

2025 学年度第一学期八年级数学学科阶段练习 (一)

(满分 100 分, 时间 90 分钟)

一、选择题 (每题 2 分, 共 12 分)

1. 在数字 $\frac{22}{7}$, 3.33 , $\frac{\pi}{2}$, 0 , $2.121121112\cdots$ (相邻两个 2 之间 1 的个数逐次多 1), $-\sqrt{0.9}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$ 中, 无理数的个数是 ().

A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了无理数的定义, 根据无理数的三种形式: ① 开方开不尽的数, ② 无限不循环小数, ③ 含有 π 的有些数, 结合所给数据进行判断即可, 解题的关键是掌握无理数的几种形式.

【详解】 解: $\frac{22}{7}$ 是有理数, 不符合题意;

3.33 是有限小数, 属于有理数, 不符合题意;

$\frac{\pi}{2}$ 是无理数, 符合题意;

0 是整数, 属于有理数, 不符合题意;

$2.121121112\cdots$ (相邻两个 2 之间 1 的个数逐次多 1) 是无理数, 符合题意;

$-\sqrt{0.9}$ 是无理数, 符合题意;

$\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$ 是有理数, 不符合题意;

综上所述: 共有无理数 3 个,

故选: B.

2. 下列各组二次根式中, 属于同类二次根式的是 ()

A. $2\sqrt{3}$ 与 $3\sqrt{2}$;

B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 与 $\sqrt{\frac{2}{3}}$;

C. $\sqrt{0.5}$ 与 $\sqrt{5}$;

D. $\sqrt{8x^3}$ 与 $\sqrt{2x}$.

【答案】 D

【解析】

【分析】 把四组式子化成最简二次根式后根据同类二次根式的定义进行判断.

【详解】 解: A、 $2\sqrt{3}$ 与 $3\sqrt{2}$ 被开方数不同, 不是同类二次根式;

B、 $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 与 $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 被开方数不同，不是同类二次根式；

C、 $\sqrt{0.5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 与 $\sqrt{5}$ 被开方数不同，不是同类二次根式；

D、 $\sqrt{8x^3} = 2x\sqrt{2x}$ 与 $\sqrt{2x}$ ，被开方数相同，是同类二次根式。

故选：D。

【点睛】本题考查同类二次根式的定义：化成最简二次根式后，被开方数相同。

3. 将一元二次方程 $(1-3x)(x+3) = 2x^2 + 1$ 化为一般形式后，二次项系数和常数项分别是 ()

A. 5, -2

B. 2, -3

C. -5, -1

D. 6, 2

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的一般形式，准确运算是解题的关键。一元二次方程的一般形式为 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，将方程化为一般形式后判断二次项系数和常数项的值即可。

【详解】解： $(1-3x)(x+3) = 2x^2 + 1$,

$$x + 3 - 9x - 3x^2 = 2x^2 + 1,$$

$$5x^2 + 8x - 2 = 0$$

∴ 二次项系数为 5，常数项为 -2，

故选：A。

4. 若 $a = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ ，则下列各式正确的是 ()

A. $3 < a < 4$

B. $2 < a < 3$

C. $1 < a < 2$

D. $0 < a < 1$

【答案】A

【解析】

【分析】此题考查了二次根式的分母有理化和无理数的估算。先利用分母有理化化简二次根式，再进行无理数估算即可。

【详解】解： $a = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 2+\sqrt{3}$;

$$\therefore 1 < \sqrt{3} < 2,$$

$$\therefore 3 < 2 + \sqrt{3} < 4,$$

$$\text{即 } 3 < a < 4;$$

故选：A.

5. 如果最简二次根式 $\sqrt{3a-8}$ 与 $\sqrt{7-2a}$ 能够合并，那么 a 的值为 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了同类二次根式的定义，根据最简二次根式 $\sqrt{3a-8}$ 与 $\sqrt{7-2a}$ 能够合并可知这两个二次根式的被开方数相同，据此求解即可.

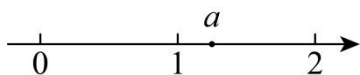
【详解】解： $\because$ 最简二次根式 $\sqrt{3a-8}$ 与 $\sqrt{7-2a}$ 能够合并，

$$\therefore 3a-8=7-2a,$$

$$\therefore a=3,$$

故选：B.

