

2025 学年第一学期阶段性作业评价（一）八年级数学试卷

(考试时间：90 分钟，满分 100 分)

注意：

1. 本练习含五个大题，共 28 题。答题时，学生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本练习卷上答题一律无效。
2. 除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，都必须在答题纸的相应位置上写出解题的主要步骤。

一、选择题（本大题共 6 题，每题 2 分，满分 12 分）

1. 在实数 $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ， $0.01010010001\cdots$ （相邻两个 1 之间 0 的个数逐次加 1 个）， -3 ， $\frac{\pi}{2}$ ， $\sqrt[3]{8}$ 中，无理数共有（ ）

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】题考查了无理数的识别，无限不循环小数叫无理数，初中范围内常见的无理数有：① π 类，如 2π ， $\frac{\pi}{3}$ 等；②开方开不尽的数，如 $\sqrt{2}$ ， $\sqrt[3]{5}$ 等；③具有特殊结构的数，如 $0.1010010001\cdots$ （两个 1 之间依次增加 1 个 0）， $0.2121121112\cdots$ （两个 2 之间依次增加 1 个 1）。

根据无理数的定义解答即可。

【详解】解： $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ， $0.01010010001\cdots$ （相邻两个 1 之间 0 的个数逐次加 1 个）， $\frac{\pi}{2}$ 是无理数，

-3 ， $\sqrt[3]{8}=2$ 是有理数。

故选 C。

2. 下列计算正确的是（ ）

- A. $\sqrt{9} = \pm 3$ B. $\sqrt{-8} = -2$ C. $-\sqrt[3]{27} = -3$ D. $\sqrt[3]{16} = 4$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查求算术平方根，立方根，熟练掌握相关的知识点是解题的关键。根据求算术平方根，立方根的方法进行解题即可。

【详解】解：A、 $\sqrt{9} = 3$ ，故该选项错误，不符合题意；

B、负数在实数范围内没有平方根，故该选项错误，不符合题意；

C、 $-\sqrt[3]{27} = -3$ ，计算正确，故该选项符合题意；

D、因为 $4^3 = 64$ ，

所以 $\sqrt[3]{16} \neq 4$ ，故该选项错误，不符合题意；

故选：C.

3. 在下列二次根式中，是最简二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{12a}$

B. $\sqrt{0.2m}$

C. $\sqrt{4+x^2}$

D. $\sqrt{\frac{a}{3}}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了最简二次根式的定义，熟练掌握最简二次根式的定义是解题的关键.

根据最简二次根式的定义，逐一分析每个选项是否满足被开方数不含分母且不含能开得尽方的因数或因式.

【详解】解： $\sqrt{12a} = \sqrt{4 \times 3a} = 2\sqrt{3a}$ ，不是最简二次根式.

$$\sqrt{0.2m} = \sqrt{\frac{1}{5}m} = \frac{\sqrt{5m}}{5}, \text{ 不是最简二次根式.}$$

$\sqrt{4+x^2}$ ，被开方数 $4+x^2$ 不含分母，且不含能开得尽方的因数或因式，是最简二次根式.

$$\sqrt{\frac{a}{3}} = \frac{\sqrt{3a}}{3}, \text{ 不是最简二次根式.}$$

故选：C.

4. 在下列各式中，是 $\sqrt{2a+b}$ 的有理化因式的是（ ）

A. $\sqrt{2a+b}$

B. $\sqrt{2a-b}$

C. $\sqrt{2a}+b$

D. $\sqrt{2a}-b$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查有理化因式的概念.

有理化因式：两个含有根式的非零代数式相乘，如果它们的积不含有根式，那么这两个代数式就互为有理化因式，分别将选项代入计算看乘积是否含有根式即可.

【详解】A. $\sqrt{2a+b} \cdot \sqrt{2a+b} = 2a+b$ ，结果不带根式，符合题意.

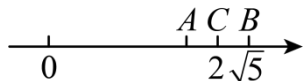
B. $\sqrt{2a+b} \cdot \sqrt{2a-b} = \sqrt{4a^2 - b^2}$, 结果带根式, 不符合题意.

