

2025 学年第一学期八年级数学阶段练习

一、选择题 ($3 \times 7 = 21$)

1. 下列选项正确的是 ()

- A. $\sqrt{9} = \pm 3$ B. $\sqrt{(-2)^2} = -2$ C. -1 的算术平方根是 1 D. $\sqrt[3]{-125} = -5$

【答案】D

【解析】

【分析】根据平方根、算术平方根和立方根的定义逐项分析判断即可.

【详解】A. $\sqrt{9} = 3$, 故该选项是错误的, 不符合题意;

B. $\sqrt{(-2)^2} = 2$, 故该选项是错误的, 不符合题意;

C. -1 没有算术平方根, 故该选项是错误的, 不符合题意;

D. $\sqrt[3]{-125} = -5$, 故该选项是正确的, 符合题意.

故选 D.

【点睛】本题考查了平方根、算术平方根和立方根的定义, 熟练掌握平方根、算术平方根和立方根的定义是解本题的关键.

2. 下列方程中, 有实数根的方程是 ()

- A. $x^2 + 1 = 0$ B. $x^2 + x + 1 = 0$ C. $x^2 - x + 1 = 0$ D. $x^2 + 3x + 1 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程根的判别式. 分别计算出每个方程根的判别式的值, 再进一步判断即可. 解题的关键是掌握: 式子 $\Delta = b^2 - 4ac$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 根的判别式, $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不等的实数根; $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根; $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程无实数根.

【详解】解: A. $\because$ 方程根的判别式 $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0$,

$\therefore$ 此方程没有实数根, 故此选项不符合题意;

B. $\because$ 方程根的判别式 $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$,

$\therefore$ 此方程没有实数根, 故此选项不符合题意;

C. $\because$ 方程根的判别式 $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$,

$\therefore$ 此方程没有实数根, 故此选项不符合题意;

D. $\because$ 方程根的判别式 $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5 > 0$,

$\therefore$ 此方程有两个不相等的实数根, 故此选项符合题意.

故选: D.

3. 将一元二次方程 $(1-3x)(x+3) = 2x^2 + 1$ 化为一般形式后, 二次项系数和常数项分别是 ()

A. 5, -2

B. 2, -3

C. -5, -1

D. 6, 2

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的一般形式, 准确运算是解题的关键. 一元二次方程的一般形式为 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 将方程化为一般形式后判断二次项系数和常数项的值即可.

【详解】解: $(1-3x)(x+3) = 2x^2 + 1$,

$$x + 3 - 9x - 3x^2 = 2x^2 + 1,$$

$$5x^2 + 8x - 2 = 0$$

$\therefore$ 二次项系数为 5, 常数项为 -2,

故选: A.

4. 某工厂七月份的产值是 100 万元, 计划第三季度共创产值 484 万元. 若每个月产值的增长率相同, 并设这个增长率为 x , 则下列方程中正确的是 ()

A. $100(1+x)^2 = 484$

B. $100(1+x)^3 = 484$

C. $(1+x) + 100(1+x)^2 = 484$

D. $100[1 + (1+x) + (1+x)^2] = 484$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用, 掌握增长率的计算方法是解题的关键;

根据每个月产值的平均增长率为 x , 七月份的产值是 100 万元, 表示之后两个月的产值, 然后已知第三季度的总产值, 列方程即可.

【详解】解: $\because$ 每个月产值的平均增长率为 x , 七月份的产值是 100 万元,

$\therefore$ 八月份产值为 $100(1+x)$,

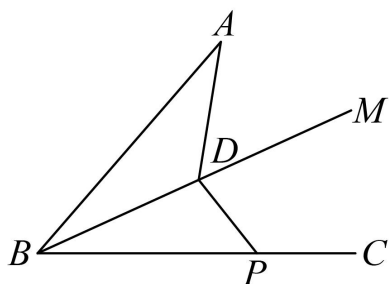
九月份产值为 $100(1+x)^2$,

$\therefore$ 计划第三季度共创产值 484 万元,

$$\therefore 100[1+(1+x)+(1+x)^2]=484,$$

故选: D.