6. 已知实数 a 在数轴上的对应点位置如图，则化简 $(\sqrt{a-1})^2 - \sqrt{(a-2)^2}$ 的结果是 ()



A. $2a-3$

B. -1

C. 1

D. $3-2a$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了实数与数轴，二次根式的性质，先观察数轴得 $1 < a < 2$ ，再得出 $a-1 > 0, a-2 < 0$ ，结合二次根式的性质进行化简，即可作答.

【详解】解：由数轴得 $1 < a < 2$ ，

$$\therefore a-1 > 0, a-2 < 0$$

$$\therefore (\sqrt{a-1})^2 - \sqrt{(a-2)^2}$$

$$= a-1 - |a-2|$$

$$= a-1 - (2-a)$$

$$= a-1-2+a$$

$$= 2a - 3,$$

故选: A

二、填空题 (每题 3 分, 共 36 分)

7. 如果方程 $(m+2)x^{m^2-2} + (m-2)x - 3 = 0$ 是一元二次方程, 那么 m 的值为_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的定义: 含有一个未知数, 并且未知数的最高次数为 2 的整式方程叫一元二次方程.

根据一元二次方程的定义得到 $m+2 \neq 0$ 且 $m^2 - 2 = 2$, 再求解即可.

【详解】 方程 $(m+2)x^{m^2-2} + (m-2)x - 3 = 0$ 是一元二次方程,

所以 $m+2 \neq 0$ 且 $m^2 - 2 = 2$,

解得 $m = 2$.

故答案为: 2.

8. 若代数式 $\frac{\sqrt{x+4}}{x-2}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围为_____.

【答案】 $x \geq -4$ 且 $x \neq 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式及分式有意义的条件, 熟练掌握二次根式及分式有意义的条件是解题的关键. 根据二次根式及分式有意义的条件可直接进行求解.

【详解】 解: 由题意得:

$x+4 \geq 0$ 且 $x-2 \neq 0$,

解得: $x \geq -4$ 且 $x \neq 2$;

故答案为: $x \geq -4$ 且 $x \neq 2$.

9. 化简: $(a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}} =$ _____.

【答案】 $-\sqrt{1-a}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的化简, 熟练掌握二次根式性质, 是解题的关键. 根据二次根式有意义的条件得出 $1-a > 0$, 然后根据二次根式性质化简即可.

【详解】解： $\because \sqrt{\frac{1}{1-a}}$ 有意义，

$$\therefore 1-a > 0,$$

$$\therefore (a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}} = \frac{a-1}{1-a}\sqrt{1-a} = -\sqrt{1-a}.$$

故答案为： $-\sqrt{1-a}$.

10. 分母有理化： $\frac{1}{-2+\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-2-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题考查分母有理化，根据二次根式的性质，分数的基本性质，利用平方差公式进行分母有理化，将分子分母同时乘以 $-2-\sqrt{3}$ ，即可求解.

【详解】解： $\frac{1}{-2+\sqrt{3}} = \frac{-2-\sqrt{3}}{(-2+\sqrt{3})(-2-\sqrt{3})} = \frac{-2-\sqrt{3}}{4-3} = -2-\sqrt{3}.$

故答案为： $-2-\sqrt{3}$.

11. 比较大小： $\frac{\sqrt{5}}{2}$ $\frac{\sqrt{10}}{3}$ (填“>”，“<”或“=”).

【答案】>

【解析】

【分析】本题考查了实数的大小比较，比较 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 与 $\frac{\sqrt{10}}{3}$ 平方的大小即可.

【详解】解： $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} = \frac{45}{36}$ ， $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 = \frac{10}{9} = \frac{40}{36}$ ，

$$\therefore \frac{45}{36} > \frac{40}{36},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{2} > \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

故答案为：>.

12. 若 $|a|+a=0$ ，则 $\frac{|a|+2}{\sqrt{(a-2)^2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题主要考查化简问题，掌握二次根式及去绝对值化简是解题的关键.

根据 $|a| + a = 0$ ，可知 $a \leq 0$ ，再根据符号去绝对值和开算术平方根化简即可.