C. $\sqrt{2a+b} \cdot (\sqrt{2a} + b) = \sqrt{4a^2 + 2ab} + b\sqrt{2a+b}$, 结果带根式, 不符合题意.

D. $\sqrt{2a+b} \cdot (\sqrt{2a} - b) = \sqrt{4a^2 + 2ab} - b\sqrt{2a+b}$, 结果带根式, 不符合题意.

故选: A.

5. 如图, 数轴上表示 2, $\sqrt{5}$ 的点分别为点 C, 点 B, 点 C 是线段 AB 的中点, 则点 A 表示的数 ()



A. $-\sqrt{5}$

B. $2 - \sqrt{5}$

C. $\sqrt{5} - 2$

D. $4 - \sqrt{5}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了实数与数轴, 以及两点之间的距离公式. 数轴上的点与实数一一对应, 根据 C 是线段 AB 的中点, 可得 $CB = CA$, 用 C 点表示的数减去 CB 的距离, 可得 A 点表示的数.

【详解】 解: $\because$ 点 C 是线段 AB 的中点,

$$\therefore CB = CA = \sqrt{5} - 2,$$

$$\therefore \text{点 A 表示的数是: } 2 - (\sqrt{5} - 2) = 4 - \sqrt{5},$$

故选: D.

6. 下列从左到右的变形不一定正确的是 ()

A. $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ab}$

B. $\sqrt{\frac{b}{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}}$

C. $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

D. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查的是二次根式的化简, 二次根式的乘法与除法运算, 熟练掌握二次根式的性质, 二次根式的乘法与除法运算是解题的关键.

根据二次根式的性质和二次根式的乘法与除法运算法则进行判断即可.

【详解】 解: $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ab}$, 运算正确, 故 A 不符合题意;

$$\because a^2 > 0, \frac{b}{a^2} \geq 0,$$

$$\therefore b \geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{\frac{b}{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}}, \text{ 运算正确, 故 B 不符合题意,}$$

$$\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \text{ 运算正确, 故 C 不符合题意;}$$

当 $a < 0, b < 0$ 时, $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ 不成立, 故 D 符合题意;

故选: D.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 要使式子 $\frac{\sqrt{m+1}}{2}$ 有意义, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \geq -1$

【解析】

【分析】 此题考查了二次根式有意义的条件, 根据二次根式的被开方数有意义的条件即可求出 m 的范围, 解题的关键是熟练掌握二次根式有意义的条件.

【详解】 解: $\because \frac{\sqrt{m+1}}{2}$ 有意义,

$$\therefore m+1 \geq 0,$$

$$\therefore m \geq -1,$$

故答案为: $m \geq -1$.

8. $2\frac{1}{4}$ 的平方根是_____.

【答案】 $\pm \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了平方根的定义, 熟练掌握平方根的定义 (若 $x^2 = a$, 则 x 叫做 a 的平方根) 是解题的关键. 先将带分数化为假分数, 再根据平方根的定义求解.

【详解】 解: $\because 2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

$$\text{又} \because (\pm \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$$

$\therefore 2\frac{1}{4}$ 的平方根是 $\pm\frac{3}{2}$

故答案为: $\pm\frac{3}{2}$.

9. 比较大小: $-\frac{\sqrt{15}}{2}$ _____ -2 (填 “ $<$ ” “ $>$ ” 或 “ $=$ ”).

【答案】 $>$

【解析】

【分析】 本题考查了实数大小的比较, 关键要熟记实数大小的比较方法: 正实数都大于 0, 负实数都小于 0, 正实数大于一切负实数, 两个负实数绝对值大的反而小.

根据 $-\sqrt{16} < -\sqrt{15}$, 即 $-4 < -\sqrt{15}$, 即可求解.

【详解】 解: $\because -\sqrt{16} < -\sqrt{15}$,

$$\therefore -4 < -\sqrt{15},$$

$$\therefore -2 < -\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

故答案为: $>$.

10. 分母有理化: $\frac{1}{2+\sqrt{3}} =$ _____.

【答案】 $2-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查分母有理化, 利用分母有理化进行计算, 即可解答.

【详解】 解: $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{4-3}$$

$$= 2-\sqrt{3}.$$

故答案为: $2-\sqrt{3}$

11. 计算: $(3-\sqrt{3})\div\sqrt{3}=\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{3}-1$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的除法运算, 根据除法法则计算即可.