5. 如图, BM 是 $\angle ABC$ 的平分线, 点 D 是 BM 上一点, 点 P 为直线 BC 上的一个动点. 若 $\triangle ABD$ 的面积为 9, $AB=6$, 则线段 DP 的长不可能是 ()



A. 2

B. 3

C. 4

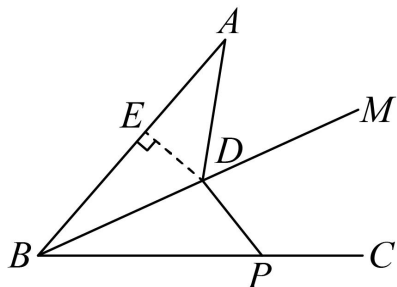
D. 5.5

【答案】 A

【解析】

【分析】本题考查角平分线的性质定理, 垂线段最短, 过点 D 作 $DE \perp AB$, 利用三角形的面积公式求出 DE 的长, 根据垂线段最短得到 $DP \perp BC$ 时, DP 最短, 此时 $DP=DE$, 进行判断即可.

【详解】解: 过点 D 作 $DE \perp AB$,



$$\text{则: } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DE = \frac{1}{2} \times 6DE = 9,$$

$$\therefore DE = 3,$$

$\because$ 点 P 为直线 BC 上的一个动点,

$\therefore$ 当 $DP \perp BC$ 时, DP 最短,

$\because BM$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,

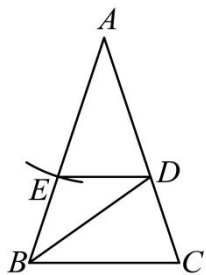
$\therefore$ 当 $DP \perp BC$ 时, $DP = DE = 3$,

$\therefore$ 线段 DP 的长不可能是 2;

故选 A.

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 点 D 在边 AC 上且到边 AB 和边 BC 的距离相等. 以点 A 为圆心, 线

段 AD 的长为半径画弧交边 AB 于点 E ，连接 DE 。下列结论中，不一定正确的是（ ）



A. $BE = DE$

B. $BD = BC$

C. $\angle AED = 2\angle BDE$

D. $\frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{DE}{BC}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查等腰三角形的判定与性质，角平分线的判定，平行线的判定与性质，根据作图得到 $AD = AE$ ，等边对等角，推出 $\angle AED = \angle ABC$ ，进而得到 $DE \parallel BC$ ，根据点 D 在边 AC 上且到边 AB 和边 BC 的距离相等，得到 BD 平分 $\angle ABC$ ，推出 $\triangle BED$ 为等腰三角形，逐一进行判断即可。

【详解】解：由作图可知： $AD = AE$ ，

$$\therefore \angle AED = \angle ADE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A),$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A),$$

$$\therefore \angle AED = \angle ABC,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EDB = \angle CBD,$$

$\because$ 点 D 在边 AC 上且到边 AB 和边 BC 的距离相等，

$$\therefore BD \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC,$$

$$\therefore \angle EDB = \angle EBD = \frac{1}{2} \angle ABC,$$

$\therefore BE = DE$ ， $\angle AED = \angle ABC = 2\angle BDE$ ；故选项 A，C 正确，不符合题意；

$$\because DE \parallel BC,$$

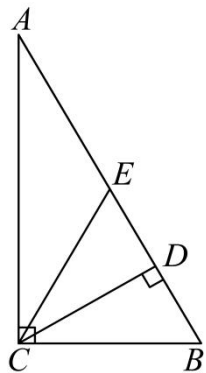
$$\therefore \frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{DE}{BC} \text{ (平行线间的距离处处相等)}；故选项 D 正确，不符合题意；$$

无法得到 $BD = BC$;

故选: B.

7. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CD 与 CE 分别是斜边 AB 上的高与中线, 以下判断中正确的个数有 ()

① $\angle DCB = \angle A$; ② $\angle DCB = \angle ACE$; ③ $\angle ACD = \angle BCE$; ④ $\angle BCE = \angle BEC$



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查斜边上的中线, 等腰三角形的判定和性质, 根据斜边上的中线等于斜边的一半, 等边对等角, 同角的余角相等, 进行判断即可.