【详解】 $\because |a| + a = 0, \therefore a \leq 0$,

则 $|a| = -a, a - 2 < 0$,

$$\sqrt{(a-2)^2} = -(a-2) = -a+2,$$

$$\therefore \frac{|a|+2}{\sqrt{(a-2)^2}} = \frac{-a+2}{-a+2} = 1,$$

故答案为：1.

13. 已知 $\sqrt[3]{4.71} \approx 1.676$ ，则 $\sqrt[3]{-0.00471} \approx$ _____.

【答案】 -0.1676

【解析】

【分析】 此题考查了立方根，熟练掌握立方根的意义是解题的关键. 根据立方根的变化规律进行解答即可.

【详解】 解： $\because \sqrt[3]{4.71} \approx 1.676$,

$$\therefore \sqrt[3]{-0.00471} = \sqrt[3]{-0.001 \times 4.71}$$

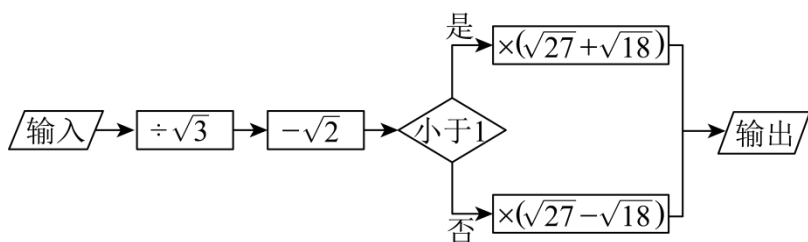
$$= \sqrt[3]{-0.001} \times \sqrt[3]{4.71}$$

$$= -0.1 \times \sqrt[3]{4.71}$$

$$\approx -0.1676,$$

故答案为： -0.1676

14. 按如图所示的运算程序计算，若输入“3”，则输出的结果是_____.



【答案】 3

【解析】

【分析】本题考查程序框图的运算，熟练掌握运算法则并准确计算是解题的关键．根据输入的数字从左往右依次计算即可．

【详解】解：输入 3，

第一步 $3 \div \sqrt{3} = \sqrt{3}$ ，

第二步 $\sqrt{3} - \sqrt{2} < 1$ ，

第三步 $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{27} + \sqrt{18})$

$$= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \times (3\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$$

$$= 3(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$= 3 \times (3 - 2)$$

$$= 3.$$

故答案为：3.

15. 不等式 $\sqrt{3}x + \sqrt{8} < \sqrt{27}x + \sqrt{32}$ 的解集是_____.

【答案】 $x > -\frac{\sqrt{6}}{3}$

【解析】

【分析】本题考查解一元一次不等式，二次根式的化简与合并．先将不等式中的二次根式化简为最简二次根式，然后根据一元一次不等式的性质来解不等式，注意最后 x 的系数是负数，在系数化为 1 的时候要改变不等号的方向并且结果要分母有理化．

【详解】解： $\sqrt{3}x + \sqrt{8} < \sqrt{27}x + \sqrt{32}$

化简二次根式： $\sqrt{3}x + 2\sqrt{2} < 3\sqrt{3}x + 4\sqrt{2}$

移项： $\sqrt{3}x - 3\sqrt{3}x < 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

合并： $-2\sqrt{3}x < 2\sqrt{2}$

解得 $x > -\frac{\sqrt{6}}{3}$.

16. 苏步青是中国著名的数学家，被誉为“数学之王”，为纪念其贡献，国际上将一颗距地球 21800 万公里的小行星命名为“苏步青星”，将 21800 万用科学记数法表示为_____.

【答案】 2.18×10^8

【解析】

【分析】 本题主要考查了用科学记数法表示绝对值大于1的数，解题的关键是掌握用科学记数法表示绝对值大于1的数的方法：将原数化为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数， n 的值等于把原数变为 a 时小数点移动的位数。据此即可解答。

【详解】 解：21800 万 = 218000000，
21800 万用科学记数法表示为 2.18×10^8 ，
故答案为： 2.18×10^8 。

17. 将二次三项式 $x^2 - 2x - 2$ 写成 $(x-1)^2 + m$ 的形式则 $m =$ _____。

【答案】 -3

【解析】

【分析】 此题考查了配方法的应用，掌握完全平方公式是解题的关键。根据配方法的步骤求解即可。

【详解】 解： $x^2 - 2x - 2$
 $= x^2 - 2x + 1 - 1 - 2$
 $= (x-1)^2 - 3$ ，
 $\therefore m = -3$ ，
故答案为： -3。

