $-\sqrt{17}$ ，

积为： $\sqrt{17} \times (-\sqrt{17}) = -(\sqrt{17})^2 = -17$ ，

故答案为： -17 .

8. (本题 2 分) $\sqrt{64}$ 的立方根是_____.

【答案】 2

【分析】 该题考查了算术平方根和立方根，先计算 $\sqrt{64}$ ，再求立方根即可解答.

【详解】 解： $\sqrt{64} = 8$ ，8 的立方根是 2，

故答案为：2.

9. (本题 2 分) $4 - \sqrt{17}$ 的绝对值为_____.

【答案】 $\sqrt{17} - 4$

【分析】 根据绝对值的性质进行解答即可.

【详解】 解： $\because 4 - \sqrt{17} < 0$ ，

$\therefore |4 - \sqrt{17}| = \sqrt{17} - 4$.

故答案为： $\sqrt{17} - 4$.

【点睛】 本题考查的是实数的性质，熟知负数的绝对值是它的相反数是解题的关键.

10. (本题 2 分) 比较大小 $\sqrt[3]{9}$ _____ $\sqrt{3}$. (填“>”“<”或“=”)

【答案】 >

【分析】 把它们都进行 6 次方再进行比较即可判断.

【详解】 $\because \sqrt[3]{9} > 0$ ， $\sqrt{3} > 0$ ，

$\therefore (\sqrt[3]{9})^6 = 81$ ， $(\sqrt{3})^6 = 27$

$\therefore \sqrt[3]{9} > \sqrt{3}$

【点睛】 此题主要考查无理数的大小比较，解题的关键是熟知实数的性质.

11. (本题 2 分) 不等式 $\sqrt{3}x - 1 \geq 2x$ 的解集是_____.

【答案】 $x \leq -2 - \sqrt{3}$

【分析】 本题主要考查了解一元一次不等式，分母有理化，按照移项，合并同类项，系数化为 1 的步骤解不等式，再分母有理化即可得到答案.

【详解】 解： $\sqrt{3}x - 1 \geq 2x$

移项得： $\sqrt{3}x - 2x \geq 1$,

合并同类项得： $(\sqrt{3} - 2)x \geq 1$,

系数化为 1 得： $x \leq \frac{1}{\sqrt{3} - 2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(\sqrt{3} - 2)(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{3 - 4} = -2 - \sqrt{3}$,

故答案为： $x \leq -2 - \sqrt{3}$.

12. (本题 2 分) 数据 0.00000258 用科学记数法表示为_____.

【答案】 2.58×10^{-6}

【分析】 本题考查科学记数法，掌握相关知识是解决问题的关键. 绝对值小于 1 的数可以用科学记数法表示为 $a \times 10^{-n}$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为正整数.

【详解】 解： $0.00000258 = 2.58 \times 10^{-6}$,

故答案为： 2.58×10^{-6} .

13. (本题 2 分) 已知 $\sqrt{2.9} \approx 1.703$ ， $\sqrt{0.29} \approx 0.539$ 那么 $\sqrt{290} \approx$ _____.

【答案】 17.03

【分析】 根据被开方数扩大到原来的 100 倍，算术平方根就扩大到原来的 10 倍即可求解.

【详解】 解： $\because \sqrt{2.9} \approx 1.703$,

$\therefore \sqrt{290} = \sqrt{2.9 \times 100} = 10\sqrt{2.9} \approx 17.03$.

故答案为： 17.03.

【点睛】 本题考查了算术平方根，熟练掌握算术平方根性质是解答本题的关键.

14. (本题 2 分) 已知 n 是正整数，且 $\sqrt{756n}$ 是整数，则 $\sqrt{756n}$ 的最小值为_____.

【答案】 126

【分析】 本题考查了算术平方根的应用，解题的关键是掌握完全平方数的特征.

首先把被开方数分解质因数，然后再确定 n 的值，最后计算平方根.

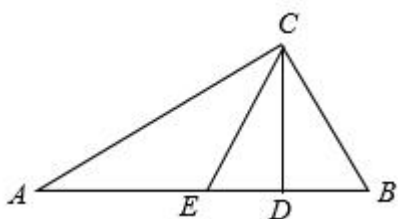
【详解】解： $\sqrt{756n} = \sqrt{6^2 \times 21n} = 6\sqrt{21n}$ ，

$\because \sqrt{756n}$ 是整数，

$\therefore$ 正整数 n 的最小值是 21， $\sqrt{756n} = 6\sqrt{21 \times 21} = 126$.