【详解】 解: $(3-\sqrt{3})\div\sqrt{3}=3\div\sqrt{3}-\sqrt{3}\div\sqrt{3}=\sqrt{3}-1$.

故答案为: $\sqrt{3}-1$.

12. 当 $x<0$ 时, 化简: $\sqrt{-x^3y}=\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-x\sqrt{-xy}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的性质与化简, 熟练掌握二次根式有意义的条件以及二次根式的性质是解题的关键. 先根据二次根式有意义的条件确定 y 的取值范围, 再结合 x 的正负化简二次根式.

【详解】 解: $\because$ 二次根式 $\sqrt{-x^3y}$ 有意义,

$$\therefore -x^3y \geq 0.$$

$$\text{又} \because x < 0,$$

$$\therefore x^3 < 0, \quad |x| = -x, \quad \text{则} -x^3 > 0,$$

$$\therefore y \geq 0,$$

$$\therefore -xy \geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{-x^3y} = \sqrt{-x^3y} = \sqrt{-x \cdot x^2y} = |x|\sqrt{-xy} = -x\sqrt{-xy}.$$

故答案为: $-x\sqrt{-xy}$.

13. “白日不到处, 青春恰自来. 苔花如米小, 也学牡丹开.” 这是清朝袁牧的一首诗《苔》. 苔花的花粉直径约为 0.0000084m , 用科学计数法表示 0.0000084 为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 8.4×10^{-6}

【解析】

【分析】 本题主要考查了科学记数法表示绝对值小于 1 的数,

将小数写成 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq a < 10$, n 为负整数.

【详解】解： $0.0000084 = 8.4 \times 10^{-6}$.

故答案为： 8.4×10^{-6} .

14. 用分数表示循环小数： $0.1\dot{2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{11}{90}$

【解析】

【分析】 本题考查无限循环小数转化为分数的方法，一元一次方程的应用.

设 $x = 0.1\dot{2}$ ，两边乘 100 得 $100x = 12.\dot{2}$ ，把两式相减即可求解.

【详解】解： 设 $x = 0.1\dot{2}$ ①，两边乘 100 得 $100x = 12.\dot{2}$ ②，

② - ①，得

$$100x - x = 12.\dot{2} - 0.1\dot{2},$$

$$\therefore 99x = 12.1,$$

$$\therefore x = \frac{12.1}{99} = \frac{11}{90},$$

故答案为： $\frac{11}{90}$.

15. 若 $\sqrt{102.01} \approx 10.1$, $\sqrt{10.201} \approx 3.41$, 则 $\sqrt{1.0201} \approx \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1.01

【解析】

【分析】 本题考查了算术平方根的移动规律的应用，能根据移动规律填空是解此题的关键.

根据算术平方根的移动规律，把被开方数的小数点每移动两位，结果移动一位，进行填空即可.

【详解】解： $\because \sqrt{102.01} \approx 10.1$,

$$\therefore \sqrt{102.01} = \sqrt{1.0201 \times 100} = \sqrt{1.0201} \times 10 \approx 10.1,$$

$$\text{即 } \sqrt{1.0201} \approx 1.01,$$

故答案为： 1.01 .

16. 当 $1 \leq x \leq 3$ 时，化简： $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质，熟练掌握性质是解答本题的关键.

根据二次根式的性质 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a(a \geq 0) \\ -a(a < 0) \end{cases}$ 化简即可.

【详解】 解: $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2}$,

$$\therefore 1 \leq x \leq 3,$$

$$\therefore x-1 \geq 0, x-3 \leq 0,$$

$$\therefore \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2}$$

$$= x-1-x+3=2.$$

故答案为: 2.

17. 等腰三角形的周长为 $2\sqrt{10} + \sqrt{2}$, 面积为 $\frac{\sqrt{19}}{2}$, 且其中一边长为 $\sqrt{10}$, 则底边上的高为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{38}}{2}$

【解析】

【分析】 分两种情况讨论, 即边长 $\sqrt{10}$ 为腰长或底边长, 再根据等腰三角形的周长和面积公式计算底边上的高, 最后结合三角形三边关系判断是否成立.