18. 设 $[\sqrt{a}]$ 表示最接近 $\sqrt{a}$ 的整数，则 $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \cdots + [\sqrt{28}] =$ _____。

【答案】 100

【解析】

【分析】 本题考查了算术平方根规律探究问题，解答本题的关键是具有一般规律推导特殊性质的能力。先写出前几个数的值，然后可得出2个数、4个数、6个数……，依次相等，从而可得出答案。

【详解】 解： $\because [\sqrt{1}] = [\sqrt{2}] = 1$ ，
 $[\sqrt{3}] = [\sqrt{4}] = [\sqrt{5}] = [\sqrt{6}] = 2$ ，
 $[\sqrt{7}] = [\sqrt{8}] = \cdots = [\sqrt{12}] = 3$ ，
 $[\sqrt{13}] = \cdots = [\sqrt{20}] = 4$ ，
 $[\sqrt{21}] = \cdots = [\sqrt{26}] = [\sqrt{27}] = [\sqrt{28}] = 5$ ，
 $\therefore$ 原式 $= 1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 6 + 4 \times 8 + 5 \times 8 = 100$ 。

故答案为：100.

三、简答题（第 19、20 题每题 10 分，第 21、22 题每题 6 分，共 32 分）

19. 计算：

$$(1) \sqrt{0.04} + \sqrt[3]{-8} + \sqrt{\frac{1}{4}} + |\sqrt{3} - 2| + \sqrt{3}$$

$$(2) \left(2\sqrt{12} - \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \times \sqrt{6} - \frac{\sqrt{27} + \sqrt{12}}{\sqrt{3}}$$

【答案】(1) 0.7

$$(2) 11\sqrt{2} - 5$$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的混合运算，熟练掌握运算是解题的关键.

(1) 先算算术平方根和立方根和去绝对值，然后进行加减运算；

(2) 先化简二次根式，然后进行乘法运算.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & \sqrt{0.04} + \sqrt[3]{-8} + \sqrt{\frac{1}{4}} + |\sqrt{3} - 2| + \sqrt{3} \\ &= 0.2 + (-2) + \frac{1}{2} + (2 - \sqrt{3}) + \sqrt{3} \\ &= 0.2 - 2 + 0.5 + 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} \\ &= 0.7; \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & \left(2\sqrt{12} - \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \times \sqrt{6} - \frac{\sqrt{27} + \sqrt{12}}{\sqrt{3}} \\ &= \left(4\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \times \sqrt{6} - \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{11\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{6} - (3 + 2) \\ &= \frac{11\sqrt{18}}{3} - 5 \end{aligned}$$

$$= \frac{33\sqrt{2}}{3} - 5$$

$$= 11\sqrt{2} - 5.$$

20. 解方程

$$(1) (x-3)^2 + 2(x-3) - 24 = 0;$$

$$(2) 2x^2 + 2\sqrt{7}x + 1 = 0; \text{ (用公式法)}$$

【答案】(1) $x_1 = 7$ 或 $x_2 = -3$

$$(2) x_1 = \frac{-\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2} \text{ 或 } x_2 = \frac{-\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}$$

【解析】

【分析】本题主要考查了解一元二次方程——因式分解法，公式法，熟练掌握各自解法是解题的关键.

(1) 先用乘法公式去括号，合并同类项，再用因式分解法解方程；

(2) 找出 a, b, c 的值，先用判别式判断方程有多少个实数根，再用求根公式求出方程的解.

【小问 1 详解】

$$(x-3)^2 + 2(x-3) - 24 = 0$$

$$\text{解: } x^2 - 6x + 9 + 2x - 6 - 24 = 0$$

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$(x-7)(x+3) = 0$$

$$x-7=0 \text{ 或 } x+3=0$$

$$x_1 = 7 \text{ 或 } x_2 = -3$$

【小问 2 详解】

$$2x^2 + 2\sqrt{7}x + 1 = 0$$

$$\text{解: } a = 2, b = 2\sqrt{7}, c = 1$$

$$\Delta = (2\sqrt{7})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 20 > 0$$

$$x = \frac{-2\sqrt{7} \pm 2\sqrt{5}}{4} = \frac{-\sqrt{7} \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2} \text{ 或 } x_2 = \frac{-\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}$$

21. 已知 a 为方程 $2x^2 - 3x - 1 = 0$ 的一个根, 求代数式 $(a+1)(a-1) + 3a(a-2)$ 的值.