【详解】 解: $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CD 与 CE 分别是斜边 AB 上的高与中线,

$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ, CE = AE = BE, \angle ADC = \angle CDB = 90^\circ,$

$\therefore \angle B + \angle BCD = 90^\circ, \angle A + \angle ACD = 90^\circ, \angle B = \angle BCE, \angle A = \angle ACE,$

$\therefore \angle DCB = \angle A = \angle ACE, \angle ACD = \angle B = \angle BCE;$

故①②③正确,

无法得到 $\angle BCE = \angle BEC$, 故④错误;

综上分析可得: 正确的有 3 个.

故选: C.

二、填空题 ($3 \times 9 = 27$)

8. 写出 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ 的一个有理化因式是_____.

【答案】 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

【解析】

【分析】充分利用平方差公式，得出有理化因子即可.

【详解】解： $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ，

故答案为： $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

【点睛】本题考查了分子有理化，解题的关键是熟练掌握平方差公式进行求解.

9. 化简： $\sqrt{\frac{27}{4x}} (x>0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{3\sqrt{3x}}{2x}$

【解析】

【分析】本题主要考查了二次根式的化简，

根据 $\sqrt{a^2}=|a|$ 化简即可.

【详解】解： $\because x>0$ ，

$$\therefore \sqrt{\frac{27}{4x}} = \frac{\sqrt{27x}}{\sqrt{4x^2}} = \frac{3\sqrt{3x}}{2x}.$$

故答案为： $\frac{3\sqrt{3x}}{2x}$.

10. 当 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 时，方程 $3x^{m^2-2} + (m-2)x + m = 0$ 为一元二次方程.

【答案】 ± 2

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的概念，判断一个方程是否是一元二次方程，首先要看是否是整式方程，然后看化简后是否是只含有一个未知数且未知数的最高次数是 2.

根据一元二次方程的概念可得 $m^2 - 2 = 2$ 即可得解.

【详解】解： $\because$ 关于 x 的方程 $3x^{m^2-2} + (m-2)x + m = 0$ 是一元二次方程，

$$\therefore m^2 - 2 = 2,$$

解得： $m = \pm 2$ ，

故答案为： ± 2 .

11. 若 $x = -1$ 是方程 $2x^2 + mx - 5 = 0$ 的一个根，则该方程的另一个根是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x = \frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系，对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，若 x_1, x_2 是该方程的两个实数根，则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ，据此设方程的另一个根为 t ，则由根与系数的关系可得 $-1 \cdot t = -\frac{5}{2}$ ，即 $t = \frac{5}{2}$ ，据此可得答案.

【详解】 解：设方程的另一个根为 t ，

$\because x = -1$ 和 $x = t$ 是方程 $2x^2 + mx - 5 = 0$ 的一个根，

$$\therefore -1 \cdot t = -\frac{5}{2},$$

$$\therefore t = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \text{方程的另一个根为 } x = \frac{5}{2},$$

故答案为： $x = \frac{5}{2}$.

12. 若方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根是 -3 和 4 ，则 $p =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系，对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，若 x_1, x_2 是该方程的两个实数根，则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ，据此可得 $-p = -3 + 4 = 1$ ，即 $p = -1$.

【详解】 解： $\because$ 方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根是 -3 和 4 ，

$$\therefore -p = -3 + 4 = 1,$$

$$\therefore p = -1,$$

故答案为： -1 .

13. 方程 $2x(x+1) = 3x+3$ 的解为_____.

【答案】 $x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，利用因式分解法求解即可，解题的关键是熟记常见的解法，直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法及正确掌握一元二次方程的解法.

【详解】 解: $2x(x+1)=3x+3$

$$2x(x+1)=3(x+1)$$

$$2x(x+1)-3(x+1)=0$$

$$(x+1)(2x-3)=0$$

$$x+1=0 \text{ 或 } 2x-3=0$$

$$\therefore x_1=-1, \quad x_2=\frac{3}{2},$$

故答案为: $x_1=-1, \quad x_2=\frac{3}{2}$.

14. 方程 $kx^2-(2k+1)x+k=0$ 有两个实数根，则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$

【解析】

【分析】 本题考查根的判别式，根据方程有两个实数根，得到 $\Delta \geq 0$ ，结合一元二次方程的二次项的系数不为 0，进行求解即可.