故答案为： 126.

15. (本题 2 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$, 垂足为点 D , CE 是 AB 边上的中线, 若 $\angle B = 55^\circ$, 则 $\angle ECD$ 的度数为_____.



【答案】 20°

【分析】 本题可利用直角三角形斜边中线等于斜边的一半求证边等，并结合直角互余性质求解对应角度解题即可.

【详解】 $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， CE 是 AB 边上的中线，

$\therefore EA = EC = EB$ ，

又 $\because \angle B = 55^\circ$ ，

$\therefore \angle ACE = \angle A = 35^\circ$ ，

$\because CD \perp AB$ ，

$\therefore \angle DCB = 35^\circ$.

故 $\angle ECD = \angle ACB - \angle ACE - \angle DCB = 90^\circ - 35^\circ - 35^\circ = 20^\circ$.

故填： 20° .

【点睛】 本题考查直角三角形性质，考查“斜中半”定理，角度关系则主要通过直角互余性质求解即可.

16. (本题 2 分) 一个等腰三角形的一腰上的高与另一腰的夹角为 40° ，则它的顶角为_____.

【答案】 130° 或 50°

【分析】 本题考查了直角三角形的性质，等腰三角形的分类讨论问题，解题的关键是能够画出图形，根据数形结合的思想求出答案. 根据题意可知等腰三角形需要分类讨论，分为锐角三角形和钝角三角形，画出图形解答即可.

【详解】解：①如图1所示，当等腰三角形是锐角三角形时，根据题意， $\angle ABM = 40^\circ$ ，

又 $\because BM$ 是 AC 边上的高,

$$\therefore \angle AMB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ,$$

②如图 2, 当等腰三角形是钝角三角形时, 根据题意, $\angle DEN = 40^\circ$,

$\because EN$ 是 DF 边上的高

$$\therefore \angle N = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDN = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle EDF = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

故顶角为: 130° 或 50° .

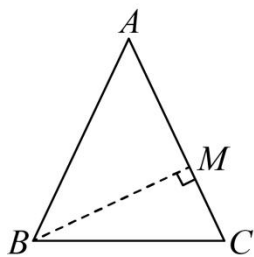


图 1

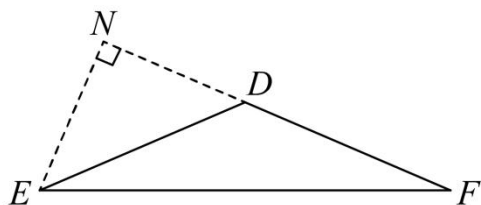


图 2

17. (本题 2 分) 已知 a 和 β 是一元二次方程 $x^2 - 4x - 1 = 0$ 的两个根, 则 $a^2 + 4\beta - 1$ 的值为_____.

【答案】 16

【分析】 根据题意, 利用根与系数关系, 变形计算解答即可.

本题考查了根与系数关系, 求代数式的值, 掌握解答的方法是解题的关键.

【详解】 解: $\because a$ 和 β 是一元二次方程 $x^2 - 4x - 1 = 0$ 的两个根,

$$\therefore a + \beta = 4, a\beta = -1, a^2 - 4a - 1 = 0,$$

$$\therefore a^2 - 1 = 4a,$$

$$\therefore a^2 + 4\beta - 1 = 4a + 4\beta = 4(a + \beta) = 16,$$

故答案为: 16.

18. (本题 2 分) “两个一元二次方程有且只有一个公共根, 这两个方程叫做互为好友方程, 这两个公共根叫做好友根.” 例如 $x^2 - x - 2 = 0$ 和 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 就是互为好友方程, 好友根为 $x = -1$. 如果 $x^2 - 1 = 0$ 和 $ax^2 - x - 2 = 0$ 就是互为好友方程, 那么 $a =$ _____.

【答案】 1 或 3

【分析】 本题考查了一元二次方程的解及解一元二次方程, 正确理解“互为好友方程”的定义是解题关键.

先解出 $x^2 - 1 = 0$, 然后分为 $x = -1$ 和 $x = 1$ 两种情况, 再代入计算即可.