【答案】 1

【解析】

【分析】 将 a 代入方程中得 $2a^2 - 3a = 1$, 将所求代数式化简整理后, 把 $2a^2 - 3a = 1$ 整体代入即可.

【详解】 解: $\because a$ 为方程 $2x^2 - 3x - 1 = 0$ 的一个根,

$$\therefore 2a^2 - 3a - 1 = 0.$$

$$\therefore 2a^2 - 3a = 1.$$

$$\therefore \text{原式} = a^2 - 1 + 3a^2 - 6a = 4a^2 - 6a - 1 = 2(2a^2 - 3a) - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1.$$

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程的解的概念, 以及用整体代入法求代数式的值. 解题的关键是掌握整体代入法.

22. 先化简, 再求值 $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{x-2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$, 其中 $x=5$, $y=\frac{1}{5}$.

【答案】 $2\sqrt{x}-2\sqrt{y}$, $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】 根据分母有理化和完全平方公式可以化简题目中的式子, 然后将 x 、 y 的值代入化简后的式子即可解答本题.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{x-2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\ &= \frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} + \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\ &= \sqrt{x}-\sqrt{y} + \sqrt{x}-\sqrt{y} \\ &= 2\sqrt{x}-2\sqrt{y}, \\ \text{当 } x=5, y=\frac{1}{5} \text{ 时, 原式} &= 2\sqrt{5}-2\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查二次根式的化简求值、分母有理化, 解答本题的关键是明确二次根式化简求值的方法.

四、解答题 (第 23 题 5 分, 第 24 题 6 分, 第 25 题 9 分)

23. 已知 $\sqrt[3]{x}=1$, 且 $\sqrt{y-2x}+(z-3)^2=0$, 求 $x+y^3+z$ 的平方根.

【答案】 $\pm 2\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】 由立方根的定义可求出 x 的值, 根据算术平方根和平方的非负数性质可求出 y 、 z 的值, 进而根据平方根的定义即可得出答案.

【详解】 $\because \sqrt[3]{x}=1$,

$\therefore x=1$,

$\because \sqrt{y-2x}+(z-3)^2=0$,

$\therefore y-2x=0, z-3=0$,

解得: $y=2, z=3$,

$\therefore x+y^3+z=1+2^3+3=12$,

$\therefore x+y^3+z$ 的平方根是 $\pm \sqrt{12}=\pm 2\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查立方根、平方根、算术平方根的概念, 一个正数的平方根有两个, 它们互为相反数, 其中正的平方根叫做算术平方根; 根据算术平方根和平方的非负数性质求出 y 、 z 的值是解题关键.

24. 如图 1, 由 5 个边长为 1 的小正方形组成的长方形, 通过剪拼可以拼成一个正方形 $ABCD$.

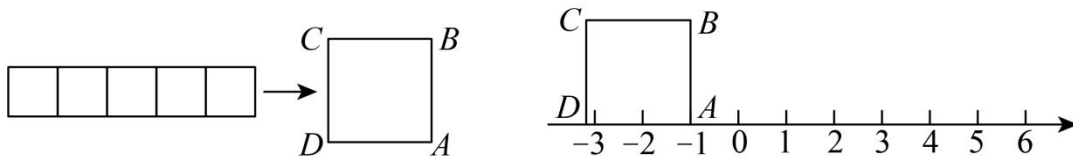


图 1

图 2

- (1) 求正方形 $ABCD$ 的边长, 并求出 AB 的长在哪两个连续整数之间;
- (2) 如图 2, 纸片上有数轴, 把图 1 中的正方形 $ABCD$ 放到数轴上, 使得点 A 与 -1 重合, 求点 D 在数轴上表示的数;
- (3) 在 (2) 的基础上以数 1 对应的点为折点, 将数轴向右对折, 则点 D 与数_____对应的点重合.

【答案】 (1) AB 的长 在 2 和 3 之间

(2) $-1-\sqrt{5}$

(3) $3+\sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题考查了实数与数轴，算术平方根，无理数的估算，读懂题意是解题的关键.