【详解】 解: 由题意，得: $\Delta = (2k+1)^2 - 4k^2 = 4k+1 \geq 0$ ，且 $k \neq 0$ ，

解得: $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$;

故答案为: $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$.

15. 在实数范围内因式分解: $2x^2-3x-1=$ _____.

【答案】 $2\left(x-\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$

【解析】

【分析】 结合题意，当 $x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=0$ 时，通过求解一元二次方程，得

$x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=\left(x-\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)=0$ ，结合 $2x^2-3x-1=2\left(x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)$ ，即可得到答案.

【详解】 $2x^2 - 3x - 1 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right)$

当 $x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ 时, 得 $x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$

$\therefore x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = \left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right) = 0$

$\therefore x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = \left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right)$

$\therefore 2x^2 - 3x - 1 = 2\left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right)$

故答案为: $2\left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right)$.

【点睛】 本题考查了因式分解和一元二次方程的知识; 解题的关键是熟练掌握一元二次方程的性质, 从而完成求解.

16. 已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2 + x - 3 = 0$, 设方程两个实数根分别为 x_1, x_2 , 且满足

$(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 = 4$, $k =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的根与系数的关系, 解题的关键是掌握如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$

的两根为 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

由题意得所以 $x_1 + x_2 = -\frac{1}{k}$, $x_1 x_2 = -\frac{3}{k}$, 代入 $(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 = 4$ 得到 $\left(-\frac{1}{k}\right)^2 - \frac{3}{k} = 4$, 换元解方程,

然后利用根的判别式得出 $k \geq -\frac{1}{12}$, 即可求解.

【详解】 解: 因为 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $kx^2 + x - 3 = 0$ 的两个实数根,

所以 $x_1 + x_2 = -\frac{1}{k}$, $x_1 x_2 = -\frac{3}{k}$.

又因为 $(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 = 4$,

$$\text{所以} \left(-\frac{1}{k}\right)^2 - \frac{3}{k} = 4,$$

$$\text{解得 } k_1 = \frac{1}{4}, \quad k_2 = -1,$$

经检验，两根都是原方程的解，且满足 $k \neq 0$ ，

所以 k 的值为 $\frac{1}{4}$ 或 -1 。

又 $\because$ 方程 $kx^2 + x - 3 = 0$ 有两个实数根，

$$\therefore \Delta = 1^2 - 4k \times (-3) = 1 + 12k \geq 0,$$

$$\therefore k \geq -\frac{1}{12},$$

$\therefore$ 应舍去 $k = -1$ 。

故答案为： $\frac{1}{4}$ 。

三、解答题 (5+5+6+6=22)

$$17. \text{ 计算: } \frac{1}{3}\sqrt{x^4y} \cdot \left(-4\sqrt{\frac{y^2}{x}}\right) \div \frac{3}{4}\sqrt{xy^2}$$

【答案】 $-\frac{16}{9}x\sqrt{y}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式乘除混合运算，涉及二次根式性质化简、二次根式被开方式非负、二次根式乘法运算法则及二次根式除法运算法则等，熟练掌握二次根式性质及乘除运算法则是解决问题的关键。先根据二次根式性质化简，再结合二次根式乘除运算法则求解即可得到答案。

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \frac{1}{3}\sqrt{x^4y} \cdot \left(-4\sqrt{\frac{y^2}{x}}\right) \div \frac{3}{4}\sqrt{xy^2} \\ &= -\left(\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{4}{3}\right) \sqrt{x^4y \cdot \frac{y^2}{x} \cdot \frac{1}{xy^2}} \\ &= -\frac{16}{9}\sqrt{x^2y} \\ &= -\frac{16}{9}x\sqrt{y}; \end{aligned}$$

另一种解法:

$$\text{原式} = \frac{x^2\sqrt{y}}{3} \cdot \left(-\frac{4y\sqrt{x}}{x}\right) \div \frac{3y\sqrt{x}}{4}$$

$$= \frac{x^2\sqrt{y}}{3} \cdot \left(-\frac{4y\sqrt{x}}{x}\right) \cdot \frac{4}{3y\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{16}{9}x\sqrt{y}.$$

18. 解方程: $x^2 - 2x = 2x - 1$.