【详解】解： $\because x^2 - 1 = 0$,

$$\therefore x = \pm 1,$$

当好友根为 $x = -1$ 时, 则 $a + 1 - 2 = 0$,

$$\text{即 } a = 1;$$

当好友根为 $x = 1$ 时, 则 $a - 1 - 2 = 0$,

$$\text{即 } a = 3;$$

故答案为: 1 或 3.

三、解答题 (共 58 分)

19. (本题 5 分) 计算: $-3\sqrt{7} + \frac{1}{2}\sqrt{7} - \frac{3}{4}\sqrt{7}$.

【答案】 $-\frac{13}{4}\sqrt{7}$

【分析】 本题考查了实数的混合运算, 根据实数的运算法则进行计算即可求解.

【详解】 $-3\sqrt{7} + \frac{1}{2}\sqrt{7} - \frac{3}{4}\sqrt{7}$
 $= \left(-3 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)\sqrt{7}$
 $= -\frac{13}{4}\sqrt{7}$

20. (本题 5 分) 计算: $\frac{2}{b}\sqrt{ab^2} \times \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div 3\sqrt{\frac{b}{a}}$

【答案】 $-a^2\sqrt{a}$

【分析】 本题考查了二次根式的乘除混合运算, 根号里面和外面分别计算, 最后再化简二次根式即可求解.

【详解】 解: 由题意可得 $ab^2 \geq 0$, $a^3b \geq 0$, $\frac{b}{a} \geq 0$,

$$\therefore a > 0, \quad b > 0,$$

$$\begin{aligned} &\therefore \frac{2}{b}\sqrt{ab^2} \times \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div 3\sqrt{\frac{b}{a}} \\ &= \left[\frac{2}{b} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \div 3\right] \sqrt{ab^2 \times a^3b \div \frac{b}{a}} \\ &= -\frac{1}{b}\sqrt{a^5b^2} \\ &= -\frac{1}{b}\sqrt{a \cdot a^4b^2} \\ &= -\frac{1}{b} \cdot a^2b\sqrt{a} \end{aligned}$$

$$=-a^2\sqrt{a}.$$

21. (本题 5 分) 用配方法解方程: $2x^2 - 5x - 4 = 0$.

【答案】 $x_1 = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{57}}{4}, x_2 = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{57}}{4}.$

【分析】 本题考查了用配方法解方程. 首先移项, 把常数项移到等号的右边, 再将二次项系数化为 1, 然后在方程的左右两边同时加上一次项系数一半的平方, 即可使左边变形为完全平方, 右边是常数, 直接开方即可求解.

【详解】 解: 移项得 $2x^2 - 5x = 4$,

一次项系数化为 1 得: $x^2 - \frac{5}{2}x = 2$,

配方得: $x^2 - \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 2 + \frac{25}{16}$, 即 $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{57}{16}$,

开方得: $x - \frac{5}{4} = \pm \frac{\sqrt{57}}{4}$,

解得: $x_1 = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{57}}{4}, x_2 = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{57}}{4}.$

22. (本题 5 分) 解方程: $2x^2 - 1 = x(x + 3)$.

【答案】 $x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.$

【分析】 本题考查解一元二次方程, 熟练掌握一元二次方程的解法是解题的关键, 先将所给的一元二次方程整理后, 分别找到二次项系数、一次项系数、常数项, 利用一元二次方程的求根公式计算即可.

【详解】 解: 方程整理得: $x^2 - 3x - 1 = 0$,

则 $a = 1, b = -3, c = -1$,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 4 = 13 > 0$,

$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2},$

解得: $x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.$

23. (本题 5 分) 已知 $y = \sqrt{x - \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - x} + 8$, 求 $\frac{x - 4y}{\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} - \frac{x + y + 2\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \div \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$ 的值.

【答案】 $\frac{9\sqrt{2}}{2} - 2$

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件, 求代数式的值, 根据二次根式有意义的条件求出 $x = \frac{1}{2}$, 从而得出 $y = 8$, 将所求式子进行化简, 最后代入 x, y 的值计算即可得解, 熟练掌握运算法则是解此题的关键.