(1) 根据题意可求出正方形 $ABCD$ 的面积，进而得到正方形的边长，再利用夹逼法即可求出其范围；

(2) 根据点 A 表示的数和正方形的边长即可得到点 D 表示的数；

(3) 设点 D 与数 x 对应的点重合，根据对折可得， $\frac{-1-\sqrt{5}+x}{2}=1$ ，即可求解.

【小问 1 详解】

解：由题意得，正方形 $ABCD$ 的面积为： $5 \times 1 \times 1 = 5$ ，

$\therefore$ 边长为： $\sqrt{5}$ ，

$\because \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$ ，

$\therefore 2 < \sqrt{5} < 3$ ，

$\therefore AB$ 的长在 2 和 3 之间；

【小问 2 详解】

解：把图 1 中的正方形 $ABCD$ 放到数轴上，使得点 A 与 -1 重合，则点 D 在数轴上表示的数为： $-1-\sqrt{5}$ ；

【小问 3 详解】

解：设点 D 与数 x 对应的点重合，

由题意得： $\frac{-1-\sqrt{5}+x}{2}=1$ ，

解得： $x=2-(-1-\sqrt{5})=3+\sqrt{5}$ ，

$\therefore$ 点 D 与数 $3+\sqrt{5}$ 对应的点重合.

25. 阅读材料，并完成下列任务：

材料一：裂项求和

小华在学习分式运算时，通过具体运算： $\frac{1}{1 \times 2} = 1 - \frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ ，……

发现规律： $\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (n 为正整数)，并证明了此规律成立.

应用规律：快速计算 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{9 \times 10} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.

材料二：根式化简

$$\text{例 1} \quad \frac{1}{3+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right);$$

$$\text{例 2} \quad \frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{15}(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

任务一：化简.

$$(1) \text{ 化简: } \frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}$$

$$(2) \text{ 猜想: } \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1} + (2n-1)\sqrt{2n+1}} = \text{_____} \quad (n \text{ 为正整数}).$$

任务二：应用

$$(3) \text{ 计算: } \frac{1}{3+\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} + \frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{49\sqrt{47}+47\sqrt{49}};$$

任务三：探究

$$(4) \text{ 已知 } x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3 \times 5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{5 \times 7}} + \cdots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{1+\sqrt{2023}+\sqrt{2025}+\sqrt{2023 \times 2025}},$$

比较 x 和 y 的大小，并说明理由.

【答案】 (1) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} \right)$

$$(2) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+1}} \right)$$

$$(3) \frac{3}{7}$$

$$(4) x > y, \text{ 理由见解析}$$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式裂项求解，解题关键是熟练进行二次根式分母有理化的化简.

(1) 根据题目中的例子可以写出答案;

(2) 根据例 2，可以写出相应的猜想;

(3) 根据分母有理化，可得二次根式的化简，根据二次根式的加减，即可得到答案;

(4) 结合例 1，例 2 的规律进行计算即可;

【小问 1 详解】

$$\frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{35}(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1} + (2n-1)\sqrt{2n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)}(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})}, \\ &= \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)}(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})}, \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right), \end{aligned}$$

故答案为: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$;

【小问 3 详解】

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3+\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} + \frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{49\sqrt{47}+47\sqrt{49}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} + \frac{1}{\sqrt{15}(\sqrt{5}+\sqrt{3})} + \frac{1}{\sqrt{35}(\sqrt{7}+\sqrt{5})} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2303}(\sqrt{49}+\sqrt{47})} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2\sqrt{35}} + \cdots + \frac{\sqrt{49}-\sqrt{47}}{2\sqrt{2303}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{47}} - \frac{1}{\sqrt{49}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\times\left(1 - \frac{1}{7}\right) \\ &= \frac{3}{7}; \end{aligned}$$

【小问 4 详解】

$$y = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3\times 5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{5\times 7}} + \cdots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{1+\sqrt{2023}+\sqrt{2025}+\sqrt{2023\times 2025}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+1} - \frac{1}{\sqrt{7}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2023}+1} - \frac{1}{\sqrt{2025}+1},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{2025}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{1}{46}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

$$\therefore x - y = \frac{1}{46} > 0,$$

故 $x > y$.