【答案】 $x_1 = 2 + \sqrt{3}$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 利用公式法求解即可.

本题考查了公式法求方程的根, 选择适当解方程的方法是解题的关键.

【详解】 解: $\because x^2 - 2x = 2x - 1$,

整理, 得 $x^2 - 4x + 1 = 0$

在这里, $a = 1, b = -4, c = 1, b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 12 > 0$

$$\therefore x = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3},$$

解得 $x_1 = 2 + \sqrt{3}$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$.

19. 解方程: $\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2 - x - 2} = \frac{2}{x+1}$

【答案】

$$x = 1$$

【解析】

【分析】 此题考查的是解分式方程, 熟练掌握解分式方程的一般方法是解决此题的关键.

确定最简公分母, 去分母, 去括号, 移项合并同类项, 系数化为 1, 检验, 即得.

【详解】 解: $\because \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2 - x - 2} = \frac{2}{x+1}$,

$$\frac{1}{x-2} - \frac{4}{(x-2)(x+1)} = \frac{2}{x+1}$$

两边同乘以 $(x-2)(x+1)$, 得 $x+1-4=2(x-2)$,

去括号, 得 $x+1-4=2x-4$,

移项, 得 $x-2x=-4-1+4$,

合并同类项, 得 $-x=-1$,

系数化为 1, 得 $x=1$,

检验, $x=1$ 是原方程的根,

$\therefore$ 原方程的解为 $x=1$.

20. 若关于 x 的方程 $\frac{x^2+3-b^2}{x^2-2x} + \frac{1}{x} = \frac{3b}{x-2}$ 有增根, 求 b 的值.

【答案】 b 的值为 ± 1 或 -7 .

【解析】

【分析】 本题主要考查了解方程, 分式方程的增根, 先将分式方程化为整式方程 $x^2 + (1-3b)x + 1 - b^2 = 0$,

又关于 x 的方程 $\frac{x^2+3-b^2}{x^2-2x} + \frac{1}{x} = \frac{3b}{x-2}$ 有增根, 所以 $x=0$ 或 $x=2$, 将方程的增根代入整式方程计算即可

求解, 掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】 解: $\frac{x^2+3-b^2}{x^2-2x} + \frac{1}{x} = \frac{3b}{x-2}$

$$x^2 + 3 - b^2 + x - 2 = 3bx$$

$$x^2 + (1-3b)x + 1 - b^2 = 0,$$

$\therefore$ 若关于 x 的方程 $\frac{x^2+3-b^2}{x^2-2x} + \frac{1}{x} = \frac{3b}{x-2}$ 有增根,

$\therefore x=0$ 或 $x=2$,

当 $x=0$ 时, $1-b^2=0$,

$\therefore b=\pm 1$;

当 $x=2$ 时, $2^2 + 2(1-3b) + 1 - b^2 = 0$,

整理得: $b^2 + 6b - 7 = 0$

$\therefore b=1$ 或 $b=-7$;

综上: b 的值为 ± 1 或 -7 .

四、解答题 (6+7+7+10)

21. 已知关于 x 的方程 $(m^2-m)x^2 - 4mx + 4 = 0$ 有两个不相等的实数根.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若 m 为整数, 且 $m < 3$, a 是方程的一个根, 求代数式 $2a^2 - 2a - \frac{3a^2-1}{2} + 1$ 的值.

【答案】(1) $m > 0$ 且 $m \neq 1$

(2) $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根的判别式，一元二次方程的定义，代数式求值，理解根的判别式是解答关键.

(1) 根据一元二次方程的定义，根的判别式来求解；

(2) 根据题意先求出 m ，进而得到 $a^2 - 4a = -2$ ，再代入代数式中进行计算求解.