【详解】 解: 情况一: 假设 $\sqrt{10}$ 是腰长, 底边长为 $2\sqrt{10} + \sqrt{2} - 2\sqrt{10} = \sqrt{2}$.

设底边上的高为 h , 则 $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times h = \frac{\sqrt{19}}{2}$,

$$\text{解得 } h = \frac{\sqrt{38}}{2}.$$

当腰长为 $\sqrt{10}$, 底边长为 $\sqrt{10}$ 时, 由勾股定理得高 $h = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}$

$$= \frac{\sqrt{38}}{2},$$

$\therefore \sqrt{10}$ 是腰长, 情况一成立.

情况二: 假设 $\sqrt{10}$ 是底边长.

$$\text{腰长为 } \frac{2\sqrt{10} + \sqrt{2} - \sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{设底边上的高为 } h, \text{ 则 } \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times h = \frac{\sqrt{19}}{2},$$

$$\text{解得 } h = \frac{\sqrt{190}}{10}.$$

$$\text{此时三角形三边为 } \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{2}, \sqrt{10}.$$

$$\text{当腰长为 } \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{2}, \text{ 底边长为 } \sqrt{10} \text{ 时, 由勾股定理得高 } h = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{20} + 2}{4} - \frac{10}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{12 + 4\sqrt{5} - 10}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 + 4\sqrt{5}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2 + 4\sqrt{5}}}{2}$$

$$\neq \frac{\sqrt{190}}{10},$$

$\therefore \sqrt{10}$ 不是底边长, 情况二不成立.

$$\text{综上, 底边上的高为 } \frac{\sqrt{38}}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{38}}{2}.$$

【点睛】 本题主要考查了等腰三角形的性质、三角形面积公式、勾股定理, 熟练掌握等腰三角形的性质和相关公式, 全面考虑边长的不同情况是解题的关键.

18. 我们定义: 如果一个数的平方等于 -1 , 记作 $i^2 = -1$, 那么这个 i 就叫做虚数单位. 虚数与我们学过的实数合在一起叫做复数. 一个复数可以表示为 $a + bi$ (a, b 均为实数) 的形式, 其中 a 叫做它的实部, b 叫做它的虚部. 复数的加、减、乘的运算与我们学过的整式加、减、乘的运算类似.

例如计算： $(6+i)+(2-3i)=(6+2)+(i-3i)=8-2i$.

根据上述材料，将 $\frac{3+i}{2-i}$ 化为 $a+bi$ (a, b 均为实数) 的形式 (即化为分母中不含 i 的形式) ____.

【答案】 $1+i$

【解析】

【分析】 此题考查了新定义运算. 分子分母同乘以 $(2+i)$ 后，把分母化为不含 i 的数后计算.

【详解】 解： $\frac{3+i}{2-i} = \frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+5i+i^2}{4-i^2} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$.

故答案为： $1+i$.

三、简答题 (本大题共 6 题，第 19-22 题每题 5 分，第 23、24 题每题 6 分，满分 32 分)

19. 计算： $\sqrt{81} + \sqrt[3]{-27} - |\sqrt{3}-2| - \sqrt{3}$.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了实数的混合运算，根据算术平方根、立方根、去绝对值运算、实数的混合运算分别计算即可得到答案.

【详解】 解：原式 $= 9 + (-3) - (2 - \sqrt{3}) - \sqrt{3}$
 $= 9 - 3 - 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3}$
 $= 4$

20. 计算： $\frac{1}{2}\sqrt{6} \times 4\sqrt{\frac{1}{12}} \div \frac{2}{3}\sqrt{1\frac{1}{2}}$.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的乘除混合运算，熟练掌握运算法则是解答本题的关键.
先根据二次根式的性质化简，再根据乘除法法则计算.

【详解】 解： $\frac{1}{2}\sqrt{6} \times 4\sqrt{\frac{1}{12}} \div \frac{2}{3}\sqrt{1\frac{1}{2}}$
 $= \frac{1}{2}\sqrt{6} \times 4\sqrt{\frac{3}{36}} \div \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sqrt{6} \times \left(4 \times \frac{1}{6}\sqrt{3}\right) \div \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{6} \times \frac{2}{3}\sqrt{3} \div \frac{1}{3}\sqrt{6} \\
&= \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \div \frac{1}{3}\right) \sqrt{6 \times 3 \div 6} \\
&= \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

21. 计算: $\frac{2x}{3}\sqrt{18x} + x^2\sqrt{\frac{2}{x}} + 6x\sqrt{\frac{x}{8}}.$

【答案】 $\frac{9x}{2}\sqrt{2x}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的加减运算，先化简各式，再合并同类二次根式即可.