【详解】解： $\because x - \frac{1}{2} \geq 0, \frac{1}{2} - x \geq 0,$

$$\therefore x = \frac{1}{2},$$

$$\therefore y = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} + 8 = 8,$$

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{x-4y}{\sqrt{x}-2\sqrt{y}} - \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \div \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \\ &= \frac{(\sqrt{x}+2\sqrt{y})(\sqrt{x}-2\sqrt{y})}{\sqrt{x}-2\sqrt{y}} \cdot \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \div \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}} \\ &= \sqrt{x}+2\sqrt{y}-\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}}+2\sqrt{8}-\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{8} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}+4\sqrt{2}-2 \\ &= \frac{9\sqrt{2}}{2}-2. \end{aligned}$$

24. (本题 5 分) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (m+2)x + m - 1 = 0$.

(1) 求证: 无论 m 取何值, 方程都有两个不相等的实数根;

(2) 如果方程的两个实数根为 x_1, x_2 , 且 $x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2 = 13$, 求 m 的值.

【答案】(1) 证明见解析;

(2) $m_1 = 2$ 或 $m_2 = -3$.

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式, 根与系数的关系, 解一元二次方程, 掌握一元二次方程根的判别式是解题的关键.

(1) 根据根的判别式证明 $\Delta > 0$ 恒成立即可;

(2) 由题意可得, $x_1 + x_2 = m + 2$, $x_1 \cdot x_2 = m - 1$, 进行变形后代入即可求解.

【详解】(1) 证明: $\Delta = [-(m+2)]^2 - 4 \times 1 \times (m-1) = m^2 + 8,$

$\therefore$ 无论 m 取何值, $m^2 + 8 > 0$, 恒成立,

$\therefore$ 无论 m 取何值, 方程都有两个不相等的实数根.

(2) 解: $\because x_1, x_2$ 是方程 $x^2 - (m+2)x + m - 1 = 0$ 的两个实数根,

$$\therefore x_1 + x_2 = m + 2, \quad x_1 \cdot x_2 = m - 1,$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = (m+2)^2 - 3(m-1) = 13,$$

解得： $m_1 = 2$ 或 $m_2 = -3$.

25. (本题 6 分) 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长, 满足 $a^2 + b^2 = 10a + 8b - 41$, 且 c 是 $\triangle ABC$ 中最长的边, 求 c 的取值范围.

【答案】 $5 < c < 9$

【分析】 由 $a^2 + b^2 = 10a + 8b - 41$, 得 a, b 的值, 然后利用三角形的三边关系求得 c 的取值范围即可.

【详解】 解: $\because$ 满足 $a^2 + b^2 = 10a + 8b - 41$,

$$\therefore a^2 - 10a + 25 + b^2 - 8b + 16 = 0,$$

$$\therefore (a-5)^2 + (b-4)^2 = 0,$$

$$\therefore (a-5)^2 \geq 0, (b-4)^2 \geq 0,$$

$$\therefore a-5=0, b-4=0,$$

$$\therefore a=5, b=4;$$

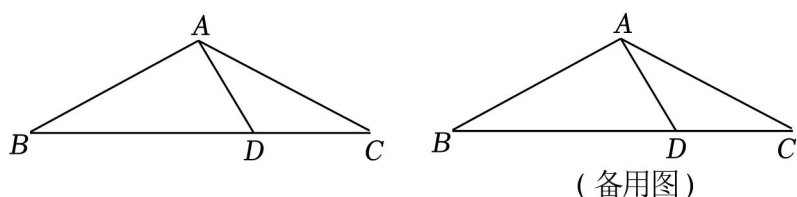
$$\therefore 5-4 < c < 5+4,$$

$$\therefore c \text{ 是最长边,}$$

$$\therefore 5 < c < 9.$$

【点睛】 考查了配方法的应用、非负数的性质及三角形的三边关系, 解题的关键是对方程的左边进行配方, 难度不大.

26. (本题 7 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D 在 BC 边上, $\angle DAB = 90^\circ$.



(1) 当 $\angle C = 30^\circ$, 求证: $BD = 2CD$;

(2) 当 $BD = 2CD$ 时, $\angle C$ 是否一定为 30° , 如果一定, 给出证明; 如果不一定, 请说明理由.

【答案】 (1) 见解析;

(2) 一定, 见解析

【分析】 本题考查了含 30° 角的直角三角形, 等腰三角形的性质的应用, 熟练掌握含 30° 角的直角三角形的性质是解题的关键.