【小问1 详解】

解：由题意得： $\because m^2 - m \neq 0$,

$$\therefore m_1 \neq 0, \quad m_2 \neq 1,$$

$$\Delta = (-4m)^2 - 4(m^2 - m) \times 4 = 16m > 0.$$

$$\therefore m > 0,$$

$$\therefore m > 0 \text{ 且 } m \neq 1.$$

【小问2 详解】

解：由题意得： $0 < m < 3$ ，且为 $m \neq 1$ 的整数，

$$\therefore m = 2.$$

将 $x = a$ ， $m = 2$ 代入 $(m^2 - m)x^2 - 4mx + 4 = 0$

得： $a^2 - 4a = -2$,

$$\backslash 2a^2 - 2a - \frac{3a^2 - 1}{2} + 1$$

$$= 2a^2 - 2a - \frac{3a^2}{2} + \frac{1}{2} + 1$$

$$= \frac{a^2}{2} - 2a + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 - 4a) + \frac{3}{2}$$

将 $a^2 - 4a = -2$ 代入 $\frac{1}{2}(a^2 - 4a) + \frac{3}{2}$ 中

$$\frac{1}{2}(a^2 - 4a) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot (-2) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

22. 为加强防汛工作，市工程队准备对苏州河一段长为 2240 米的河堤进行加固，由于采用新的加固模式，现在计划每天加固的长度比原计划增加了 20 米，因而完成此段加固工程所需天数将比原计划缩短 2 天，为进一步缩短该段加固工程的时间，如果要求每天加固 224 米，那么在现在计划的基础上，每天加固的长度还要再增加多少米？

【答案】每天加固的长度还要再增加 64 米

【解析】

【分析】设现在计划每天加固的长度为 x 米，则原计划每天加固的长度为 $(x-20)$ 米，根据“现计划比原计划所需天数缩短 2 天”列分式方程，即可求解.

【详解】解：设现在计划每天加固的长度为 x 米，

由题意知：
$$\frac{2240}{x} + 2 = \frac{2240}{x-20},$$

整理可得：
$$x^2 - 20x - 22400 = 0,$$

解得 $x_1 = 160$, $x_2 = -140$ (舍),

经检验， $x = 160$ 是所列分式方程的解，

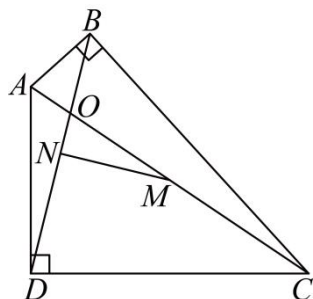
即现在计划每天加固的长度为 160 米，

$$224 - 160 = 64 \text{ (米)},$$

因此每天加固的长度还要再增加 64 米.

【点睛】本题考查分式方程的实际应用、解一元二次方程，解题的关键是根据所给等量关系列出分式方程，求出解后注意检验.

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中， $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ，连接 AC 与 BD 交于点 O ， M ， N 分别是 AC 、 BD 的中点. 求证： MN 垂直平分 BD .



【答案】证明见解析

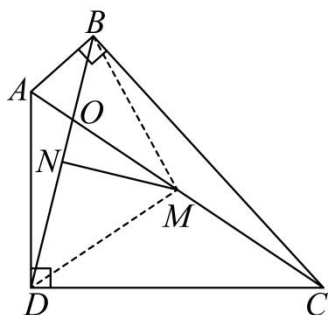
【解析】

【分析】本题考查了直角三角形斜边上的中线的性质，等腰三角形的三线合一的性质，解题的关键是熟练

掌握直角三角形的性质和等腰三角形的性质,

连接 BM 、 DM ，根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，以及等腰三角形的三线合一即可证明

【详解】解：连接 BM 、 DM ，如图所示



$\because \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ， M 是 AC 的中点

$$\therefore BM = \frac{1}{2}AC, DM = \frac{1}{2}AC$$

$$\therefore BM = DM$$

又 $\because N$ 分别是 BD 的中点

$$\therefore MN \perp BD$$

$$\therefore MN \text{ 垂直平分 } BD$$

24. (1) 在数学活动课上，李老师给出如下问题：如图 1，在 ABC 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 为 BC 中点， $CE \perp AD$ 于 F 交 AB 于点 E ，连接 DE ，若 $CE = 2DE$ 。求证： $\angle DEB = \angle AEC$ 。

如图 2，小刚同学从条件的角度出发给出如下解题思路：延长 ED 至点 G ，使 $GD = ED$ ，连接 CG ，将 $\angle DEB$ 与 $\angle AEC$ 之间的数量关系转化为 $\angle G$ 与 $\angle ECG$ 之间的数量关系。请你根据小刚同学的解题思路，写出证明过程。