【详解】 解： 原式 $= \frac{2x}{3} \cdot 3\sqrt{2x} + x^2 \cdot \frac{\sqrt{2x}}{x} + 6x \cdot \frac{\sqrt{2x}}{4}$

$$\begin{aligned}
&= 2x\sqrt{2x} + x\sqrt{2x} + \frac{3x}{2}\sqrt{2x} \\
&= \frac{9x}{2}\sqrt{2x}.
\end{aligned}$$

22. 计算: $\frac{2}{b}\sqrt{ab} \cdot \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div 3\sqrt{\frac{a}{b}}.$

【答案】 $-a\sqrt{ab}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的乘除混合运算，涉及二次根式的乘法法则 $\sqrt{m} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{mn}$

($m \geq 0, n \geq 0$) 和除法法则 $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m}{n}}$ ($m \geq 0, n > 0$). 熟练掌握二次根式的乘除运算法则以及二次根式

的化简方法是解题的关键.

先根据乘法交换律和结合律将系数与系数相乘除，二次根式与二次根式相乘除，再对二次根式进行化简.

【详解】 解： $\frac{2}{b}\sqrt{ab} \cdot \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div 3\sqrt{\frac{a}{b}}$

$$= \left[\frac{2}{b} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{1}{3}\right] \times \left(\sqrt{ab} \cdot \sqrt{a^3b} \div \sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{1}{b}\right) \times \sqrt{ab \cdot a^3b \div \frac{a}{b}} \\
&= -\frac{1}{b} \sqrt{a^4b^2 \cdot \frac{b}{a}} \\
&= -\frac{1}{b} \sqrt{a^3b^3} \\
&= -\frac{1}{b} \times ab\sqrt{ab} \\
&= -a\sqrt{ab}.
\end{aligned}$$

23. 解不等式: $2(\sqrt{3}x - \sqrt{0.75}) < \sqrt{75} + 3\sqrt{2}x$.

【答案】 $x > -6 - 3\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算, 一元一次不等式的解法, 熟练掌握解一元一次不等式的步骤是解答本题的关键.

按照去括号、移项、合并同类项、系数化为 1 的步骤求出不等式的解集即可.

$$\begin{aligned}
&\text{【详解】 } 2(\sqrt{3}x - \sqrt{0.75}) < \sqrt{75} + 3\sqrt{2}x, \\
&2\sqrt{3}x - 2 \times \frac{1}{2}\sqrt{3} < 5\sqrt{3} + 3\sqrt{2}x, \\
&2\sqrt{3}x - \sqrt{3} < 5\sqrt{3} + 3\sqrt{2}x, \\
&2\sqrt{3}x - 3\sqrt{2}x < 5\sqrt{3} + \sqrt{3}, \\
&(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})x < 6\sqrt{3}, \\
&x > -6 - 3\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

24. 先化简再求值: $\frac{x^2+x-2}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$, 其中 $x = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

【答案】 $x, \sqrt{2}-1$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的化简求值, 分母有理化, 熟练掌握运算法则是解答本题的关键.

先化简 $x = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, 再根据分式的运算法则和二次根式的性质把所给代数式化简, 然后把 $x = \sqrt{2}-1$ 代入

即可.

【详解】解: $\because x = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1,$

$$\begin{aligned} &\therefore \frac{x^2+x-2}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} \\ &= \frac{(x-1)(x+2)}{x+2} - \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} \\ &= x-1 + \frac{x-1}{x-1} \\ &= x-1+1 \\ &= x \\ &= \sqrt{2}-1. \end{aligned}$$

四、解答题 (本大题共 3 题, 第 25 题 6 分, 第 26、27 题每题 8 分, 满分 22 分)

25. 二次根式 $\sqrt{28}$ 与最简二次根式 $\sqrt{2a+1}$ 是同类二次根式, b 是 8 的立方根.