(1) 由条件得到直角三角形中, 30° 角所对的直角边是斜边的一半, 再利用等腰三角形的性质, 等角对等边, 从而证得结果;

(2) 通过作辅助线, 得到 $\triangle ABM \cong \triangle ACD$, 再利用 $AD = AM = MD$, 得到 $\triangle ADM$ 为等边三角形, 从而得到结果.

【详解】(1) 证明: 当 $\angle C = 30^\circ$ 时,

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = 30^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\therefore BD = 2AD \text{ 且 } \angle ADB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ADB - \angle C = 30^\circ,$$

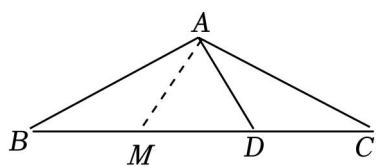
$$\because \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore AD = CD,$$

$$\therefore BD = 2CD;$$

(2) 解: 当 $BD = 2CD$ 时, $\angle C = 30^\circ$, 理由如下:

取 BD 的中点 M , 连接 AM ,



$$\because \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\therefore AM = BM = DM = \frac{1}{2}BD,$$

$$\because BD = 2CD,$$

$$\therefore AM = CD,$$

$$\therefore BM = CD,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

在 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle B = \angle C \\ BM = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ACD,$$

$$\therefore AD = AM,$$

$$\therefore AD = AM = MD,$$

$$\therefore \angle ADM = 60^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 30^\circ.$$

27. (本题 7 分) 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 点 D 、 E 分别在边 BC 、 AB 上, 连接 AD 、 CE .

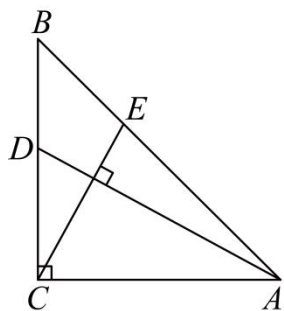


图1

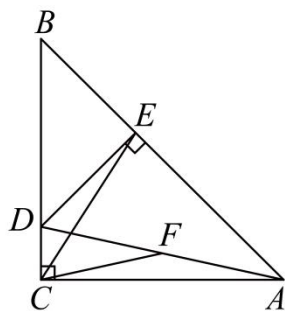


图2

(1) 如图1, 若 $CE \perp AD$, $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BCE$, 求证: $AD = 2CD$;

(2) 如图2, 连接 DE , 若 $DE \perp AB$, 点 F 为 AD 的中点, 连接 CF 、 CE , 求 $\angle ECF$ 的大小.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 45°

【分析】 (1) 如图, 设 AD 与 CE 相交于点 F , 由等腰直角三角形的性质可得 $\angle BAC = \angle B = 45^\circ$, 设 $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCE = 2\alpha$, 则 $\angle CAF = 45^\circ - \alpha$, $\angle ACF = 90^\circ - 2\alpha$, 由 $\angle CAF + \angle ACF = 90^\circ$ 可求得 $\alpha = 15^\circ$, 进而可得 $\angle CAD = 30^\circ$, 由直角三角形的性质即可求证;

(2) 连接 EF , 由直角三角形的性质可得 $EF = CF = AF = \frac{1}{2} AD$, 进而可得 $\angle AEF = \angle EAF$, $\angle CAF = \angle ACF$, $\angle ECF = \angle CEF$, 得到 $\angle DFE = 2\angle EAF$, $\angle DFC = 2\angle CAF$, 可得 $\angle CFE = 90^\circ$, 进而即可求解.

【详解】 (1) 证明: 如图, 设 AD 与 CE 相交于点 F ,

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \quad AC = BC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle B = 45^\circ,$$

$$\because CE \perp AD,$$

$$\therefore \angle AFC = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BCE,$$

$$\therefore \text{可设 } \angle BAD = \alpha, \quad \angle BCE = 2\alpha, \quad \text{则 } \angle CAF = 45^\circ - \alpha, \quad \angle ACF = 90^\circ - 2\alpha,$$

$$\because \angle CAF + \angle ACF = 90^\circ,$$

$$\therefore 45^\circ - \alpha + 90^\circ - 2\alpha = 90^\circ,$$

$\therefore \alpha = 15^\circ$,
 $\therefore \angle CAF = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$,
 即 $\angle CAD = 30^\circ$,
 $\therefore \angle ACD = 90^\circ$,
 $\therefore AD = 2CD$;