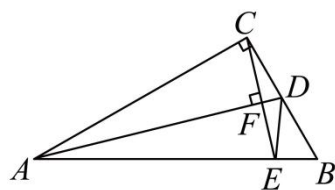


图1

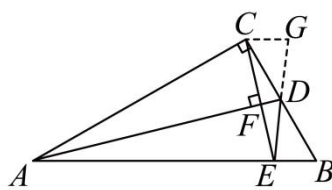


图2

【类比分析】(2) 李老师发现小刚同学很好地运用了转化思想，根据题中条件转化角。为了帮助学生更好地感悟转化思想，李老师将图 1 进行变换，提出下面的问题，请你解答。

如图 3，在 ABC 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 为 BC 中点， $CE \perp AD$ 于 F 交 AB 于点 E ，连接 BF ，若 $BF = AC$ ，求证： $AF = 2DF$ 。

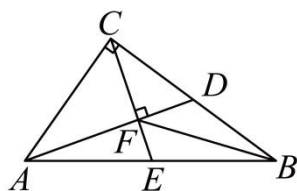


图3

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

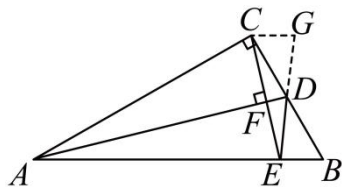
【解析】

【分析】(1) 先证明 $CE = GE$ ，得到 $\angle G = \angle ECG$ ，连接 CG ，结合已知证明 $\triangle CGD \cong \triangle BED$ (SAS)，得到 $\angle G = \angle BED$ ， $CG \parallel BE$ ，根据平行线的性质，等量代换解答即可。

(2) 延长 FD 至点 M ，使 $FD = DM$ ，则 $MF = 2FD = 2DM$ ；连接 BM ，证明 $\triangle CFD \cong \triangle BMD$ (SAS)，得到 $\angle CFD = \angle BMD$ ， $FC = MB$ ，然后再结合已知条件证明 $\triangle CFA \cong \triangle BMF$ (HL)，根据全等三角形的性质，等量代换证明即可。

本题考查几何综合，涉及中点定义、三角形全等的判定与性质、平行线的判定与性质、等腰三角形的判定与性质，熟练掌握相关几何性质、利用“倍长中线”做出辅助线，运用三角形全等判定与性质求证是解决问题的关键。

【详解】(1) 证明：延长 ED 至点 G ，使 $GD = ED$ ，连接 CG ，



则 $EG = 2ED$ ，

$\therefore CE = 2DE$ ，

$\therefore CE = GE$ ，

$\therefore \angle G = \angle ECG$ ；

$\because D$ 是边 BC 的中点，

$\therefore DC = DB$ ，

$$\therefore \begin{cases} GD = DE \\ \angle GDC = \angle EDB, \\ DC = DB \end{cases}$$

$\therefore \triangle CGD \cong \triangle BED$ (SAS)，

$\therefore \angle G = \angle BED$ ，

$$\therefore CG \parallel BE,$$

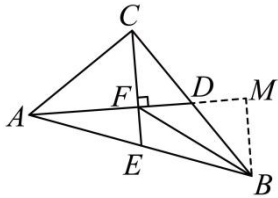
$$\therefore \angle AEC = \angle ECG,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle G,$$

$$\therefore \angle DEB = \angle AEC.$$

(2) 证明: 延长 FD 至点 M , 使 $FD = DM$, 则 $MF = 2FD = 2DM$;

连接 BM ,



$\because D$ 是边 BC 的中点,

$$\therefore DC = DB,$$

$$\therefore \begin{cases} FD = MD \\ \angle FDC = \angle MDB, \\ DC = DB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CFD \cong \triangle BMD (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle CFD = \angle BMD, \quad FC = MB,$$

$$\because CE \perp AD,$$

$$\therefore \angle CFA = \angle BMF = 90^\circ,$$

$$\because BF = AC, \quad FC = MB,$$

$$\therefore \triangle CFA \cong \triangle BMF (\text{HL}),$$

$$\therefore AF = MF.$$

$$\therefore AF = 2DF.$$