(1) 求 $a+3b$ 的平方根;

(2) 若 $x = \sqrt{b} - a$, 求 $x^2 + 6x + 7$ 的值.

【答案】(1) ± 3

(2) 0

【解析】

【分析】本题考查了同类二次根式的定义, 平方根及立方根的意义.

(1) 根据同类二次根式的被开方数相同列式求解即可;

(2) 把 $x^2 + 6x + 7$ 变形为 $(x+3)^2 - 2$, 然后把 $x = \sqrt{2} - 3$ 代入计算即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 二次根式 $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ 与最简二次根式 $\sqrt{2a+1}$ 是同类二次根式,

$$\therefore 2a+1=7,$$

$$\therefore a=3.$$

$\because b$ 是 8 的立方根,

$$\therefore b=2,$$

$$\therefore a+3b=3+6=9,$$

$\therefore a+3b$ 的平方根 $\pm\sqrt{9} = \pm 3$;

【小问 2 详解】

解: $\because a=3, b=2$,

$$\therefore x = \sqrt{b} - a = \sqrt{2} - 3,$$

$$\therefore x^2 + 6x + 7$$

$$= x^2 + 6x + 9 - 2$$

$$= (x+3)^2 - 2$$

$$= (\sqrt{2} - 3 + 3)^2 - 2$$

$$= 2 - 2 = 0.$$

26. 已知 $y = \sqrt{x - \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - x} + 8$, 求 $\frac{x-4y}{\sqrt{x}-2\sqrt{y}} - \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x+\sqrt{xy}} \div \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}$ 的值.

【答案】 $\frac{9\sqrt{2}}{2} - 8$.

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的化简求值, 首先需要根据二次根式有意义的条件确定 x 的值, 进而确定 y 的值, 再把所求式子约分化简, 最后代值计算即可.

【详解】 解: $y = \sqrt{x - \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - x} + 8$,

$$x - \frac{1}{2} \geq 0 \text{ 和 } \frac{1}{2} - x \geq 0,$$

$$\text{解得 } x = \frac{1}{2},$$

$$\text{将 } x = \frac{1}{2} \text{ 代入 } y \text{ 的表达式中, } y = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} + 8 = 8,$$

把 $x = \frac{1}{2}$ 和 $y = 8$ 代入要求值的表达式中,

$$\frac{x-4y}{\sqrt{x}-2\sqrt{y}} - \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x+\sqrt{xy}} \div \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{x}+2\sqrt{y})(\sqrt{x}-2\sqrt{y})}{\sqrt{x}-2\sqrt{y}} - \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x+\sqrt{xy}} \div \frac{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}}{\frac{1}{\sqrt{y}}} \\
&= \sqrt{x}+2\sqrt{y} - \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x+\sqrt{xy}} \cdot \frac{\sqrt{xy}^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\
&= \sqrt{x}+2\sqrt{y} - \sqrt{y^2} \\
&= \sqrt{x}+2\sqrt{y} - y \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{8} - 8 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + 4\sqrt{2} - 8 \\
&= \frac{9\sqrt{2}}{2} - 8.
\end{aligned}$$

27. “混天绫”是哪吒的法宝之一，它是一条七尺二寸（约 2.33 米）的红绫，能随主人心意改变长度．哪吒在镇压妖兽时，伸长“混天绫”围成一圈形成一个面积为 400 平方分米的正方形“封妖阵”，后因妖兽反噬，需将“封妖阵”调整为面积为 285 平方分米的长方形，且长与宽之比为 5:3．