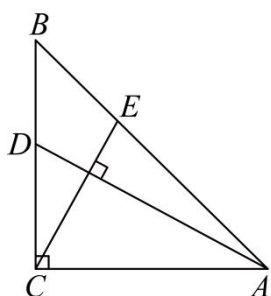


图1

(2) 解: 连接 EF ,
 $\therefore DE \perp AB$,
 $\therefore \angle AED = \angle ACB = 90^\circ$,
 $\therefore$ 点 F 为 AD 的中点,
 $\therefore EF = CF = AF = \frac{1}{2} AD$,
 $\therefore \angle AEF = \angle EAF$, $\angle CAF = \angle ACF$, $\angle ECF = \angle CEF$,
 $\therefore \angle DFE = 2\angle EAF$, $\angle DFC = 2\angle CAF$,
 $\therefore \angle DFE + \angle DFC = 2\angle EAF + 2\angle CAF = 2(\angle EAF + \angle CAF) = 2\angle BAC = 90^\circ$,
 即 $\angle CFE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ECF = \angle CEF = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$.

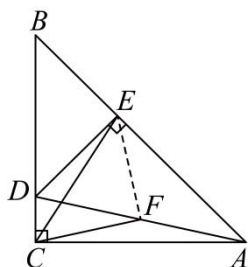
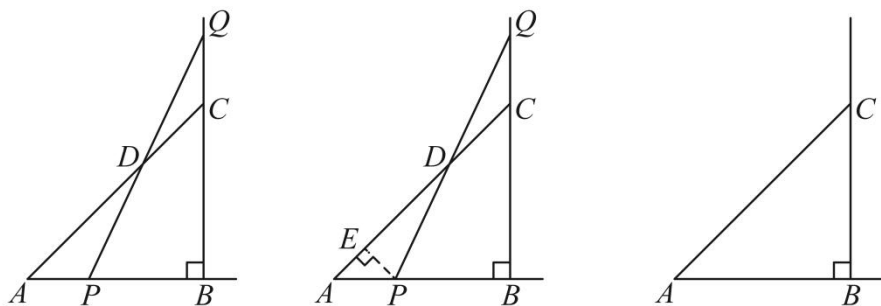


图2

【点睛】 本题考查了等腰直角三角形的性质，直角三角形的性质，等腰三角形的性质，三角形内角和定理及外角性质，正确作出辅助线是解题的关键.

28. (本题 8 分) 等腰直角 ABC 的直角边 $AB = BC = 20\text{cm}$, $AC = 20\sqrt{2}\text{cm}$, 点 P 、 Q 分别从 A 、 C 两点同时出发, 均以 1cm/秒 的相同速度做直线运动, 已知 P 沿射线 AB 运动, Q 沿边 BC 的延长线运动, PQ 与直线 AC 相交于点 D . 设 P 点运动时间为 t 秒, $\triangle PCQ$ 的面积为 $S\text{ cm}^2$.



备用图

- (1) 当点 P 在边 AB 上时, 用含有 t 的代数式表示 $\triangle PCQ$ 的面积 S ;
- (2) 当点 P 运动几秒时, $S_{\triangle PCQ} = S_{\triangle ABC}$?
- (3) 作 $PE \perp AC$ 于点 E , 当点 P 、 Q 运动时, 线段 DE 的长度是否改变? 如果不变, 请直接写出 DE 的长度; 如果改变, 请说明理由.

【答案】 (1) $S = -\frac{1}{2}t^2 + 10t$

(2) 当点 P 运动 $10 + 10\sqrt{5}$ 秒时, $S_{\triangle PCQ} = S_{\triangle ABC}$

(3) DE 线段的长度不会改变, $DE = 10\sqrt{2}\text{cm}$

【分析】 (1) 根据题意可得: $AP = CQ = t\text{cm}$, $BP = (20 - t)\text{cm}$, 根据 $S = \frac{1}{2}CQ \cdot PB$ 即可求解;

(2) 由 (1) 知, 当 $0 < t \leq 20$ 时, $S = -\frac{1}{2}t^2 + 10t$, 当 $t > 20$ 时, $BP = (t - 20)\text{cm}$, $S = \frac{1}{2}t^2 - 10t$, 再求出

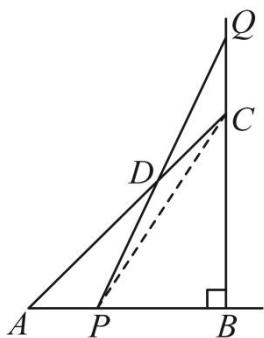
$S_{\triangle ABC} = 200\text{cm}^2$, 根据 $S_{\triangle PCQ} = S_{\triangle ABC}$ 列方程求解即可;

(3) 当点 P 在线段 AB 上时, 如图, 过 Q 作 $QM \perp AC$, 交直线 AC 于点 M , 根据题意可得 $\angle A = \angle ACB = \angle QCM = 45^\circ$, 证明 $\triangle AEP \cong \triangle CMQ$, 得到 $AE = CM$, $PE = QM$, 推出 $AC = EM = 20\sqrt{2}\text{cm}$, 证明 $\triangle PDE \cong \triangle QDM$, 根据全等三角形的性质即可求解.

【详解】 (1) 解: 根据题意可得: $AP = CQ = t\text{cm}$,

当点 P 在边 AB 上时, $BP = AB - AP = (20 - t)\text{cm}$,

$$\therefore S = \frac{1}{2}CQ \cdot PB = \frac{1}{2}t(20 - t) = -\frac{1}{2}t^2 + 10t;$$



(2) 由 (1) 知, 当 $0 < t \leq 20$ 时, $S = -\frac{1}{2}t^2 + 10t$,

当 $t > 20$ 时, $BP = AP - AB = (t - 20)\text{cm}$,

$\therefore$ 此时 $S = \frac{1}{2}CQ \cdot PB = \frac{1}{2}t(t - 20) = \frac{1}{2}t^2 - 10t$,

$\because$ 等腰直角 ABC 的直角边 $AB = BC = 20\text{cm}$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \times 20 \times 20 = 200\text{cm}^2$,

$\therefore S_{\triangle PCQ} = S_{\triangle ABC}$,

$\therefore$ 当 $0 < t \leq 20$ 时, $-\frac{1}{2}t^2 + 10t = 200$,

整理可得: $t^2 - 20t + 400 = 0$,

$\Delta = (-20)^2 - 4 \times 1 \times 400 = -1200 < 0$,

$\therefore$ 方程无实数根;

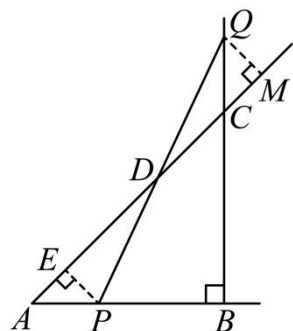
当 $t > 20$ 时, $\frac{1}{2}t^2 - 10t = 200$,

解得: $t_1 = 10 + 10\sqrt{5}$, $t_2 = 10 - 10\sqrt{5}$ (不合题意, 舍去);

综上所述, 当点 P 运动 $10 + 10\sqrt{5}$ 秒时, $S_{\triangle PCQ} = S_{\triangle ABC}$;

(3) 线段 DE 的长度不会改变, 理由如下:

当点 P 在线段 AB 上时, 如图, 过 Q 作 $QM \perp AC$, 交直线 AC 于点 M ,



$\because AB = BC$, $\angle ABC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle A = \angle ACB = \angle QCM = 45^\circ,$$

在 $\triangle AEP$ 和 $\triangle CMQ$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle QCM \\ \angle AEP = \angle CMQ = 90^\circ, \\ AP = CQ \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEP \cong \triangle CMQ (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = CM, \quad PE = QM,$$

$$\therefore AE + CE = CM + CE, \quad \text{即 } AC = EM = 20\sqrt{2}\text{cm},$$

在 $\triangle PDE$ 和 $\triangle QDM$ 中,

$$\begin{cases} \angle PDE = \angle QDM \\ \angle PED = \angle QMC, \\ PE = QM \end{cases}$$

$$\therefore \triangle PDE \cong \triangle QDM (\text{AAS}),$$

$$\therefore DE = DM,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}EM = 10\sqrt{2}\text{cm},$$

当点 P 在线段 AB 的延长线上时, 同理可得: $DE = 10\sqrt{2}\text{cm}$,

综上所述, DE 线段的长度不会改变, $DE = 10\sqrt{2}\text{cm}$.

【点睛】 本题考查了全等三角形的判定和性质, 等腰直角三角形的性质, 一元二次方程的应用, 解题的关键是掌握相关知识.