- (1) 围成正方形“封妖阵”时“混天绫”的长度是多少分米？
- (2) 围成新的“封妖阵”时哪吒的“混天绫”是否需要继续伸长？请通过计算说明理由．

【答案】 (1) 80 分米

(2) 不需要继续伸长，理由见解析

【解析】

【分析】 本题考查了算术平方根的应用，无理数的估算，正确理解题意是解题的关键．

- (1) 根据算术平方根的意义即可求解；
- (2) 根据题意列方程，求出长方形的长与宽，可得长方形的周长，再经过估算即得答案．

【小问 1 详解】

解：∵ “混天绫”围成一个面积为 400 平方分米的正方形，

∴ 正方形的边长为 20 分米，

∴ “混天绫”的总长度 $20 \times 4 = 80$ 分米．

答：成正方形“封妖阵”时“混天绫”的长度是 80 分米．

【小问 2 详解】

解：能，理由如下：

设长方形的长为 $5x$ 分米，宽为 $3x$ 分米，

依题意得 $5x \cdot 3x = 285$ ，

解得 $x = \sqrt{19}$ 或 $x = -\sqrt{19}$ ，

$\because x > 0$ ，

$\therefore x = \sqrt{19}$ ，

$\therefore$ 长方形的长为 $5\sqrt{19}$ 分米，宽为 $3\sqrt{19}$ 分米，

$\therefore$ 长方形的周长为 $2 \times (5\sqrt{19} + 3\sqrt{19}) = 16\sqrt{19}$ ，

$\because 4 < \sqrt{19} < 5$ ，

$\therefore 64 < 16\sqrt{19} < 80$ ，

$\therefore$ 围成新的“封妖阵”时哪吒的“混天绫”不需要继续伸长.

五、综合题（本大题共 1 题，满分 10 分）

28. 阅读材料，并完成下列任务：

材料一：裂项求和

小华在学习分式运算时，通过具体运算： $\frac{1}{1 \times 2} = 1 - \frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ ，……

发现规律： $\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (n 为正整数)，并证明了此规律成立.

应用规律：快速计算 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{9 \times 10} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.

材料二：根式化简

例 1 $\frac{1}{3 + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$;

例 2 $\frac{1}{5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{15}(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{15}(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$

任务一：化简.

(1) 化简： $\frac{1}{7\sqrt{5} + 5\sqrt{7}}$

(2) 猜想： $\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1} + (2n-1)\sqrt{2n+1}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (n 为正整数).

任务二：应用

(3) 计算： $\frac{1}{3+\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} + \frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{49\sqrt{47}+47\sqrt{49}}$ ；

任务三：探究

(4) 已知 $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$$y = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3 \times 5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{5 \times 7}} + \cdots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{1+\sqrt{2023}+\sqrt{2025}+\sqrt{2023 \times 2025}},$$

比较 x 和 y 的大小，并说明理由.

【答案】 (1) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} \right)$

(2) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}} \right)$

(3) $\frac{3}{7}$

(4) $x > y$ ，理由见解析

【解析】

【分析】 本题考查二次根式裂项求解，解题关键是熟练进行二次根式分母有理化的化简.

(1) 根据题目中的例子可以写出答案；

(2) 根据例 2，可以写出相应的猜想；

(3) 根据分母有理化，可得二次根式的化简，根据二次根式的加减，即可得到答案；

(4) 结合例 1，例 2 的规律进行计算即可；

【小问 1 详解】

$$\frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{35}(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} \right)$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}+(2n-1)\sqrt{2n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)}(\sqrt{2n+1}+\sqrt{(2n-1)})}, \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{(2n-1)}}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)} (\sqrt{2n+1} + \sqrt{(2n-1)})},$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}} \right),$$

故答案为: $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}} \right);$

【小问 3 详解】

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3+\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} + \frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{49\sqrt{47}+47\sqrt{49}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} + \frac{1}{\sqrt{15}(\sqrt{5}+\sqrt{3})} + \frac{1}{\sqrt{35}(\sqrt{7}+\sqrt{5})} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2303}(\sqrt{49}+\sqrt{47})} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2\sqrt{35}} + \cdots + \frac{\sqrt{49}-\sqrt{47}}{2\sqrt{2303}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{47}} - \frac{1}{\sqrt{49}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{7} \right) \\ &= \frac{3}{7}; \end{aligned}$$

【小问 4 详解】

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3 \times 5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{5 \times 7}} + \cdots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{1+\sqrt{2023}+\sqrt{2025}+\sqrt{2023 \times 2025}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+1} - \frac{1}{\sqrt{7}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2023}+1} - \frac{1}{\sqrt{2025}+1}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{2025}+1} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{1}{46} \\ \therefore x &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \end{aligned}$$

$$\therefore x - y = \frac{1}{46} > 0,$$

故 $x > y$.